Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 16, No 2, p. 55–65, julio–diciembre de 1998

Geometría de la unión de dos regiones elípticas secantes mutuamente simétricas

Luis Enrique Ruiz Hernández*

Resumen

Dada una elipse $\mathcal{E}$ en $\mathbb{R}^2$ de centro G, con el origen $\mathbf{0} \neq G$ en su región interior, se estudia la geometría de la unión $conv(-\mathcal{E}) \cup conv(\mathcal{E})$, donde $conv(\mathcal{E})$ denota la envolvente convexa de $\mathcal{E}$. El modelo matemático que la describe y unifica involucra una función no convexa $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en cuya representación está implicada una matriz simétrica no singular de orden dos, como también una matriz simétrica positivamente definida del mismo orden. En particular se investiga el caso cuando $\mathcal{E}$ es una circunferencia.

Introducción

Los trasladados de una elipse $\mathcal{E}$ en $\mathbb{R}^2$ de centro G son comunes en geometría; específicamente, si el traslado es $-\mathcal{E}$, la reflexión simétrica de $\mathcal{E}$ a través del origen $\mathbf{0} \neq G$, de tal manera que $-\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ son figuras secantes con $\mathbf{0}$ en su interior (ver figura 1.1). La equivalencia $P \in \mathcal{E}$ si y solo si $2G - P \in \mathcal{E}$ implica la veracidad de la relación $-\mathcal{E} = -2G + \mathcal{E}$; por esto $-\mathcal{E}$ es, en efecto, un traslado de $\mathcal{E}$.

En el presente trabajo emprenderemos la geometría de la figura no convexa $C = conv(-\mathcal{E}) \cup conv(\mathcal{E})$, donde $conv(\mathcal{E})$ denota la envolvente convexa de $\mathcal{E}$, en este caso la unión de $\mathcal{E}$ con su región interior. A partir de una matriz simétrica 2×2 no singular y un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ se construye una función no convexa $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\Psi^{-1}([0, r])$ es una región del tipo C, para cada $r \in (0, 1)$.

*Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama, Boyacá, COLOMBIA.

En la literatura sobre figuras planas notables no convexas hay una carencia alarmante de tales funciones no convexas que las describan como conjuntos de nivel. Es un enorme vacío que está por repararse en la geometría plana, en honor a una visión contemporánea allende el tradicional enfoque euclídeo o cartesiano de las mencionadas figuras.

Bajo esta consigna la metodología aquí desarrollada es una trama de nociones relevantes de Álgebra Lineal y Análisis Convexo, algunas de las cuales tienen una contundente e inesperada presencia.

La concepción de Ψ permite una geometría unificadora de la región C minuciosamente expuesta en el Teorema 1.1 En el Corolario 2.1 se investiga en particular el caso cuando $\mathcal{E}$ es una circunferencia, animándolo con una ilustración.

Denotaremos con letra imprenta mayúscula los puntos o vectores (fila) de $\mathbb{R}^2$, y por Q^T la traspuesta de una matriz Q. En particular, el producto matricial AB^T indicará el producto interior usual de dos vectores A y B en $\mathbb{R}^2$. Además, para cada $A = (a_1, a_2)$ en $\mathbb{R}^2$ definimos $A^* = (a_2, -a_1)$, la rotación de A alrededor del ángulo $-\frac{\pi}{2}$. Serán utilizadas muy a menudo, sin mencionarlo expresamente, las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ll} A(A^*)^T = 0, & (A^*)^* = -A, \\ ||A^*|| = ||A||, & A^*(B^*)^T = AB^T, \\ \det(A, B) = A(B^*)^T = -A^*B^T, & (AQ)^* = (\det Q)A^*Q^{-1}, \end{array}$$

donde Q es una matriz invertible 2×2.

El Teorema 1.1 y el Corolario 2.1, así como la ilustración 2.1, consignados en la presente investigación constituyen resultados nuevos en el campo del análisis convexo.

1. Una unión no disjunta de dos regiones elípticas mutuamente simétricas

Teorema 1.1. *Sean dados Q una matriz simétrica no singular de orden dos, $A = (a_1, a_2)$ un vector unitario en $\mathbb{R}^2$, y la función $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ representada por*

$$\Psi = \frac{||XQ||}{1 + |XQA^T|} \tag{1.1}$$

para todo $X \in \mathbb{R}^2$.

