Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 14, No 1, p. 75–83, julio–diciembre de 1996

Un concepto de testor para cualquier función de analogía con imagen en un conjunto totalmente ordenado

EDUARDO ALBA–CABRERA*

Resumen

El concepto de testor surge a finales de la década de los 50 asociado a la detección de desperfectos en circuitos lógicos. En la década de los 60 Zhuravliov adapta el concepto de testor a la solución de algunos problemas de Reconocimiento de Patrones.

En el concepto original de testor y el introducido por Zhuravliov se encuentra implicita una función de analogía entre patrones. En ambos conceptos esta función es la igualdad simple. De ahí que para poder hallar el conjunto de todos los testores típicos en uno de estos problemas utilizando una única función de semejanza sea necesario extender el concepto de testor a cualquier función de semejanza. En esta dirección se han dado algunos resultados parciales pero que se limitan a los casos en que la función de semejanza es booleana.

El objetivo fundamental de este trabajo es introducir una nueva definición de testor (típico) para cualquier función de analogía cuya imagen sea un conjunto ordenado, mostrar algunas de sus propiedades y demostrar que el concepto básico y todas las extensiones existentes hasta el momento son casos particulares del mismo.

Palabras claves: testor típico, función de semejanza, selección de variables, clasificación.

*Centro de Matemática y Física Teórica, Instituto de Cibernética Matemática y Física, Calle E No 309 entre 13 y 15, Vedado, c/p 10400, Ciudad Habana, CUBA. (recpat@cidet.icmf.inf.cu)

1. Introducción

El concepto de testor para una Matriz de Aprendizaje (MA) [9], según el concepto introducido por Zhuravliov [6] es un subconjunto del conjunto potencia de rasgos tal que si comparamos cualquier par de objetos de clases diferentes en esos rasgos no encontramos ninguna pareja de objetos iguales. Teniendo en cuenta que la MA sobre la cual Zhuravliov define este concepto es booleana, dos objetos son iguales en un subconjunto A de rasgos si sus respectivas subdescripciones en los rasgos de A coinciden, y son diferentes en caso contrario; y ésta es precisamente la función de analogía entre patrones implícita. Esta idea del concepto de testor es útil en muchos problemas de selección de variables y de clasificación con aprendizaje o supervisada [9, 12, 13] pero existen dos limitaciones para su aplicación:

- no en todos estos problemas las MA son necesariamente booleanas;
- no sería correcto desde el punto de vista metodológico utilizar dos criterios de analogía diferentes: uno para el concpto de testor y el que se genera naturalmente en el proceso de modelación matemática de un problema de clasificación.

Así, tratando de resolver estas limitaciones han surgido numerosas extensiones [1, 2, 3, 4, 7, 11] del concepto original de testor, y hasta generalizaciones bastante amplias donde la función de semejanza puede ser cualquier función de semejanza booleana [8].

Si nos basamos en la generalización dada por Lazo vemos que para determinar cuándo un conjunto de rasgos es testor y cuándo no, necesitamos a priori definir tres aspectos o parámetros:

- De qué manera vamos a comparar un par de objetos en un subconjunto de rasgos, es decir, debemos definir una función de analogía parcial, que denotaremos por β.
- Qué significa que un par de objetos sean semejantes a los efectos de la definción de testor, es decir, cuál es el conjunto D de valores de la imagen de β donde se considera que un par de objetos sean semejantes.
- Cómo vamos a comparar un par de l–uplos de pertenencia a las clases, o sea, necesitamos determinar una función v.
- Cuál es el conjunto D' de valores de la imagen de v donde se considera que dos n–uplos de pertenencia son semejantes.

En el trabajo de Lazo, en principio, no se exige ninguna condición para el parámetro β, es decir, β pudiera ser cualquiera; sin embargo, al definir D estamos convirtiendo β en una función booleana.

2. Testores relativos

Hasta el momento los conceptos de testor tienen implícitas funciones de semejanzas booleanas (parámetro β); o, en el caso de no serlo, presuponen que su imagen se puede dividir en dos conjuntos de valores disjuntos: el de los valores donde los objetos se consideran semejantes y el de los valores donde los objetos se consideran diferentes.

Pero, ¿qué pasaría si en lugar de considerar la semejanza de manera dicotómica, nos guiásemos únicamente por el valor obtenido de la comparación, utilizando la función de semejanza parcial cualquiera que ésta sea? A continuación se define un nuevo concepto de testor que no exige que la función de semejanza implícita en el mismo sea booleana o "booleanizable".

Sea $R = \{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto de rasgos de una MA, M_p, $p = 1, \ldots, n$ sus conjuntos de valores admisibles y

$$\mathcal{C}_p : M_p \times M_p \to V_p, \quad p = 1, \ldots, n$$

sus respectivos criterios de comparación.

