

Métodos numéricos para la solución de un problema inverso para un sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales

HENRY LAMOS*

Abstract

This work is devoted to numerical methods for solution of the inverse coefficient problem for the nonlinear differential equations. Two approaches to solution of this inverse problem are offered. One consists in representation of unknown coefficient by some function depending on a set of unknown numerical parameters. Then the inverse problem is solved by gradient minimization methods of residual function using additional condition. The other consist in construction of iterative process basing on integral formula, obtained from additional condition. A priori representation of unknown coefficient in a parametrical form in not required in this case. The efficiency of the suggested methods are demonstrated by a number of numerical experiments.

1. Introducción

Los problemas inversos para ecuaciones no lineales en derivadas parciales son en la actualidad de gran interés en la física matemática. Estos problemas aparecen en procesos de la física del calor, de la físico-química y en algunos otros procesos. Los problemas inversos más complejos para ecuaciones no lineales en derivadas parciales son los de los coeficientes, en los cuales el coeficiente desconocido es una función que depende de la solución del problema de

*Profesor Asociado, Escuela de Matemáticas UIS, Bucaramanga, COLOMBIA.
(hlamos@uis.edu.co)

contorno dado. Uno de los posibles enfoques para la solución de estos problemas consiste en representar la función desconocida en forma de cierta función dada de manera explícita, dependiendo de un conjunto de parámetros. En este caso el problema inverso se convierte en un problema de determinación de estos parámetros, y se resuelve por los métodos del gradiente para la minimización del funcional del residuo, que se obtiene a partir de ciertas condiciones complementarias.

Otro enfoque consiste en transformar la condición complementaria en una relación integral que contiene el coeficiente desconocido. Esta relación obtenida permite, junto con el problema de contorno dado, construir un método iterativo. Es importante decir que a priori no se exige una representación paramétrica del coeficiente desconocido.

2. Planteamiento del problema y formulación del teorema de unicidad para el problema inverso

Consideremos el modelo matemático del proceso de absorción dinámica con cinética de difusión mixta [1]:

$$\nu u_x(x, t) + a_t(x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$a_t(x, t) = \beta(u(x, t) - y(x, t)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$v(x, t) = f(y(x, t)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3)$$

$$a(x, t) = \alpha_0 v(x, t) + (1 - \alpha_0)c(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (4)$$

$$c_t(x, t) = \gamma_0(v(x, t) - c(x, t)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (5)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$$a(x, 0) = c(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

donde $Q_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, ν , β , γ_0 , α_0 son constantes positivas, el coeficiente $\alpha_0 < 1$ y $f(\xi)$ es una función monótona creciente tal que $f(0) = 0$.

Simplificando el problema (1)–(7), y representando por $F(\xi)$ la función inversa de $f(\xi)$, obtenemos en lugar de (1)–(7) el siguiente problema:

$$u_x + \alpha u = \alpha F(v), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (8)$$

$$a_t = \beta(u - F(v)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (9)$$

$$v_t + \gamma v = \gamma a + \lambda u - \lambda F(v), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (10)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11)$$

$$a(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (12)$$

donde

$$\alpha = \frac{\beta}{\nu}, \quad \gamma = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\alpha_0}.$$

Formulemos nuestro problema inverso. Dadas las constantes α , β , γ , λ y para $t \in [0, T]$, se conocen las funciones $\mu(t)$ y

$$g(t) = u(l, t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13)$$

Se debe determinar $F(\xi)$, $u(x, t)$, $a(x, t)$, $v(x, t)$ que satisfagan el sistema (8)–(13). Las funciones $\mu(t)$ y $F(\xi)$ satisfacen las siguientes condiciones:

$$\mu \in C^2[0, T], \quad \mu(0) = 0, \quad \mu'(t) > 0, \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

y

$$F \in C^1(-\infty, \infty), \quad F(0) = 0; \quad 0 < F'(\xi) < c_1, \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}, \quad c_1 \text{ constante.} \quad (15)$$

Demos la definición de la solución del problema inverso (8)–(13).

