Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 17, No 1, p. 49–64, enero–julio de 1999

Identificación de un coeficiente para un modelo de sorción dinámica

Henry Lamos*
Yaneth Orellana H.†

Resumen

Los problemas inversos para ecuaciones diferenciales no lineales aparecen en diferentes campos de la ciencia, como por ejemplo en la transferencia de calor, en físico–química, física del plasma e hidrología. Este trabajo está dedicado a la demostración del teorema de unicidad de la solución de un problema de identificación.

Key words and phrases. Inverse coefficients problems, nonlinear differential equations, sorption isotherm, integral equation.

1 Introducción

Una de las condiciones importantes para la solución de problemas en las diferentes áreas de la ciencia y la tecnología contemporáneos es la asimilación y profundización de temas modernos de la matemática aplicada. Entre ellos se encuentran los relacionados con los llamados problemas inversos. En este trabajo se considera un problema inverso que consiste en identificar el coeficiente cinético través de los resultados de un experimento dinámico. En calidad de información suplementaria para la determinación de la caracterí stica se emplea una curva dinámica de salida, esto es, la concentración del gas a la salida de la columna en un punto. El problema inverso se plantea para el modelo matemático de sorción dinámica con cinética de difusión mixta [6].

*Profesor Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, COLOMBIA. (*E–mail*: `hlamos@uis.edu.co`)

†Profesora de la Facultad de Ingeniería de Sistemas, Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga, Colombia. (*E–mail*: `yorellan@bumanga.unab.edu.co`). Proyecto parcialmente financiado por Colciencias.

2 Formulación del problema inverso

Consideremos el modelo matemático del proceso de sorción dinámica con ciné tica de difusión mixta:

$$\nu u_x + \beta(a)u = \beta(a)F(v), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{2.1}$$
$$a_t = \beta(a)(u - F(v)), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{2.2}$$
$$v_t + \gamma v = \gamma a + \lambda\beta(a)u - \lambda\beta(a)F(v), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{2.3}$$
$$u(0,t) = \mu(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.4}$$
$$a(x,0) = v(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le l, \tag{2.5}$$

donde $\lambda = \dfrac{1}{\alpha_0}$, ν, γ son constantes positivas, la función $F(\xi)$ es la función inversa a la isoterma $f(\xi)$; $Q_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$.

Supongamos que la función $\mu(t)$ satisface las condiciones

$$\mu \in C^1[0,t], \quad \mu(0) = 0, \quad \mu^{'}(t) \ge 0, \quad t \in [0,t], \tag{2.6}$$
$$F \in C^1(-\infty,\infty), \quad F(0) = 0,$$
$$F(+\infty) > F(\mu(T));\ 0 < F'(\xi) < c,\ c = \text{const.} \tag{2.7}$$

Supóngase que la función $\beta(\xi)$ que aparece en las ecuaciones (2.1)–(2.3) es desconocida y se debe identificar a través de información complementaria sobre la solución del problema. Sean las constantes γ, λ, ν conocidas, y para $t \in [0,T]$ se conocen las funciones $\mu(t)$,

$$g(t) = u(l,t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.8}$$

y la función inversa de la isoterma $F(\xi)$. Se deben determinar las funciones $\beta(\xi)$, $u(x,t)$, $a(x,t)$, $v(x,t)$ que satisfacen las ecuaciones (2.1)–(2.5), (2.8).

El estudio del problema inverso (2.1)–(2.5), (2.8) está basado en el empleo de algunas propiedades de la solución del problema (2.1)–(2.5). En forma análoga como se hizo en [6], se demuestran los siguientes resultados.

Teorema 2.1. *Supóngase que las funciones $\mu(t)$ y $F(\xi)$ satisfacen las condiciones* (2.6) *y* (2.7)*, y que $\beta(\xi)$ satisface la condición*

$$\beta \in C^1(-\infty,\infty), \quad \beta(0) = 0; \quad 0 \le \beta'(\xi) \le L,$$

para $\xi \in (-\infty,\infty)$. Entonces existe una única solución del problema (2.1)–(2.5) *y las funciones u,a, $v \in C^1[Q_T]$. Además,*

$$u_t(x,t) > 0,\ a_t(x,t) > 0,\ v_t(x,t) > 0, \qquad (x,t) \in Q_T^0, \tag{2.9}$$
$$u_x(x,t) < 0,\ a_x(x,t) < 0,\ v_x(x,t) < 0, \qquad (x,t) \in Q_T^0, \tag{2.10}$$

donde $Q_T^0 = \{(x,t) : 0 \le x \le l, 0 < t \le T\}$.