Definiremos una función de semejanza β que de forma general puede ser de cualquiera de las dos siguientes maneras:

Tipo 1.

$$\beta : \prod (\mathcal{X}) \times \prod (\mathcal{X}) \to V,$$

donde $\mathcal{X}$ es cualquier elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ es el conjunto potencia de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$, $\prod$ denota el producto cartesiano de todos los elementos de $\mathcal{X}$ y V es un conjunto totalmente ordenado cualquiera.

Tipo 2.

$$\beta : \prod (\mathcal{N}) \to V$$

donde $\mathcal{N}$ es cualquier elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ es el conjunto potencia de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} = \{V_1, \ldots, V_n\}$, $\prod$ denota el producto cartesiano de todos los elementos de $\mathcal{N}$ y V es un conjunto totalmente ordenado cualquiera.

Es decir, una función de semejanza es una expresión que mide la semejanza entre las descripciones parciales (en un mismo subconjunto de rasgos) de un par cualquiera de objetos de la matriz de aprendizaje, ya sea a partir directamente de los valores de sus descripciones (Tipo 1) o a partir de los valores obtenidos dc aplicar los respectivos criterios de comaparación de cada variable (Tipo 2), y de tal modo que será mayor esta semejanza mientras mayor sea el orden en el conjunto V del valor obtenido.

Definición 1. *Diremos que T es un subconjunto generalizado de rasgos de R y lo denotaremos $T \subseteq R$ si y sólo si*

1. $T = \{x_{p_1}, \rho_{p_1} | \mu_T(x_{p_1}), \ldots, x_{p_s}, \rho_{p_s} | \mu_T(x_{p_s})\}$,

   $$\text{donde } \forall i \subset \{1, \ldots s\} \ [x_{p_i} \subset R \wedge (\mu_T(x_{p_i}) \in (0,1]) \wedge (\rho_{p_i} \in \{1,2\})].$$

2. $x_{p_l} \neq x_{p_m}$ *si* $l \neq m$; $l, m \in \{1, \ldots, s\}$.

Observación 1. *En el caso en que en*

$$T = \{x_{p_1}, \rho_{p_1} | \mu_T(x_{p_1}), \ldots, x_{p_s}, \rho_{p_s} | \mu_T(x_{p_s})\},$$

$\mu_T(x_{p_i})$, $\rho_{p_i} = 1 \ \forall i \in \{1, \ldots s\}$, *$T$ se corresponde con un subconjunto "duro" o clásico de R; si $\exists i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\mu_T(x_{p_i}) \neq 1$, T es un subconjunto difuso* [7] *de R, y si $\exists i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\rho_{p_i} \neq 1$, T es un 3–conjunto* [8] *de R.*

Sea $T \subseteq R$; entonces

$$\begin{aligned} &\beta\left(I(O_i)_{/T}, I(O_j)_{/T}\right) = \\ &= \beta\left(\mathcal{C}_{p_1}(x_{p_1}(O_i), x_{p_1}(O_j)), \ldots, \mathcal{C}_{p_s}(x_{p_s}(O_i), x_{p_s}(O_j))\right) \end{aligned}$$

si β es de tipo 1, y

$$\begin{aligned} &\beta\left(I(O_i)_{/T}, I(O_j)_{/T}\right) = \\ &= \beta\left((x_{p_1}(O_i), \ldots, x_{p_s}(O_i)), (x_{p_1}(O_j), \ldots, x_{p_s}(O_j))\right) \end{aligned}$$

si β es de tipo 2.

Sean los parámetros v, D', considerados de la misma forma que en Lazo [8], y sea $R^* \subseteq R$; a R^* lo denominaremos *conjunto de referencia*.

Definición 2. *$T \subseteq R$ es un conjunto testor relativo a R^* y β de MA si $\forall O_i, O_j \in MA$ se tiene que*

$$\begin{aligned}[v(\overline{\alpha}(O_i), \overline{\alpha}(O_j)) \notin D'] \Rightarrow \Big[\beta\left(I(O_i)_{/T}, I(O_j)_{/T}\right) \leq \\ \leq \beta\left(I(O_i)_{/R^*}, I(O_j)_{/R^*}\right)\Big].\end{aligned} \tag{1}$$

Esta definición la podemos interpretar de la siguiente manera: T es un conjunto testor relativo a R^* y β, si T es capaz de diferenciar todo par de objetos de clases diferentes no peor que R^*; es decir, si la semejanza de cualquier par de objetos de clases diferentes en los rasgos de T es menor que en los rasgos de R^*.

Definición 3. *$T \subseteq R$ es un conjunto testor relativo a R^* y β de MA típico si T es testor relativo a R^* y β de MA, y si es minimal para cierto orden parcial definido en la familia de todos los testores relativos a R^* y β de MA.*

Veamos algunas propiedades de los testores relativos.