Definición 1. El conjunto de funciones $\{F(\xi), u(x, t), a(x, t), v(x, t)\}$ se llama solución del problema inverso (8)–(13) si

$$F \in C^1(\mathbb{R}), \quad F(0) = 0, \quad 0 < F'(\xi) < c_1, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

$$F(+\infty) > \mu(T), \quad F \in C^2[0, f(\mu(T))] \cap C^4[0, f(\mu(\tau_0))], \quad \tau_0 \in (0, T],$$

$u, a, v \in C^2[Q_T] \cap C^4[Q_{\tau_0}]; F(\xi), u(x, t), a(x, t), v(x, t)$ satisfacen (8)–(13).

En [2] se demuestra el teorema de unicidad del problema inverso.

Teorema 1. Supongamos que la función $\mu(t)$ satisface las condiciones (14) y $\mu \in C^4[0, \tau_0]$. Si $\{F_i(\xi), u_i(x, t), a_i(x, t), v_i(x, t)\}_{i=1,2}$ son soluciones del problema inverso (8)–(13), entonces $u_1(x, t) = u_2(x, t)$, $a_1(x, t) = a_2(x, t)$, $v_1(x, t) = v_2(x, t)$ en Q_T , $F_1(\xi) = F_2(\xi)$ para $\xi \in [0, v_1(0, T)]$.

2.1. Solución numérica

Un método para resolver el problema inverso de absorción dinámica con cinética de difusión mixta consiste en determinar la isoterma a través de una curva de salida dada con cierto error de aproximación δ .

Una gran clase de estos problemas se puede resolver suponiendo de antemano que la isoterma tiene cierta forma funcional; por ejemplo, la isoterma

puede estar dada por la función $F(\xi, c_1, c_2, \dots, c_n)$, que depende del vector de parámetros numéricos $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, y el problema inverso consistiría en determinar este vector a través de la curva dinámica de salida dada con cierto error de medición. Supongamos que la función $\mu(t)$ satisface las condiciones (14). Denotemos por M la magnitud $f(\mu(T))$. Supongamos que la función $F(\xi, c_1, c_2, \dots, c_n)$ está definida para $\xi \in (-\epsilon, M + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ pertenecen a cierto conjunto acotado y cerrado W^n del espacio de dimensión finita \mathbb{E}^n , y la función $F(\xi, c_1, c_2, \dots, c_n)$ es dos veces derivable continuamente con respecto a todos los argumentos en el conjunto

$$W_\xi^n = \{(\xi, c_1, c_2, \dots, c_n) : \xi \in [0, M], c \in W^n\};$$

para cualquier $c \in W^n$, la función $F(\xi, c)$ es analítica con respecto a ξ en el intervalo $(-\epsilon, M + \epsilon)$, $F(0, c) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, c) > 0$ para $\xi \in (-\epsilon, M + \epsilon)$; la correspondencia entre $F(\xi, c)$ y $c \in W^n$ es biunívoca.

Consideremos el problema de contorno

$$\begin{aligned} u_x(x, t; c) + \alpha u(x, t; c) &= \alpha F(v(x, t; c), c), & (x, t) \in Q_T; \\ a_t(x, t; c) &= \beta(u(x, t; c) - F(v(x, t; c), c)), & (x, t) \in Q_T; \\ v_t(x, t; c) + \gamma v(x, t; c) &= \gamma a(x, t; c) + \lambda u(x, t; c) \\ &\quad - \lambda F(v(x, t; c), c), & (x, t) \in Q_T; \\ u(0, t; c) &= \mu(t), & 0 \leq t \leq T; \\ a(x, 0; c) &= v(x, 0; c) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Este problema nos define el operador A que hace corresponder a la isoterma $F(\xi, c)$ con la curva de salida $u(l, t; c)$ ($0 \leq t \leq T$). Supongamos que para la función $\bar{g}(t)$ existe el vector $\bar{c} \in W^n$, tal que

$$AF(\xi, \bar{c}) = \bar{g}(t). \quad (17)$$

Más adelante demostraremos que el operador A es un operador continuo.