Corolario 2.1. *Si las funciones* $u(x,t), a(x,t), v(x,t)$ *son soluciones del problema* (2.1)–(2.5) *y se satisfacen las condiciones* (2.6)–(2.7), *y* $F(+\infty) > \mu(T)$, *entonces para cualquier* $\tau \in (0,T]$ *en* Q_τ *son válidas las siguientes desigualdades:*

$$0 \le u(x,t) \le u(0,\tau) = \mu(\tau), \tag{2.11}$$

$$0 \le a(x,t) \le a(0,\tau), \tag{2.12}$$

$$0 \le v(x,t) \le f(u(x,t)) \le f(\mu(\tau)). \tag{2.13}$$

Demos la definición de solución del problema inverso del problema (2.1)–(2.5), (2.8).

Definición 2.1. *El conjunto de funciones* $\{\beta(\xi), u(x,t), a(x,t), v(x,t)\}$ *se llama solución del problema inverso* (2.1)–(2.5), (2.8), *si*

$$\beta \in C^1(-\infty,\infty), \quad \beta(0) = 0, \quad 0 \le \beta'(\xi) \le L \tag{2.14}$$

para $\xi \in (-\infty,\infty)$, *L es una constante,* $u(x,t)$, $a(x,t)$, $v(x,t) \in C^1[Q_T]$ *y las funciones* $\beta(\xi)$, $u(x,t)$, $a(x,t)$, $v(x,t)$ *satisfacen* (2.1)–(2.5), (2.8).

2.1 Unicidad de la solución

Para el problema inverso (2.1)–(2.5), (2.8) demostremos el teorema de unicidad de la solución, suponiendo que la función $\beta(\xi)$ es conocida para valores lo suficientemente pequeños de su argumento.

Teorema 2.2. *Supongamos que la función* $\mu(t)$ *satisface la condición*

$$\mu \in C^1[0,T],\ \mu(0) = 0,\ \mu'(t) > 0, \quad t \in [0,T], \tag{2.15}$$

y la función $F(\xi)$ *satisface*

$$\begin{aligned} &F \in C^1(-\infty,\infty), \quad F(0) = 0, \\ &F(+\infty) > F(\mu(T));\ 0 < F'(\xi) < c,\ c = const. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Entonces, si $\beta_i(\xi), u_i(x,t), a_i(x,t), v_i(x,t)$, *con* $i = 1,2$, *son soluciones del problema inverso* (2.1)–(2.5), (2.8), *y existe un* $\xi_0 > 0$ *tal que* $\beta_1(\xi) = \beta_2(\xi)$ *para* $\xi \in [0,\xi_0]$, *se tendrá* $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $a_1(x,t) = a_2(x,t)$, $v_1(x,t) = v_2(x,t)$ *en* Q_T, *y* $\beta_1(\xi) = \beta_2(\xi)$ *para* $\xi \in [0, a_2(0,T)]$.

Demostración. Sean $\beta_i(\xi), u_i(x,t), a_i(x,t), v_i(x,t)$, para $i = 1, 2$, soluciones del problema inverso (2.1)–(2.5), (2.8). Supongamos que $a_1(0,T) \leq a_2(0,T)$. Introduciendo las funciones

$$
\begin{aligned}
q(x,t) &= u_1(x,t) - u_2(x,t), & p(x,t) &= a_1(x,t) - a_2(x,t),\\
w(x,t) &= v_1(x,t) - v_2(x,t), & z(\xi) &= \beta_1(\xi) - \beta_2(\xi),
\end{aligned}
$$

se desprende de (2.1)–(2.5), (2.8) que el conjunto de las funciones $\{q(x,t), p(x,t), w(x,t)\}$ es la solución del problema

$$
\begin{aligned}
\nu q_x + b(x,t)q &= z(a_2(x,t))g(x,t) + r(x,t)p + A(x,t)w, && (2.17)\\
p_t + r(x,t)p &= b(x,t)q - z(a_2(x,t))g(x,t) - A(x,t)w, && (2.18)\\
w_t + B(x,t)w &= c(x,t)p + \lambda b(x,t)q - \lambda z(a_2(x,t))g(x,t), && (2.19)\\
q(0,t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, && (2.20)\\
p(x,0) &= w(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, && (2.21)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
A(x,t) &= \beta_2(a_2(x,t)) \int_0^1 F'[v_2(x,t)) + \theta(v_1(x,t) - v_2(x,t))]d\theta,\\
g(x,t) &= F(v_1(x,t)) - a_1(x,t),\\
r(x,t) &= g(x,t) \int_0^1 \beta_1'[a_2(x,t) + \theta(a_1(x,t) - a_2(x,t))]d\theta,\\
b(x,t) &= \beta_2(a_2(x,t)),\\
c(x,t) &= \gamma - \lambda r(x,t),\\
B(x,t) &= \gamma + \lambda A(x,t).
\end{aligned}
$$