Sea $\mathcal{E}$ la elipse de centro $G = cAQ^{-1}$ y ecuación matricial

$$(X - G)QLQ(X - G)^T = c, \tag{1.2}$$

y $-\mathcal{E}$ la elipse de centro $-G$ representada por

$$(X + G)QLQ(X + G)^T = c, \tag{1.3}$$

donde

$$c = \frac{r^2}{1 - r^2}, \quad 0 < r < 1,$$

y

$$L = \begin{pmatrix} 1 - a_1^2 r^2 & -a_1 a_2 r^2 \\ -a_1 a_2 r^2 & 1 - a_2^2 r^2 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

es una matriz simétrica, positivamente definida. Entonces:

(*i*) *El origen* $\mathbf{0}$ *es un punto interior de conv$(-\mathcal{E}) \cap$ conv$(\mathcal{E})$, donde conv$(\mathcal{E})$ denota la* ***envolvente convexa de*** $\mathcal{E}$.

(*ii*) $-\mathcal{E}$ *y* $\mathcal{E}$ *son mutuamente simétricas con respecto a* $\mathbf{0}$.

(*iii*) $-\mathcal{E}$ *y* $\mathcal{E}$ *se intersecan en los puntos* $\pm\, rA^*Q^{-1}$ *sobre la recta*

$$XQA^T = 0.$$

(*iv*) *Si $\mathcal{L}_i$ es la recta*

$$A^*QX^T = (-1)^i \sqrt{c}, \tag{1.5}$$

y $\mathcal{L}'_j$ la recta

$$XQA^T = \frac{r}{1 - r}(-1)^{j+1}, \tag{1.6}$$

entonces $\mathcal{L}_i$ y $\mathcal{L}'_j$ son tangentes a $(-1)^{j+1}\mathcal{E}$ en los puntos

$$V_{ij} = \{(-1)^{j+1} cA + (-1)^i \sqrt{c} A^*\} Q^{-1} \tag{1.7}$$

y

$$T_j = (-1)^{j+1} AQ^{-1}, \tag{1.8}$$

respectivamente, para todo $i, j = 1, 2$.

(*v*) *Si*

$$C = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi(X) \leq \ r\},$$

entonces

$$C = conv(-\mathcal{E}) \cup conv(\mathcal{E}).$$

(*vi*) *Si* $F_r(C)$ *denota la frontera de* C*, entonces*

$$\begin{aligned} F_r(C) &= \\ &= \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi(X) = r\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{2} \big\{ \textit{Arco de la elipse } (-1)^{j+1}\mathcal{E} \textit{ de extremos} \\ &\qquad \pm r A^* Q^{-1}, \textit{ através de } T_j \big\} \end{aligned}$$

(*ver figura* 1,1).

La unión de las regiones elípticas acotadas por $\pm\mathcal{E}$ *es el conjunto de nivel*

$$C = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi(X) \leq r\}.$$

Figura 1.1: La unión de las regiones elípticas acotadas por $\pm\mathcal{E}$ es el conjunto de nivel $C = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi(X) \leq r\}$.

Demostración. Las restricciones $0 < r < 1$ y $a_1^2 \leq ||A||^2$ implican $1 - a_1^2 r^2 > 0$ y $\det L = 1 - r^2 > 0$, donde L es la matriz simétrica en (1.4). Es decir, L es, en efecto, positivamente definida, por lo cual existe una matriz no singular W tal que $L = WW^T$, y así $QLQ = (QW)(QW)^T$ es también positivamente definida [3, p. 282]; las ecuaciones en (1.2) y (1.3) representan elipses de centro G y $-G$, respectivamente [3, p. 282–285].

Puesto que

$$(X+G)QLQ(X+G)^T = (-X-G)QLQ(-X-G)^T,$$

entonces

$$-\mathcal{E} = \{-X \mid X \in \mathcal{E}\},$$

esto es, $-\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ son mutuamente simétricas con respecto al origen $\mathbf{0}$.

Si φ es la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(X) = \sqrt{XQLQX^T}$$

para todo $X \in \mathbb{R}^2$, entonces φ es una norma sobre $\mathbb{R}^2$ [1, p. 248, sec. 9.5]. Así, $conv((-1)^{j+1}\mathcal{E})$ es una esfera cerrada [2, p. 158, Theorem 17.2] de radio $\sqrt{c}$ y centro $(-1)^{j+1}G$, $j = 1, 2$, respecto a la norma φ.