La función $\bar{g}(t)$ se conoce de manera aproximada; esto es, en lugar de $\bar{g}(t)$, se dan la función $g_\delta(t)$ y el error de medición $\delta > 0$ tales que

$$\|\bar{g}(t) - g_\delta(t)\|_{L_2[0, T]} \leq \delta.$$

Por lo tanto debemos resolver la ecuación (17) con parte derecha conocida de manera aproximada. Del teorema 1 se desprende que existe solución única

\bar{c} de la ecuación (17) con parte derecha igual a $\bar{g}(t)$. De acuerdo con [3], la sucesión de vectores $c_\delta \in W^n$, que satisfacen la desigualdad

$$\|AF(\xi, c_\delta) - g_\delta\|_{L_2[0,T]} \leq K\delta, \quad K \text{ constante, } K \geq 1, \quad (18)$$

tiene límite, esto es $c_\delta \rightarrow \bar{c}$ en la métrica de \mathbb{E}^n cuando $\delta \rightarrow 0$; así que, teniendo en cuenta las propiedades de la función $F(\xi, c)$, tenemos

$$\|F(\xi, c_\delta) - F(\xi, \bar{c})\|_{C[0,M]} \rightarrow 0 \quad \text{para } \delta \rightarrow 0.$$

En calidad de la solución aproximada de la ecuación (17) podemos tomar las isotermas $F(\xi, c_\delta)$, $c_\delta \in W^n$, que satisfacen la desigualdad (18). Estas isotermas las podemos obtener a partir de la minimización de la función de n variables

$$\Phi(c) = \int_0^T [AF(\xi, c) - g_\delta(t)]^2 dt = \int_0^T [u(l, t; c) - g_\delta(t)]^2 dt \quad (19)$$

en el conjunto W^n . Para la solución de este problema se emplean métodos del gradiente [4]. Por lo tanto es necesario encontrar el gradiente de la función $\Phi(c)$. En [4] se demuestra que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_i}(\bar{c}) = \int_0^T \int_0^l [\alpha m(x, t; \bar{c}) - \beta n(x, t; \bar{c}) - \lambda r(x, t; \bar{c})] \frac{\partial F}{\partial c_i}(v(x, t; \bar{c}); \bar{c}), \quad (20)$$

donde las funciones $m(x, t; \bar{c})$, $n(x, t; \bar{c})$, $r(x, t; \bar{c})$, son solución del problema conjugado

$$m_x(x, t; \bar{c}) = \alpha m(x, t; \bar{c}) - \beta n(x, t; \bar{c}) - \lambda r(x, t; \bar{c}), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (21)$$

$$n_t(x, t; \bar{c}) = -\gamma r(x, t; \bar{c}), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (22)$$

$$r_t(x, t; \bar{c}) = \gamma r(x, t; \bar{c}) + F_\xi(v(x, t; \bar{c}); \bar{c})(\beta n(x, t; \bar{c}) + \lambda r(x, t; \bar{c}) - \alpha m(x, t; \bar{c})), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (23)$$

$$m(l, t; \bar{c}) = 2(u(l, t; \bar{c}) - g_\delta), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (24)$$

$$n(x, T; \bar{c}) = r(x, T; \bar{c}) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (25)$$

Consideremos ahora el segundo método para resolver nuestro problema inverso.

Para esto transformemos la condición (13) en una relación integral. Integremos la ecuación (9) respecto a la variable x en el segmento $[0, l]$:

$$\int_0^l a_t(\xi, t) d\xi = \beta \int_0^l u(\xi, t) d\xi - \beta \int_0^l F(v(\xi, t)) d\xi. \quad (26)$$

De las ecuaciones (8), (11) y (12) obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^l a_t(\xi, t) d\xi &= - \int_0^l \frac{\beta}{\alpha} u_x(\xi, t) d\xi \\ &= \frac{\beta}{\alpha} u(l, t) + \frac{\beta}{\alpha} u(0, t) \\ &= \frac{\beta}{\alpha} (\mu(t) - g(t)); \end{aligned} \quad (27)$$

Reemplazando (27) en (26) obtenemos

$$\left(\frac{1}{\alpha} \mu(t) - g(t) \right) = \int_0^l u(\xi, t) d\xi - \beta \int_0^l F(v(\xi, t)) d\xi; \quad (28)$$

la solución de la ecuación (8)-(11) es entonces

$$u(x, t) = \mu(t) \exp\{-\alpha x\} + \alpha \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F(v(\xi, t)) d\xi;$$