Integrando las ecuaciones (2.17), (2.18) con las condiciones (2.20), (2.21), obtenemos

$$
\begin{aligned}
q(x,t) = \frac{1}{\nu} &\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds\right\} z(a_2(h,t))g(h,t)dh\\
&+ \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds\right\} A(h,t)w(h,t)dh \qquad (2.22)\\
&+ \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds\right\} r(h,t)p(h,t)dh,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(x,t) = &-\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} z(a_2(x,\tau))g(x,\tau)d\tau \\
&-\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} b(x,\tau)q(x,\tau)d\tau \\
&-\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} A(x,\tau)w(x,\tau)d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Reemplazando (2.23) en (2.22) tenemos

$$
\begin{aligned}
&q(x,t) = \\
&= \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds\right\} z(a_2(h,t))g(h,t)dh \\
&\quad + \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds\right\} A(h,t)w(h,t)dh \\
&\quad - \frac{1}{\nu}\int_0^t\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds - \int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} r(h,\tau)z(a_2(h,\tau))g(h,\tau)dhd\tau \\
&\quad - \frac{1}{\nu}\int_0^t\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds - \int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} r(h,\tau)b(h,\tau)q(h,\tau)dhd\tau \\
&\quad - \frac{1}{\nu}\int_0^t\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds - \int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} r(h,\tau)A(h,\tau)w(h,\tau)dhd\tau.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Representemos por $R_1(x,t,h,\tau)$ la resolvente respecto al núcleo

$$
\frac{1}{\nu}\exp\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds - \int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\}r(h,\tau)b(h,\tau)
$$

de la ecuación de Volterra. Entonces (2.24) se puede escribir de la forma

$$
\begin{aligned}
q(x,t) &= f_1(x,t) + f_2(x,t) \\
&+ \int_0^t\int_0^x R_1(x,t,h,\tau)\left(f_1(h,\tau)+f_2(h,\tau)\right)dhd\tau,
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
f_1(x,t) = &\frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds\right\} z(a_2(h,t))g(h,t)dh \\
&-\frac{1}{\nu}\int_0^t\int_0^x H(x,h,t,\tau)r(h,\tau)z(a_2(h,\tau))g(h,\tau)dhd\tau,
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

$$\begin{aligned} f_2(x,t) = {} & \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds\right\} A(h,t)w(h,t)dh \\ & - \frac{1}{\nu}\int_0^t \int_0^x H(x,h,t,\tau) r(h,\tau) A(h,\tau) w(h,\tau) dh d\tau \end{aligned} \tag{2.27}$$

y

$$H(x,h,t,\tau) = \frac{1}{\nu}\exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds - \int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\}.$$

Reemplazando (2.25) en (2.23) obtenemos

$$\begin{aligned} p(x,t) = {} & -\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} z(a_2(x,\tau))g(x,\tau)d\tau \\ & + \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} \ f_1(x,\tau)b(x,\tau)d\tau \\ & + \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} b(x,\tau)f_2(x,\tau)d\tau \\ & + \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} b(x,\tau)\times \\ & \times \left[\int_0^t \int_0^x R_1(x,t,h,\eta)\left(f_1(h,\eta)+f_2(h,\eta)\right)dhd\eta\right] \\ & - \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} A(x,\tau)w(x,\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Cambiando el orden de integración y denotando por

$$B_1(x,h,t,\tau) = \int_\tau^t \exp\{-\int_\eta^t r(x,\theta)d\theta\} R_1(x,t,h,\eta)b(x,\eta)d\eta,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} p(x,t) = {} & -\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} z(a_2(x,\tau))g(x,\tau)d\tau \\ & + \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} \ f_1(x,\tau)b(x,\tau)d\tau \\ & + \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} b(x,\tau)f_2(x,\tau)d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^x B_1(x,t,h,\tau)\left(f_1(h,\tau)+f_2(h,\tau)\right)dhd\tau \\ & - \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t r(x,\theta)d\theta\right\} A(x,\tau)w(x,\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Reemplazando (2.25) y (2.29) en (2.19), e integrando y haciendo los respectivos cambios de variables de integración, tenemos la siguiente ecuación para la función $w(x,t)$:

$$
\begin{aligned}
&w(x,t) = \\
&= \int_0^t g_1(x,t,\tau)g(x,\tau)z(a_2(x,\tau))d\tau + \int_0^t g_1(x,t,\tau)b(x,\tau)f_1(x,\tau)d\tau \\
&\quad + \int_0^t g_1(x,t,\tau)b(x,\tau)f_2(x,\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^x g_2(x,t,\xi,\tau)f_1(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^x g_2(x,t,\xi,\tau)f_1(\xi,\tau)d\xi d\tau - \int_0^t g_1(x,t,\tau)A(x,\tau)w(x,\tau)d\tau \\
&\quad - \lambda \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t B(x,\theta)d\theta\right\} z(a_2(x,\tau))g(x,\tau)d\tau \\
&\quad + \lambda \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t B(x,\theta)d\theta\right\} b(x,\tau)f_1(x,\tau)d\tau \\
&\quad + \lambda \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t B(x,\theta)d\theta\right\} b(x,\tau)f_2(x,\tau)d\tau,
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