Por lo tanto, notando que A y A^* son vectores propios (ortonormales) de L correspondientes a los valores propios $1 - r^2$ y 1, respectivamente,

$$\mathbf{0} \in int(conv((-1)^{j+1}\mathcal{E})) = \left\{X \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(X - (-1)^{j+1}G) < \sqrt{c}\right\}$$

y

$$F_r(conv((-1)^{j+1}\mathcal{E})) = (-1)^{j+1}\mathcal{E},$$

para todo $j = 1, 2$ ([2, p. 59, corollary 7.6.1]).

Es sencillo confirmar que los puntos $\pm\, rA^*Q^{-1}$ satisfacen (1.2) y (1.3), y que están en la recta $XQA^T = 0$. Sean Q_1 y Q_2 la primera y segunda filas de Q, y hagamos $\lambda = \det Q$. Se sigue de (1.2) y (1.3) que la elipse $(-1)^{j+1}\mathcal{E}$ tiene ecuación

$$\left\{X - (-1)^{j+1}G\right\}QLQ\left\{X - (-1)^{j+1}G\right\}T = c,$$

en la cual, expandiendo (laboriosamente) la forma cuadrática y derivando implícitamente con respecto a x_1, hallamos

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\left(Q_1LQ_1^T, Q_1LQ_2^T\right)\left\{X - (-1)^{j+1}G\right\}^T}{\left(Q_1LQ_2^T, Q_2LQ_2^T\right)\left\{X - (-1)^{j+1}G\right\}^T},$$

la pendiente de la tangente a $(-1)^{j+1}\mathcal{E}$ en el punto $X = (x_1, x_2)$, para todo $j = 1, 2$. A la luz de esta expresión se sigue que las tangentes a $(-1)^{j+1}\mathcal{E}$ en los puntos V_{ij} y T_j, definidos en (1.7) y (1.8), son, justamente, las rectas $\mathcal{L}_i$ y $\mathcal{L}'_j$, respectivamente, para todo $i, j = 1, 2$ (ver la figura 1.1).

Las anteriores afirmaciones se verifican usando las relaciones

$$A^*Q^{-1} = \lambda^{-1}(AQ)^* = \lambda^{-1}(AQ_2^T, -AQ_1^T)$$

y

$$Q_1^T AQ_2^T - Q_2^T AQ_1^T = \lambda(A^*)^T,$$

y expresando escalarmente (1.5) y (1.6), de lo cual aparece que $\mathcal{L}_i$ y $\mathcal{L}'_j$ tienen pendientes

$$-\frac{A^*Q_1^T}{A^*Q_2^T} \quad \text{y} \quad -\frac{AQ_1^T}{AQ_2^T},$$

respectivamente.

Directamente podemos probar la relación

$$\begin{aligned} &||XQ||^2 - r^2\{1 + (-1)^{j+1}XQA^T\}^2 = \\ &= \left\{X - (-1)^{j+1}G\right\} QLQ\{X - (-1)^{j+1}G\}^T - c, \end{aligned} \tag{1.9}$$

para todo $X \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$. En esta expresión nos basaremos para probar seguidamente las partes (v) y (vi) del Teorema 1.1

Si $X \in C$ entonces

$$||XQ|| \leq r\{1 + |XQA^T|\}$$

por (1.1), o bien,

$$||XQ||^2 \leq r^2\{1 + |XQA^T|\}^2. \tag{1.10}$$

Si $XQA^T \leq 0$ entonces, por (1.9) y (1.10),

$$\begin{aligned} ||XQ||^2 - r^2\{1 + |XQA^T|\}^2 &= ||XQ||^2 - r^2\{1 + XQA^T\}^2 \\ &= ||XQ||^2 - r^2\{1 + (-1)^{1+1}XQA^T\}^2 \\ &= (X - G)QLQ(X - G)^T - c \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

de donde $X \in conv(\mathcal{E})$.