Colocando esta representación de la función u en (28) obtenemos

$$\alpha \int_0^l e^{\alpha\xi} F(v(\xi, t)) d\xi = e^{\alpha l} g(t) - \mu(t), \quad (29)$$

y en lugar de la condición complementaria (13) se considera la relación integral (29). Por lo tanto, para resolver el problema inverso (8)-(12), (29) construimos el siguiente proceso iterativo. Dada la función $F^k(\xi)$ se resuelve el problema de contorno

$$u_x^k + \alpha u^k = \alpha F^k(v^k), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (30)$$

$$a_t^k = \beta(u^k - F^k(v^k)), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (31)$$

$$v_t^k + \gamma v^k = \gamma a^k + \lambda u^k - \lambda F^k(v^k), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (32)$$

$$u^k(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (33)$$

$$a^k(x, 0) = v^k(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (34)$$

y se determina la función $u^k(x, t)$. La función $F^{k+1}(\xi)$ se encuentra por la fórmula

$$\begin{aligned} F^{k+1}(v^k(0, t)) &= F^k(v^k(0, t)) + \theta(e^{\alpha l} g(t) - \mu(t) \\ &\quad - \alpha \int_0^l e^{\alpha\xi} F^k(v^k(\xi, t)) d\xi, \end{aligned} \quad (35)$$

donde $t \in [0, T]$ y θ es un parámetro positivo. El proceso iterativo (30)-(35) se detiene en el paso k , para el cual

$$\|g(t) - u^k(l, t)\|_{L_2[0, T]} \leq \delta.$$

Ahora demostremos que el operador A es un operador continuo.

Teorema 2. Si $u_1(x, t), a_1(x, t), v_1(x, t)$ y $u_2(x, t), a_2(x, t), v_2(x, t)$ son soluciones del problema (8)–(12), definidas por las funciones $\mu(t)$, $F_1(\xi)$ y $\mu(t)$, $F_2(\xi)$ respectivamente, entonces

$$\max_{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq k_1 \|F_1(\xi) - F_2(\xi)\|_{C[0, R]}, \quad (36)$$

$$\max_{0 < x < l, 0 < t \leq T} |a_1(x, t) - a_2(x, t)| \leq k_2 \|F_1(\xi) - F_2(\xi)\|_{C[0, R]}, \quad (37)$$

$$\max_{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T} |v_1(x, t) - v_2(x, t)| \leq k_3 \|F_1(\xi) - F_2(\xi)\|_{C[0, R]}, \quad (38)$$

donde k_1, k_2, k_3 son constantes positivas y $R = \max\{f_1(\mu(T)), f_2(\mu(T))\}$.

Demostración. Representemos

$$q(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t);$$

$$p(x, t) = a_1(x, t) - a_2(x, t);$$

$$w(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t).$$

Entonces las funciones $q(x, t)$, $p(x, t)$ y $w(x, t)$ son soluciones del problema

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2)_x + \alpha(u_1 - u_2) &= \alpha(F_1(v_1) - F_2(v_2)), & (x, t) \in Q_T; \\ (a_1 - a_2)_t &= \beta((u_1 - u_2) - (F_1(v_1) - F_2(v_2))), & (x, t) \in Q_T; \\ (v_1 - v_2)_t + \gamma(v_1 - v_2) &= \gamma(a_1 - a_2) + \lambda(u_1 - u_2) \\ &\quad - \lambda(F_1(v_1) - F_2(v_2)), & (x, t) \in Q_T; \\ (u_1 - u_2)(0, t) &= 0, & 0 \leq t \leq T; \\ (a_1 - a_2)(x, 0) &= (v_1 - v_2)(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} F_1(v_1) - F_2(v_2) &= \\ &= F_1(v_1) - F_1(v_2) + F_1(v_2) - F_2(v_2) \\ &= \int_0^1 F_1'(v_2(x, t) + \theta(v_1(x, t) - v_2(x, t))) d\theta \times (v_1(x, t) - v_2(x, t)) \\ &\quad + F_1(v_2) - F_2(v_2) \\ &= A(x, t)w(x, t) + \Phi(x, t), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \int_0^1 F_1'(v_2(x, t) + \theta w(x, t)) d\theta, \\ \Phi(x, t) &= F_1(v_2(x, t)) - F_2(v_2(x, t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, las funciones $q(x, t)$, $p(x, t)$ y $w(x, t)$ son soluciones del problema de contorno