donde

$$
g_1(x,t,\tau) = \int_\tau^t \exp\left\{-\int_\eta^t B(x,\theta)d\theta\right\} \exp\left\{-\int_\tau^\eta r(x,\theta)d\theta\right\} c(x,\eta)d\eta,
$$

$$
g_2(x,t,\xi,\tau) = \int_\tau^t \exp\left\{-\int_\eta^t B(x,\theta)d\theta\right\} \left[c(x,\eta)B_1(x,t,\xi,\tau) + \lambda b(x,\eta)R_1\right] d\eta.
$$

Reemplazando (2.27) en (2.30), tenemos:

$$
\begin{aligned}
&w(x,t) = \\
&= G_1(x,t) + \int_0^t g_3(x,t,\tau)b(x,\tau) \times \left[-\int_0^t \int_0^x H(x,\tau,\xi,\theta)r(\xi,\theta)\times\right. \\
&\quad \left. \times A(\xi,\theta)w(\xi,\theta)d\xi d\theta + \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^x b(s,\tau)ds\right\} A(\xi,\tau)w(\xi,\tau)d\xi\right] d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^x h_1(x,t,\xi,\tau) \times \left[\int_0^\xi \int_0^\tau H(\xi,\kappa,\tau,\theta)r(\kappa,\theta)A(\kappa,\theta)w(\kappa,\theta)d\theta d\kappa\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\upsilon}\int_0^\xi \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\kappa^\xi b(s,\tau)ds\right\} A(\kappa,\tau)w(x,\tau)d\kappa\right] d\tau d\xi \\
&\quad - \int_0^t g_1(x,t,\tau)A(x,\tau)w(x,\tau)d\tau,
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

donde

$$g_3(x,t,\tau) = g_1(x,t,\tau) + \lambda \exp\left\{-\int_\tau^t B(x,\theta)d\theta\right\},$$
$$h_1(x,t,\xi,\tau) = g_2(x,t,\xi,\tau) + \lambda \exp\left\{-\int_\tau^t B(x,\theta)d\theta\right\}$$

y

$$\begin{aligned}
&G_1(x,t) = \\
&= \int_0^t g_3(x,t,\tau)g(x,\tau)z(a_2(x,\tau))d\tau + \int_0^t g_3(x,t,\tau)b(x,\tau)f_1(x,\tau)d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^x h_1(x,t,\xi,\tau)f_1(\xi,\tau)d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Cambiando los órdenes de integración en la anterior expresión obtenemos

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = G_1(x,t) - \\
&\quad - \int_0^t \int_0^x \left[\int_\theta^t H(x,\tau,\xi,\theta)r(\xi,\theta)A(\xi,\theta)g_3(x,t,\tau)b(x,\tau)d\tau\right] w(\xi,\theta)d\xi d\theta \\
&\quad + \frac{1}{\nu}\int_0^t \int_0^x g_3(x,t,\tau)b(x,\tau)\exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^x b(s,\tau)ds\right\} A(\xi,\tau)w(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^x \left[\int_\kappa^x \int_\theta^t H(\xi,\kappa,\tau,\theta)h_1(x,t,\xi,\tau)r(\kappa,\theta)d\tau d\xi\right] A(\kappa,\theta)w(\kappa,\theta)d\theta d\kappa \\
&\quad + \frac{1}{\upsilon}\int_0^x \int_0^t \left[\int_\kappa^x h_1(x,t,\xi,\tau)\exp\{-\frac{1}{\nu}\int_\kappa^\xi b(s,\tau)ds\}d\xi\right] A(\kappa,\tau)w(x,\tau)d\tau d\kappa \\
&\quad - \int_0^t g_1(x,t,\tau)A(x,\tau)w(x,\tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

En forma final podemos escribir

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = \\
&= G_1(x,t) + \int_0^t \int_0^x B_2(x,t,\xi,\tau)r(\xi,\theta)A(\xi,\tau)w(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
&\quad - \int_0^t g_1(x,t,\tau)A(x,\tau)w(x,\tau)d\tau,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

donde

$$
\begin{aligned}
&B_2(x,t,\xi,\tau) = \\
&= -\int_\tau^t H(x,\tau,\xi,\theta)r(\xi,\tau)g_3(x,t,\theta)b(x,\theta)d\theta \\
&\quad + \frac{1}{\nu}g_3(x,t,\tau)b(x,\tau)\exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^x b(s,\tau)ds\right\} \\
&\quad - \int_\xi^x \int_\tau^t H(\kappa,\theta,\xi,\tau)h_1(x,t,\xi,\theta)r(\kappa,\theta)d\theta d\kappa \\
&\quad + \frac{1}{\upsilon}\int_\xi^x h_1(x,t,\kappa,\tau)\exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\kappa^\xi b(s,\tau)ds\right\}d\kappa
\end{aligned}
$$