Si $XQA^T \geq 0$ entonces, por (1.9) y (1.10),

$$\begin{aligned} ||XQ||^2 - r^2\{1 + |XQA^T|\}^2 &= ||XQ||^2 - r^2\{1 + (-1)^{2+1}XQA^T\}^2 \\ &= (X + G)QLQ(X + G)^T - c \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

de donde $X \in conv(-\mathcal{E})$. Concluimos la contenencia

$$C \subseteq \bigcup_{j=1}^{2} conv((-1)^{j+1}\mathcal{E}).$$

Recíprocamente, si

$$X \in \bigcup_{j=1}^{2} conv((-1)^{j+1}\mathcal{E}),$$

entonces, por (1.9),

$$\begin{aligned} &||XQ||^2 - r^2\{1 + (-1)^{j+1}XQA^T\}^2 = \\ &\quad = \{X - (-1)^{j+1}G\}QLQ\{X - (-1)^{j+1}G\}^T - c \\ &\quad \leq 0, \end{aligned}$$

$j = 1, 2$, por lo cual

$$||XQ|| \leq r|1 + (-1)^{j+1}XQA^T| \leq r\{1 + |XQA^T|\},$$

es decir, $X \in C$. Por lo tanto

$$\bigcup_{j=1}^{2} conv((-1)^{j+1}\mathcal{E}) \subseteq C.$$

Finalmente probaremos la parte (vi):

$$\begin{aligned} &\{X \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi(X) = r\} = \\ &\quad = \{X \mid ||XQ|| = r\{1 + |XQA^T|\} \\ &\quad = \{X \mid ||XQ||^2 - r^2\{1 + |XQA^T|\}^2 = 0\} \\ &\quad = \{X \mid XQA^T \geq 0 \wedge ||XQ||^2 - r^2\{1 + XQA^T\}^2 = 0\} \\ &\quad = \{X \mid XQA^T \leq 0 \wedge ||XQ||^2 - r^2\{1 - XQA^T\}^2 = 0\} \\ &\qquad \cup\{X \mid XQA^T \geq 0 \wedge X \in \mathcal{E}\} \cup \{X \mid XQA^T \leq 0 \wedge X \in -\mathcal{E}\} \quad \text{(por (1.9)} \\ &\quad = \bigcup_{j=1}^{2}\{X \mid (-1)^{j+1}XQA^T \geq 0 \wedge X \in (-1)^{j+1}\mathcal{E}\} \\ &\quad = \bigcup_{j=1}^{2}\{\text{Arco de la elipse } (-1)^{j+1}\mathcal{E} \text{ de extremos } \pm\ rA^*Q^{-1}, \text{ a través de } Tj\} \\ &\qquad\quad \text{(por } (iii) \text{ y } (1.8)) \\ &\quad = F_r\,(conv(-\mathcal{E}) \cup conv(\mathcal{E})) \\ &\quad = F_r(C) \end{aligned}$$

(ver la figura 1.1). ∎

2. El caso de dos regiones circulares congruentes y secantes

Dada su frecuente presencia e importancia en la geometría, trataremos a continuación el caso cuando $\mathcal{E}$ es una circunferencia

Corolario 2.1. *Si $A = (a_1, a_2)$ es un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ y $\rho > 0$, consideremos la siguiente matriz simétrica, positivamente definida,*

$$Q = \begin{pmatrix} a_1^2\sqrt{\rho^2+1} + a_1^2 & a_1 a_2\left(\sqrt{\rho^2+1} - 1\right) \\ a_1 a_2\left(\sqrt{\rho^2+1} - 1\right) & a_2^2\sqrt{\rho^2+1} + a_1^2 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

y la función $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ representada por

$$\Psi(X) = \frac{||XQ||}{1 + \sqrt{\rho^2+1}\,|XA^T|}, \tag{2.2}$$

para todo $X \in \mathbb{R}^2$.
Sea $\mathcal{P}$ la circunferencia de radio ρ y centro

$$G = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}}A, \tag{2.3}$$

y $-\mathcal{P}$ su reflexión simétrica a través del origen $\mathbf{0}$, esto es, $-\mathcal{P}$ es la circunferencia de radio ρ y centro $-G$.
Entonces

(i) $\mathbf{0} \in int(conv(-\mathcal{P}) \cap conv(\mathcal{P}))$.

(ii) *$-\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ se intersecan en los puntos*

$$\pm\ \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}}A^*. \tag{2.4}$$

(iii) *Si $\mathcal{L}_i$ es la recta*

$$A^*X^T = (-1)^i\rho,$$

y $\mathcal{L}'_j$ la recta

$$AX^T = (-1)^{j+1}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}}(\sqrt{\rho^2+1} + \rho),$$

entonces $\mathcal{L}_i$ *y* $\mathcal{L}'_j$ *son tangentes a* $(-1)^{j+1}\mathcal{P}$ *en los puntos*

$$V_{ij} = \rho\left\{(-1)^{j+1}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}}A + (-1)^i A^*\right\}$$

y

$$T_j = (-1)^{j+1}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}}(\sqrt{\rho^2+1}+\rho)A,$$

respectivamente, para todo $i, j = 1, 2$.