$$q_x(x, t) + \alpha q(x, t) = \alpha (A(x, t)w(x, t) + \Phi(x, t)), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (39)$$

$$p_t(x, t) = \beta (q(x, t) - A(x, t)w(x, t) - \Phi(x, t)), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (40)$$

$$w_t(x, t) + B(x, t)w(x, t) = \gamma p(x, t) + \lambda q(x, t) - \lambda (\Phi(x, t)), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (41)$$

$$q(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (42)$$

$$p(x, 0) = w(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (43)$$

donde

$$B(x, t) = \gamma + \lambda A(x, t).$$

Integrando las ecuaciones (39), (40) y teniendo las condiciones (42), (43) tenemos

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \alpha \int_0^x \exp \{-\alpha(x - \xi)\} (A(\xi, t)w(\xi, t) + \Phi(\xi, t)) d\xi, \\ p(x, t) &= -\beta \int_0^t (A(x, \tau)w(x, \tau) + \Phi(x, \tau)) d\tau \\ &\quad + \alpha \beta \int_0^t \int_0^x \exp \{-\alpha(x - \xi)\} (A(\xi, \tau)w(\xi, \tau) + \Phi(\xi, \tau)) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Colocando las expresiones obtenidas en (41), obtenemos la siguiente ecuación para la función $w(x, t)$:

$$\begin{aligned} w_t(x, t) + B(x, t)w(x, t) &= \\ &= \alpha \beta \gamma \int_0^t \int_0^x \exp \{-\alpha(x - \xi)\} \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &\quad + \beta \alpha \gamma \int_0^t \int_0^x \exp \{-\alpha(x - \xi)\} A(\xi, \tau)w(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &\quad - \beta \gamma \int_0^t \Phi(x, \tau) d\tau - \beta \gamma \int_0^t A(x, \tau)w(x, \tau) d\tau - \lambda \Phi(x, t) \\ &\quad + \alpha \lambda \int_0^x \exp \{-\alpha(x - \xi)\} \Phi(\xi, t) d\xi \\ &\quad + \alpha \lambda \int_0^x \exp \{-\alpha(x - \xi)\} A(\xi, t)w(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (44)$$

Ahora, integrando (44), teniendo en cuenta (43) y cambiando el orden de integración, obtenemos la ecuación integral para la función $w(x, t)$:

$$w(x, t) = \alpha \int_0^t \int_0^x B_3(x, t, \tau) \exp\{-\alpha(x - \xi)\} A(\xi, \tau) w(\xi, \tau) d\xi d\tau - \beta\gamma \int_0^t B_2(x, t, \tau) A(x, \tau) w(x, \tau) d\tau + z(x, t), \quad (45)$$

donde

$$\begin{aligned} B_2(x, t, \tau) &= \int_\tau^t \exp\left\{-\int_\theta^t B(x, s) ds\right\} d\theta, \\ B_3(x, t, \tau) &= \lambda \exp\left\{-\int_\tau^t B(x, s) ds\right\} + \beta\gamma B_2(x, t, \tau), \\ z(x, t) &= \alpha \int_0^t \int_0^x B_3(x, t, \tau) \exp\{-\alpha(x - \xi)\} \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau - \int_0^t B_3(x, t, \tau) \Phi(x, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (46)$$

Transformando la ecuación (45), y empleando el resolvente $R_1(x, t, \tau)$ con núcleo $-\gamma\beta B_2(x, t, \tau)A(x, \tau)$, tenemos

$$\begin{aligned} w(x, t) &= z(x, t) + \int_0^t z(x, \tau) R_1(x, t, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_0^x B_4(x, \xi, t, \tau) w(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &\quad + \int_0^t [R_1(x, t, \tau) \int_0^\tau \int_0^x B_4(x, \xi, t, \theta) w(\xi, \theta) d\xi d\theta] d\tau, \end{aligned} \quad (47)$$

donde

$$B_4(x, \xi, t, \tau) = \alpha \exp\{-\alpha(x - \xi)\} A(\xi, \tau) B_3(x, t, \tau).$$