Usando la resolvente del núcleo $-g_1(x,t,\tau)A(x,\tau)$, llamada $R_2(x,t,\tau)$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&w(x,t) = \\
&= G_1(x,t) + \int_0^t R_2(x,t,\tau)G_1(x,t)d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^x B_2(x,t,\xi,\tau)A(\xi,\tau)w(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
&\quad + \int_0^t \left[R_2(x,t,\tau)\int_0^\tau \int_0^x B_2(x,t,\xi,\theta)A(\xi,\theta)w(\xi,\theta)d\xi d\theta\right]d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Cambiando el orden de integración en la última integral de la ecuación anterior tenemos:

$$
\begin{aligned}
&w(x,t) = \\
&= G_1(x,t) + \int_0^t R_2(x,t,\tau)G_1(x,\tau)d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^x B_2(x,t,\xi,\tau)A(\xi,\tau)w(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^x \int_\tau^t R_2(x,t,\tau)B_2(x,\xi,t,\theta)w(\xi,\theta)d\theta d\xi d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

De aquí, haciendo

$$
B_3(x,t,\xi,\tau) = B_2(x,t,\xi,\tau)A(\xi,\tau) + A(\xi,\tau)\int_\tau^t R_2(x,t,\theta)B_2(x,\theta,\xi,\tau)d\theta,
$$

se obtiene

$$
\begin{aligned}
w(x,t) = G_1(x,t) + \int_0^t R_2(x,t,\tau)G_1(x,\tau)d\tau \\
+ \int_0^t \int_0^x B_3(x,t,\xi,\tau)w(\xi,\tau)d\xi d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Resolviendo la ecuación (2.36) con ayuda de la resolvente $R_3(x,t,\xi,\tau)$ del núcleo $B_3(x,t,\xi,\tau)$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= G_1(x,t) + \int_0^t R_2(x,t,\tau)G_1(x,\tau)d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^x R_3(x,t,\xi,\tau)G_1(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^x R_3(x,t,\xi,\tau) \int_0^\tau R_2(x,t,\theta)G_1(\xi,\theta)d\theta d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Ahora, cambiando el orden de integración en la integral triple y haciendo

$$
R_4(x,h,t,\tau) = R_3(x,t,\xi,\tau) + \int_\tau^t R_3(x,t,\xi,\theta)R_2(x,\theta,\tau)d\theta,
$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
w(x,t) = G_1(x,t) + \int_0^t R_2(x,t,\tau)G_1(x,\tau)d\tau \\
+ \int_0^t \int_0^x R_4(x,t,\xi,\tau)G_1(\xi,\tau)d\xi d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Reemplazando esta expresión en (2.27), y luego en (2.25) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&f_2(x,t) = \\
&= \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_h^x b(s,t)ds\right\} A(\xi,t) \left[G_1(\xi,t) + \int_0^t R_2(\xi,t,\tau)G_1(\xi,\tau)d\tau\right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_0^\xi R_4(\xi,t,\kappa,\tau)G_1(\kappa,\tau)d\kappa d\tau\right] d\xi \\
&\quad - \frac{1}{\nu}\int_0^t \int_0^x H(x,t,\xi,\tau)r(\xi,\tau)A(\xi,\tau) \left[G_1(\xi,\tau) + \int_0^\tau R_2(\xi,\tau,\theta)G_1(\xi,\theta)d\tau\right. \\
&\quad \left. + \int_0^\tau \int_0^\xi R_4(\xi,\tau,\kappa,\theta)G_1(\kappa,\theta)d\kappa d\theta\right] d\tau d\xi.
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Cambiando los límites de integración y denotando

$$
\begin{aligned}
B_4(x,t,\xi,\tau) = &-H(x,t,\xi,\tau)r(\xi,\tau)A(\xi,\tau) - \int_\tau^t R_2(\xi,\theta,\tau)H(x,t,\xi,\theta)\times \\
&\times r(\xi,\theta)A(\xi,\theta)d\theta - \int_\xi^x \int_\tau^t R_4(\kappa,\theta,\xi,\tau)H(x,\kappa,t,\theta)r(\kappa,\theta)\times \\
&\times A(\kappa,\theta)d\theta d\kappa + \frac{1}{\nu}\exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^x b(s,t)ds\right\}A(\xi,t)R_2(\xi,t,\tau) \\
&+ \frac{1}{\nu}\int_\xi^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^x b(s,t)ds\right\}A(\xi,t)R_4(\kappa,t,\xi,\tau)d\kappa,
\end{aligned}
$$

podemos escribir (2.38) como

$$
\begin{aligned}
f_2(x,t) = &\int_0^t \int_0^x B_4(x,t,\xi,\tau)G_1(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
&+ \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^x b(s,t)ds\right\}A(\xi,t)G_1(\xi,t)d\xi.
\end{aligned}
$$