(*iv*) *Si*

$$C = \left\{X \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi(X) \leq \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}}\right\}, \tag{2.5}$$

entonces

$$C = conv(-\mathcal{P}) \cup conv(\mathcal{P}).$$

(*v*) *Si* $F_r(C)$ *denota la frontera de* C, *entonces*

$$\begin{aligned} F_r(C) &= \\ &= \left\{X \in R^2 \mid \Psi(X) \leq \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}}\right\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{2}\left\{\text{Arco de la circunferencia } (-1)^{j+1}\mathcal{P} \text{ de extremos}\right. \\ &\qquad \left.\pm\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}}A^*, \text{ a través de } T_j\right\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

(*ver la figura* 2,1).

Demostración. Puede comprobarse que 1 y $\sqrt{\rho^2+1}$ son los valores propios de la matriz simétrica (2.1), a los cuales corresponden los vectores propios ortonormales A^* y A, respectivamente, propiedades que hacen de Q una matriz positivamente definida [3, p. 279]. Por esto la función $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en (1.1) tiene, en este caso, la representación dada en (2.2), para todo $X \in \mathbb{R}^2$.

Además, de acuerdo con el teorema 1.1, si hacemos

$$r = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}},$$

Figura 2.1: Las circunferencias $\mathcal{P}$ y $-\mathcal{P}$ se reflejan mutuamente respecto al origen $\mathbf{0}$.

entonces obtenemos $c = \rho^2$, y en (1.4), además,

$$L = \frac{1}{1+\rho^2}\begin{pmatrix} 1 + a_2^2\rho^2 & -a_1a_2\rho^2 \\ -a_1a_2\rho^2 & 1 + a_1^2\rho^2 \end{pmatrix} = Q^{-2}.$$

El punto G en (2.3) satisface $G = cAQ^{-1}$, y las ecuaciones en (1.2) y (1.3) adoptan las formas

$$||X - G|| = \rho \quad \text{y} \quad ||X - (-G)|| = \rho,$$

respectivamente, expresiones que describen, justamente, las circunferencias $\mathcal{P}$ y $-\mathcal{P}$.

Así hemos verificado que las hipótesis del Corolario 2 se traducen fielmente a las del teorema 1.1 Se infiere que las partes (i) a (v) del Corolario 2 dimanan directamente de las partes (i), (iii), (iv), (v) y (vi) del teorema 1.1, respectivamente. ∎

2.1. Ilustración

Consideremos la circunferencia $\mathcal{P}$ de radio $\rho = 2\sqrt{2}$ y centro $G = \left(0, \frac{8}{3}\right)$. Si hacemos $A = (0, 1)$, entonces G satisface (2.3), obteniéndose, en (2.1) y (2.2),

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Psi(X) = \frac{\sqrt{x_1^2 + 9x_2^2}}{1 + 3|x_2|},$$

para todo $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, según (2.5), un punto (x_1, x_2) en $\mathbb{R}^2$ está en la región

$$C = conv(-\mathcal{P}) \cup conv(\mathcal{P})$$

si y solo si satisface

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + 9x_2^2}}{1 + 3|x_2|} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

o equivalentemente,

$$9x_1^2 + (3|x_2| - 8)^2 \leq \ 72,$$

donde $-\mathcal{P}$ es la reflexión de $\mathcal{P}$ a través del origen $\mathbf{0}$, circunferencias que se intersecan en los puntos

$$\pm\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right) \qquad \text{(por (2.4))}. \tag{2.7}$$

En particular, la ecuación cartesiana de la frontera de C es, de acuerdo con (2.6),

$$9x_1^2 + (3|x_2| - 8)^2 = 72,$$

la unión de dos arcos circulares congruentes con extremos comunes en los puntos dados por (2.7).

Referencias

[1] Greub Werner H. *Linear Algebra*, Third edition. Springer Verlag, New York, Inc., 1967.

[2] Rockafellar Ralph T. *Convex Analysis.* New Jersey, Princeton University Press, Princeton, 1972.

[3] Strang Gilbert. *Algebra lineal y sus aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano S. A., 1982.