Cambiando el orden de integración en la última integral que aparece en la ecuación, y haciendo

$$B_5(x, \xi, t, \tau) = B_4(x, \xi, t, \tau) + \int_\tau^t R_1(x, t, \theta) B_4(x, \xi, \theta, \tau) d\theta,$$

obtenemos la ecuación integral para $w(x, t)$:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= z(x, t) + \int_0^t z(x, \tau) R_1(x, t, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_0^x B_5(x, \xi, t, \tau) w(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in Q_T. \end{aligned} \quad (48)$$

Resolviendo la ecuación con la ayuda del resolvente $R_2(x, \xi, t, \tau)$ respecto al núcleo $B_5(x, \xi, t, \tau)$, y cambiando el orden de integración en la integral triple, tenemos la siguiente representación para la solución de la ecuación (41):

$$w(x, t) = z(x, t) + \int_0^t z(x, \tau) R_1(x, t, \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^x R_3(x, \xi, t, \tau) z(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, y) \in Q_T, \quad (49)$$

donde

$$R_3(x, \xi, t, \tau) = R_2(x, \xi, t, \tau) + \int_\tau^t R_2(x, \xi, t, \theta) R_1(x, \theta, \tau) d\theta.$$

La función $R_3(x, \xi, t, \tau)$ es acotada para cualesquiera x, ξ, t, τ tales que $0 \leq x \leq \xi \leq l$; $0 \leq \tau \leq t \leq T$, por lo tanto $0 \leq x \leq l$, $0 \leq \tau < T$ tenemos

$$|w(x, t)| \leq |z(x, t)| + \left| \int_0^t z(x, \tau) R_1(x, t, \tau) d\tau \right| + \left| \int_0^x \int_0^t z(\xi, \tau) R_3(x, \xi, t, \tau) d\xi d\tau \right|.$$

Acotemos la función $z(x, t)$. De su representación se desprende que para $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$,

$$|z(x, t)| \leq q_3 \max_{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T} |\Phi(x, t)|,$$

donde q_3 es cierta constante positiva. Anotemos que

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T} |\Phi(x, t)| &\leq \max_{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T} |F_1(v_2(x, t)) - F_2(v_2(x, t))| \\ &\leq \|F_1(\xi) - F_2(\xi)\|_{C[0, R]}, \end{aligned}$$

así que

$$\max_{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T} |w(x, t)| \leq K_1 \|F_1(\xi) - F_2(\xi)\|_{C[0, R]}, \quad (50)$$

y la cota (38) queda demostrada. Las cotas (36) (37) se desprenden de (50), y la expresiones de $q(x, t)$, $p(x, t)$ a través de $w(x, t)$. El teorema queda demostrado. ■

2.2. Resultados de los Experimentos Numéricos

Presentemos los resultados de los experimentos numéricos que se llevaron a cabo basados en los métodos discutidos en la sección 2.1. Sea la función

$F(\xi; c) = \frac{\xi}{c_1 - c_2\xi}$, o sea la función inversa a la isoterma $f(\xi) = \frac{c_1\xi}{1 + c_2\xi}$, y $l = 1$, $T = 1$, $\mu(t) = t$, $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ y $\lambda = 15$.

Para la función $\bar{F}(\xi, \bar{c}_1, \bar{c}_2)$, $\bar{c}_1 = 2$ y $\bar{c}_2 = 1$, con la ayuda de los métodos de ecuaciones en diferencias finitas se calcularon los valores de la función $\bar{g}(t) = u(l, t, \bar{c})$. Después se introdujeron en ellos errores, obteniendo de esta manera la función $g_\delta(t)$, la cual se tomó en calidad de información de entrada.

La minimización del funcional $\Phi(c)$ en el conjunto

$$W = \{c : c_1 \in [0, 3], c_2 \in [0, 2]\}$$

se realizó empleando el método del descenso más rápido con funciones de castigo [5]. El criterio para detener los cálculos es el cumplimiento de la desigualdad $\Phi(c) \leq \delta^2$. En la figura 1 se presentan los resultados de la solución del problema para $\delta = 0,001$.