Reemplazando el valor para $G_1(x,t)$ en la anterior expresión tenemos

$$
\begin{aligned}
&f_2(x,t) = \\
&= \int_0^t \int_0^x B_4(x,t,\xi,\tau)\left[\int_0^\tau g_3(\xi,\tau,\theta)g(\xi,\theta)z(a_2(\xi,\theta))d\theta\right. \\
&\quad + \int_0^\tau g_3(\xi,\tau,\theta)b(\xi,\theta)f_1(\xi,\theta)d\theta + \int_0^\xi \int_0^\tau h_1(\xi,\tau,\kappa,\theta)f_1(\kappa,\theta)d\theta d\kappa]d\tau d\xi \\
&\quad + \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^x b(s,t)ds\right\}A(\xi,t)\left[\int_0^t g_3(\xi,t,\tau)g(\xi,\tau)z(a_2(\xi,\tau))d\tau\right. \\
&\quad \left. + \int_0^t g_3(\xi,t,\tau)b(\xi,\tau)f_1(\xi,\tau)d\tau \int_0^\xi \int_0^t h_1(\xi,t,\kappa,\tau)f_1(\kappa,\tau)d\tau d\kappa\right]d\xi.
\end{aligned}
$$

Haciendo los cambios de variables de integración, la anterior expresión puede ser escrita de la forma

$$
\begin{aligned}
f_2(x,t) = &\int_0^t \int_0^x B_5(x,t,\xi,\tau)z(a_2(\xi,\tau))d\xi d\tau \\
&+ \int_0^t \int_0^x B_6(x,t,\xi,\tau)f_1(\xi,t)d\xi,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
B_5(x,t,\xi,\tau) = &\int_\tau^t B_4(x,t,\xi,\theta)g_3(\xi,\theta,\tau)g(\xi,\tau)d\theta \\
&+ \frac{1}{\nu}\exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^x b(s,t)ds\right\} A(\xi,t)g_3(\xi,t,\tau)g(\xi,t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_6(x,t,\xi,\tau) = &\int_\tau^t B_4(x,t,\xi,\theta)g_3(\xi,\theta,\tau)b(\xi,\tau)d\theta \\
&+ \int_\tau^t \int_\xi^x B_4(x,t,\kappa,\theta)h_1(\kappa,\theta,\xi,\tau)d\theta d\kappa \\
&+ \frac{1}{\nu}\exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^x b(s,t)ds\right\} g_3(\xi,t,\tau)b(\xi,t) \\
&+ \frac{1}{\nu}\int_\xi^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^x b(s,t)ds\right\} A(\kappa,t)h_1(\kappa,t,\xi,\tau).d\kappa
\end{aligned}
$$

Reemplazando en (2.25), tenemos

$$
\begin{aligned}
&q(x,t) = \\
&= f_1(x,t) + \int_0^x \int_0^t B_5(x,t,\xi,\tau)z(a_2(\xi,\tau))d\tau d\xi \\
&\quad + \int_0^x \int_0^t R_1(x,t,\xi,\tau)f_1(\xi,\tau)d\tau d\xi \\
&\quad + \int_0^x \int_0^t B_6(x,\xi,t,\tau)f_1(\xi,\tau)d\xi d\xi \\
&\quad + \int_0^x \int_0^t R_1(x,t,\xi,\tau)\left[\int_0^\xi \int_0^\tau B_5(\xi,\tau,\kappa,\theta)z(a_2(\kappa,\theta))d\theta d\kappa\right. \\
&\quad \left. + \int_0^\xi \int_0^\tau B_6(\xi,\tau,\kappa,\theta)f_1(\kappa,\theta)d\theta d\kappa\right] d\tau d\xi.
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Introduciendo

$$
\begin{aligned}
&B_7(x,\xi,t,\tau) = \\
&= B_5(x,\xi,t,\tau) + \int_\xi^x \int_\tau^t R_1(x,t,\kappa,\theta)B_5(\kappa,\theta,\xi,\tau)d\theta d\kappa + B_8(x,\xi,t,\tau) \\
&= R_1(x,\xi,t,\tau) + B_6(x,\xi,t,\tau) + \int_\xi^x \int_\tau^t R_1(x,t,\kappa,\theta)B_6(\kappa,\theta,\xi,\tau)d\theta d\kappa,
\end{aligned}
$$