Proposición 1. *$\forall \beta, R^*$ es un testor relativo a R^* y β.*

Demostración. $R^* \subseteq R$ y $\forall \beta$ se cumple que $\forall O_i, O_j \in MA$ se tiene que

$$\begin{aligned}[v(\overline{\alpha}(O_i), \overline{\alpha}(O_j)) \notin D'] \Rightarrow \Big[\beta\left(I(O_i)_{/R^*}, I(O_j)_{/R^*}\right) \leq \\ \leq \beta\left(I(O_i)_{/R^*}, I(O_j)_{/R^*}\right)\Big]. \blacksquare\end{aligned}$$

Proposición 2. *Una condición suficiente para que $T \subseteq R$ sea testor relativo a R^* y β de MA es que*

$$\max_{OD}\left\{\beta\left(I(O_i)_{/T}, I(O_j)_{/T}\right)\right\} \leq \min_{OD}\left\{\beta\left(I(O_i)_{/R^*}, I(O_j)_{/R^*}\right)\right\}, \tag{2}$$

donde $OD = \{(O_i, O_j) \in MA \mid v(\overline{\alpha}(O_i), \overline{\alpha}(O_j)) \notin D'\}$.

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (1). $\blacksquare$

La condición (2) no es necesaria.

3. Ejemplo numérico

Sea la siguiente MD:

$$MD = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ O_1O_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ O_1O_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ O_2O_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Sean

$$\beta_{/T}\left(I\left(O_i\right), I\left(O_j\right)\right) = \beta\left(I\left(O_i\right)_{/T}, I\left(O_j\right)_{/T}\right) = \frac{\sum\limits_{\substack{x_p(O_i)=x_p(O_j) \\ x_p\in T}} P\left(x_p\right)}{\sum\limits_{x_p\in T} P\left(x_r\right)},$$

$$R^* = R = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ y } P\left(x_p\right) = 1,\ p = 1, \ldots, 4;$$

entonces

$$\beta_{/R}\left(I\left(O_1\right), I\left(O_2\right)\right) = \frac{3}{4};\ \beta_{/R}\left(I\left(O_1\right), I\left(O_3\right)\right) = \frac{1}{2};\ \beta_{/R}\left(I\left(O_2\right), I\left(O_3\right)\right) = \frac{1}{2};$$

Supongamos que $T_1 = \{x_2, x_3\}$, $T_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $T_3 = \{x_2, x_3, x_4\}$; así,

$$\begin{array}{lll} \beta_{/T_1}\left(I\left(O_1\right), I\left(O_2\right)\right) = \frac{1}{2}, & \beta_{/T_2}\left(I\left(O_1\right), I\left(O_2\right)\right) = \frac{2}{3}, & \beta_{/T_3}\left(I\left(O_1\right), I\left(O_2\right)\right) = \frac{2}{3}, \\ \beta_{/T_1}\left(I\left(O_1\right), I\left(O_3\right)\right) = \frac{1}{2}, & \beta_{/T_2}\left(I\left(O_1\right), I\left(O_3\right)\right) = \frac{2}{3}, & \beta_{/T_3}\left(I\left(O_1\right), I\left(O_3\right)\right) = \frac{1}{3}, \\ \beta_{/T_1}\left(I\left(O_1\right), I\left(O_3\right)\right) = \frac{1}{2}, & \beta_{/T_2}\left(I\left(O_2\right), I\left(O_3\right)\right) = \frac{1}{3}, & \beta_{/T_3}\left(I\left(O_2\right), I\left(O_3\right)\right) = \frac{2}{3}, \end{array}$$

y podemos concluir que T_1 es un testor relativo a R^* y β, pero T_2 y T_3 no son testores relativos a R^* y β.

4. Relación del concepto de testor relativo con los conceptos de testor existentes hasta el momento

Sea $T \subseteq R$ un g–testor [8] de MA con respecto a $\beta, v, D \subseteq V$ y D' y $R^* \subseteq R$.

Proposición 3. *Si* $D = \left\{x \in V \mid x > \min\limits_{OD} \left\{\beta_{/R^*}\left(I\left(O_i\right), I\left(O_j\right)\right)\right\}\right\}$, T *es un testor relativo a* R^* *y* β.