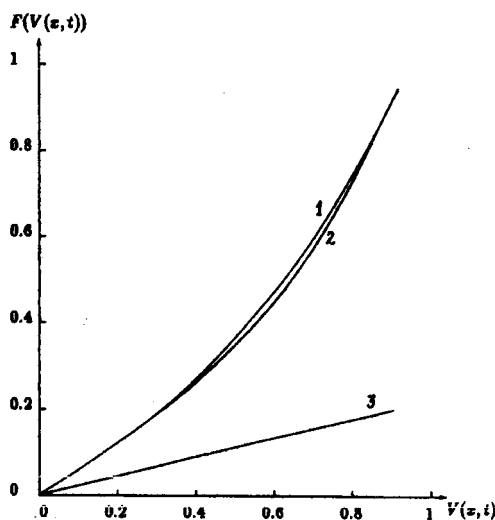


Figura 1: 1, solución exacta; 2, solución aproximada; 3, aproximación inicial.

Este método puede ser aplicado cuando a priori no se conoce la forma de la función F . En este caso la aproximación a la función $F(\xi) = \frac{\xi}{2 - \xi}$ se construye con la ayuda de los polinomios de Bernstein [6]:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \quad (51)$$

El experimento numérico consistió en lo siguiente. Para la función dada $\bar{F}(\xi) = \frac{\xi}{2-\xi}$ se calculó la función $\bar{g}(t) = u(l, t)$, en la cual se introdujeron errores de medición, obteniendo $g_\delta(t)$. Después con $g_\delta(t)$ se resolvió el problema inverso; la función desconocida $F(\xi)$ se tomó en la forma (51), y se determinaron sus parámetros c_k .

La minimización del funcional $\Phi(c)$ en el conjunto

$$W = \{c : c_i \in [0, 5], c_1 = 0, c_{i+1} \leq c_i, i = 1, \dots, n-1\}$$

se llevó a cabo por el método del gradiente condicionado [5]. El criterio para detener los cálculos es el cumplimiento de la desigualdad $\Phi(c) \leq \delta^2$. En la figura 2 se presentan los resultados para un polinomio de Bernstein de grado 4 para $\delta = 0,012$. En la figura 3 se presentan los resultados por el método

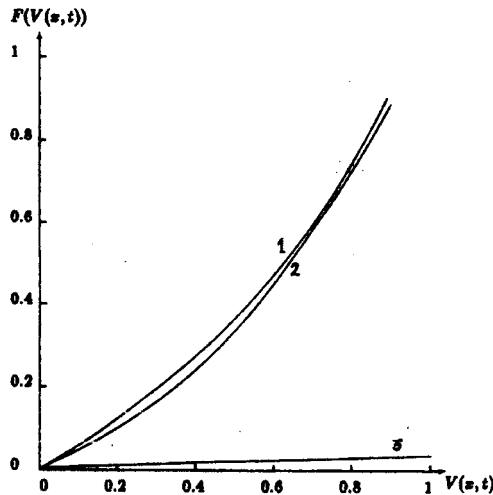


Figura 2: 1, solución exacta; 2, solución aproximada; 3, aproximación inicial.

iterativo. El experimento numérico consistió en lo siguiente: Para las funciones conocidas $\mu(t)$ y $F(\xi)$ se resolvió el problema directo y se determinó la función $g(t)$; después, en correspondencia con el método se resolvió el problema inverso, y a través de la función $g(t)$ se recuperó la función $F(\xi)$. Se obtuvo el siguiente defecto: $\|F - F^k\| = 0,008$.

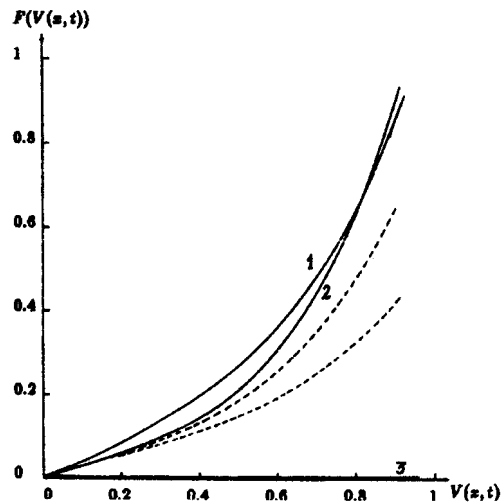


Figura 3: 1, solución exacta; 2, solución aproximada; 3, aproximación inicial.