y cambiando el orden de integración en (2.39), tenemos

$$\begin{aligned} q(x,t) = f_1(x,t) + \int_0^x \int_0^t B_7(x,t,\xi,\tau) z(a_2(\xi,\tau)) d\tau d\xi \\ + \int_0^x \int_0^t B_8(x,\xi,t,\tau) f_1(\xi,\tau) d\tau d\xi. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Por último se reemplaza (2.26) en (2.40):

$$\begin{aligned} q(x,t) = &\frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^x b(s,t)ds\right\} z(a_2(\xi,t))g(\xi,t)d\xi \\ &- \frac{1}{\nu}\int_0^t \int_0^x H(x,\xi,t,\tau) r(\xi,\tau) z(a_2(\xi,\tau)) g(\xi,\tau) d\xi d\tau \\ &+ \int_0^x \int_0^t B_7(x,t,\xi,\tau) z(a_2(\xi,\tau)) d\tau d\xi \\ &+ \int_0^x \int_0^t B_8(x,\xi,t,\tau) \left[\frac{1}{\nu}\int_0^\xi \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\kappa^\xi b(s,\tau)ds\right\} z(a_2(\kappa,\tau))g(\kappa,\tau)d\kappa \right. \\ &\left. + \frac{1}{\nu}\int_0^\tau \int_0^\xi H(\xi,\tau,\kappa,\theta) r(\kappa,\theta) z(a_2(\kappa,\theta)) g(\kappa,\theta) d\kappa d\theta \right] d\tau d\xi; \end{aligned}$$

realizando los cambios de variables tenemos

$$\begin{aligned} q(x,t) = \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_0^x r(s,t)ds\right\} z(a_2(\xi,\tau))g(\xi,\tau)d\xi \\ + \int_0^x \int_0^t B_9(x,\xi,t,\tau) z(a_2(\xi,\tau)) g(\xi,\tau) d\tau d\xi, \end{aligned} \tag{2.41}$$

donde

$$\begin{aligned} B_9(x,\xi,t,\tau) = &-\frac{1}{\nu} H(x,\xi,t,\tau) r(\xi,\tau) + B_7(x,t,\xi,\tau) \\ &+ \frac{1}{\nu}\int_\xi^x B_8(x,t,\kappa,\tau) \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_\xi^\kappa b(s,\tau)ds\right\} d\kappa \\ &- \frac{1}{\nu}\int_\tau^t \int_\xi^x B_8(x,t,\kappa,\theta) H(\kappa,\theta,\xi,\tau) r(\xi,\tau)] d\kappa d\theta. \end{aligned}$$

Haciendo en esta igualdad $x = l$ y teniendo la condición (2.8), tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{\nu}\int_0^l \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_0^l r(s,t)ds\right\} z(a_2(\xi,\tau))g(\xi,t)d\xi \\ + \int_0^l \int_0^t B_{10}(\xi,t,\tau) z(a_2(\xi,\tau)) g(\xi,\tau) d\tau d\xi, \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde la función

$$B_{10}(\xi,t,\tau)=B_9(l,\xi,t,\tau)$$

tiene primeras derivadas parciales continuas para $\xi\in[0,l]$, $0\le\tau\le t\le T$.

Definamos la magnitud T_0 como la raíz de la ecuación $a_2(0,T_0)=\varepsilon$. Puesto que en Q_{l,T_o} se cumple la desigualdad $0\le a_2(x,t)<a_2(0,T_0)=\varepsilon$ para $0\le x\le l$, y $t\in[0,T_0]$, entonces $z(a_2(x,t))=0$ para $(x,t)\in Q_{l,T_0}$, por lo tanto en (2.42) tenemos

$$\begin{aligned}0=&\int_0^l h(l,\xi,t)z\left(a_2(\xi,t)\right)d\xi\\&+\int_{T_0}^t\int_0^l B(\xi,t,\tau)z\left(a_2(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau,\quad t\in[T_0,T],\end{aligned}\tag{2.43}$$

donde

$$\begin{aligned}h(l,\xi,t)&=\frac{1}{\nu}\exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_0^l r(s,t)ds\right\}g(\xi,t),\\B(\xi,t,\tau)&=B_{10}(\xi,t,\tau)g(\xi,\tau).\end{aligned}$$

De la desigualdad (2.10) para la función $a_2(x,t)$ se desprende que para cualquier $t\in(0,T]$ la función $a_2(x,t)$ decrece monótonamente respecto a x. Haciendo en la primera integral que aparece en (2.43) el cambio de variable $\eta=a_2(\xi,t)$, obtenemos

$$\begin{aligned}0=&\int_{a_2(l,t)}^{a_2(0,t)} h(l,y(\eta,t),t)z(\eta)\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}(y(\eta,t),t)\right)^{-1}d\eta\\&+\int_{t_0}^t\int_{a_2(l,t)}^{a_2(0,t)} B(y(\eta,t),t,\tau)z(a_2(\eta)\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}(y(\eta,t),t)\right)^{-1}d\xi d\tau,\\&\quad T_0\le t\le T,\end{aligned}\tag{2.44}$$

donde $y(\eta,t)$ es la función inversa a $a_2(\xi,t)$.