Demostración. Teniendo en cuenta que T es un g–testor con respecto a β, v, D y D', entonces se cumple que

$$\forall O_i, O_j \in OD,\ \beta_{/T}\left(I\left(O_i\right), I\left(O_j\right)\right) \notin D,$$

es decir,

$$\forall O_i, O_j \in OD,\ \beta_{/T}\left(I\left(O_i\right), I\left(O_j\right)\right) \leq \min_{OD}\left\{\beta_{/R^*}\left(I\left(O_i\right), I\left(O_j\right)\right)\right\}$$

y entonces

$$\forall O_i, O_j \in OD,\ \beta_{/T}\left(I\left(O_i\right), I\left(O_j\right)\right) \leq \beta_{/R^*}\left(I\left(O_i\right), I\left(O_j\right)\right)$$

y T es un testor relativo a R^* y β. ∎

Sean $\tau = \{T_1, \ldots, T_s\}$ el conjunto de todos los g–testores con respecto a v, D', β, D de una MA, donde $V = \{0, 1\}$ es la imagen de β y $D = \{1\}$.

Corolario 1. $\forall T_u \in \tau$, T_u *es testor relativo a* T_v *y* β, $\forall v$, $v = \{1, \ldots, s\}$.

Demostración. $\forall T_u \in \tau$ y $\forall O_i, O_j \in OD$ se cumple que

$$\beta_{/T_u}\left(O_i, O_j\right) \notin D, \text{ es decir, } \beta_{/T_u}\left(O_i, O_j\right) = 0;$$

de ahí que $\forall O_i$, $O_j \in OD$

$$\beta_{/T_1}\left(O_i, O_j\right) = \beta_{/T_2}\left(O_i, O_j\right) = \cdots = \beta_{/T_s}\left(O_i, O_j\right) = 0,$$

y aplicando la defición 1 se cumple lo afirmado en el enunciado. ∎

En el trabajo de [8] se demuestra que los testores de Zhuravliov, los testores difusos de Goldman, los testores de Andreev, los k–testores, los ε–testores y los testores en cierto grado son g–testores con respecto a determinados v, D', β, D, donde todas las funciones de semejanza son booleanas y los D se pudieran definir como el conjunto unitario. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos afirmar que el concepto clásico de Zhuravliov y el resto de las extensiones enunciadas cumplen con las condiciones del corolario anterior.

Se puede demostrar también que los $\overline{\varepsilon}$–testores difusos [10] cumplen con las condiciones del Corolario.

5. Conclusiones

En este trabajo se introduce una nueva definición de testor, el *testor relativo*, cuya importancia radica en la posibilidad de poder definir un concepto de testor (típico) para cualquier función de semejanza. Esto a su vez permite utilizar una misma función de semejanza implícita en el concepto de testor y en el proceso de clasificación; de lo contrario, se produciría una incompatibilidad que afectaría la validez de los resultados.

También se demuestra otra virtud de este nuevo concepto, y es el hecho de que constituye una generalización de las anteriores definiciones y conserva la esencia del concepto original de testor.

Referencias

[1] AIZEMBERG N. N., TSIPKIN A. I., *Tesores primos*, Doklady Akademie Nauk 201 (1970), pp. 801–802 (en ruso).

[2] CABRERA E. A., *Testores típicos para el caso de matrices de comparacion k valentes y función de semejanza booleana de un umbral*, Memorias del I Taller Iberoamericano de Reconocimiento de Patrones (1995).

[3] CABRERA E. A., LÓPEZ REYES N., RUIZ SHULCLOPER J., *Extensión del concepto de testor típico a partir de la función de analogía entre patrones. Algoritmos para su cálculo*, Serie Amarilla IPN México 134 (1994), pp. 7–28.

[4] ANDREEV A. E., *Acerca de los testores bloqueados y minimales*, Dokladi Akademii Nauk SSSR t. 256, No 3, (1981), pp. 521–524 (en ruso).

[5] CHEGUIS I. A., YABLONSKII S. V., *Métodos lógicos para el control del trabajo de esquemas eléctricos*, Trudy Matem. Inst. AN SSSR im VA Steklova 51 (1958), pp. 236–269.

[6] DMITRIEV A. N., ZHURAVLIOV J. I. KRENDELEIEV F. P., *Acerca de los principios matemáticos de la clasificación de objetos y fenómenos*, Diskretnyi Analiz 7 (1966), pp. 3–15.

[7] GOLDMAN R. S., *Problemas de la teoría de los testores difusos*, Avtomatika y telemajanica 10 (1980), pp. 146–153 (en ruso).

[8] LAZO CORTEZ M., *Una generalización del concepto de testor*, Aportaciones Matemáticas, Serie comunicaciones 14, IMATE-UNAM (1994), pp. 283–288.

[9] LAZO CORTEZ M., RUIZ SHULCLOPER J., *Modelos matemáticos para el reconocimiento de patrones*, Aportaciones Matemáticas, Serie textos, IMATE-UNAM (1993).

[10] MATOS FUENTES N., LÓPEZ REYES N., *Extención del concepto de testor difuso a partir de la dimensión de las variables que describen los patrones*, En prensa (1995).