Tomemos como T_1 la raíz de la ecuación $a_2(l,t)=a_2(0,T_0)$. Empleando la igualdad a cero de la función $z(\ \xi)=0$ para $\xi\in[0,a_2(0,T_0)]$, e introduciendo la variable $\theta=a_2(0,t)$, obtenemos la ecuación

$$\int_{a_2(0,T_0)}^{\theta} N(\theta,\eta)z(\eta)d\eta=0,\quad \theta\in[a_2(0,T_0),a_2(0,T_1),\tag{2.45}$$

donde

$$N(\theta,\eta) = h(l, y(\eta,t), a_2^{-1}(\theta)) \left(\frac{\partial a_2}{\partial x}(y(\eta,t), a_2^{-1}(\theta))\right)^{-1} + \int_{T_0}^{t} B(y(\eta,t), a_2^{-1}(\theta), \tau) \left(\frac{\partial a_2}{\partial x}(y(\eta,t), a_2^{-1}(\theta))\right)^{-1}.$$

La ecuación (2.45) es una ecuación de Volterra de primera clase. Derivando (2.45) respecto a θ y teniendo en cuenta que la función $N(\theta,\eta)$ tiene primera derivada continua respecto a θ, tenemos una ecuación de Volterra de segunda clase para la función $z(\eta)$.

Por consiguiente

$$z(\xi) = 0, \text{ cuando } \xi \in [a_2(0,T_0), a_2(0,T_1)].$$

Definiendo la magnitud T_2 como la raíz de la ecuación $a_2(l,t) = a_2(0,T_1)$ en el caso $a_2(0,T_1) < a_2(l,T)$ y tomando $T_2 = T$ para $a_2(0,T_1) \geq a_2(l,T)$, análogamente como se hizo anteriormente obtenemos que $z(\xi) = 0$ para $\xi \in [0, a_2(0,T_2)]$. Puesto que $a_x(x,t) \leq \text{const} < 0$ para $0 \leq x \leq l$, $T_0 \leq t \leq T$, entonces continuando con el proceso semejante obtenemos en un número finito de pasos que $z(\xi) = 0$ para $\xi \in [0, a_2(0,T)]$. En virtud que en Q_T se cumple la desigualdad $0 \leq a_2(x,t) \leq a_2(0,T)$, entonces $z(a_2(x,t)) = 0$ en Q_T, y de (2.41) obtenemos que $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ en Q_T. De esta igualdad y de la ecuación (2.37) obtenemos que $v_1(x,t) = v_2(x,t)$ en Q_T. De la representación para $p(x,t)$ y $z(a_2(x,t)) = 0$, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $v_1(x,t) = v_2(x,t)$ en Q_T, se desprende que $a_1(x,t) = a_2(x,t)$ en Q_T. ∎

Referencias

[1] Cannon J.R., Du Chatean P. "An inverse problem for an unknown source in a heat equation". *J. of Math. Anal. and App.*, 1980, (75), 465–485.

[2] Cannon J.R., Du Chatean P. "An inverse problem for a nonlinear diffusion equations". *SIAM J. Appl. Math.*, 1980, (39),272–289.

[3] Anger G. *Inverse Problems in Differential Equations.* Akademie–Verlag, Berlin, 1990. Plenum Press.

[4] Denisov A. M., *Local and global uniqueness of solution to the problem of determining a nonlinear coefficient in a system of partial differential equations. Siberian Mathematical Journal.* 1995, **v. 36(1)**, p. 55–65.

[5] Lorenzi A. "An inverse problem for a semilinear parabolic equation". *Annali de Mat. Pura ed Applicata*, 1982, **v. 31**, p. 145–166.

[6] Lamos H., Denisov A. M. *An inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed-diffusional kinetics. J. Inv ill–posed problems*, 1996, **v. 4(3)**, p. 191–202.

[7] Lamos H. "Numerical solution of the inverse problem for a nolinear mathematical model of sorption dynamics with mixed–diffusional kinetics". *Inverse and Ill–Posed Problems* (Abstracts of International conference dedicated to the memory of academician A. N. Tikhonov). Moscow, 1996, 113.

[8] Denisov A.M. and Lamos H . "The problem of determinig the kinetic Coefficient in mathematical model of sorption dynamics". *Computational Mathematics and Modeling*, 1999, **v. 10(3)**, p. 207–213.