3. Agradecimientos

El autor quiere expresar sus agradecimientos a A. M. Denísov por su constante apoyo en este trabajo.

Referencias

- [1] LUKSHIN, A. B. *Sobre un modelo de absorción dinámica*. Actas de la Academia de Ciencias de la URSS, (1973) T 213, No 3, 550-552 (en ruso).
- [2] DENÍSOV A. M. AND LAMOS H. *An inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed-diffusional kinetics*, J. Inv. Ill-posed problems, Vol. 4, No 3 (1996), p. 191-202.
- [3] TÍJONOV A.N. Y ARSEININ B. Y. *Métodos de Solución para Problemas mal Puestos*. Ed. Naúka, Moscú, 1979 (en ruso).
- [4] LAMOS H. *Numerical solution of the inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed diffusional kinetics*. Viéstnik de la Universidad Estatal de Moscú (1997), Vol. 2, p. 13-16.
- [5] VASÍLIEV F.P. *Métodos numéricos para problemas extremos*, Ed. Naúka, 1980 (en ruso).
- [6] KINCAID D. Y CHENEY W. *Análisis Numérico*. Addison Wesley Iberoamericana, 1994.

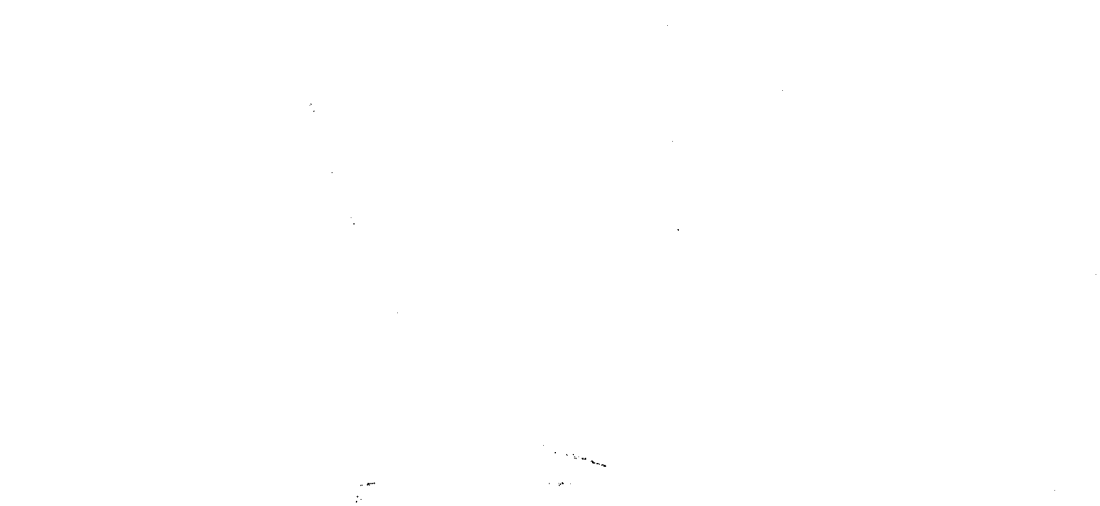


FIG. 2.—Percentage of eggs hatched for various species of Coleoptera larvae.

larvae were reared on a diet of *Chlorella* and *Chlorella* plus yeast. The results are shown in Figure 2. The percentage of eggs hatched was generally higher for larvae reared on *Chlorella* plus yeast than for those reared on *Chlorella* alone.

DISCUSSION

The results of this study indicate that the larvae of *A. nigrum* are able to utilize *Chlorella* as a food source. The larvae reared on *Chlorella* plus yeast showed a higher percentage of eggs hatched than those reared on *Chlorella* alone. This suggests that the addition of yeast to the *Chlorella* diet may be beneficial for the larvae.

The results of this study also indicate that the larvae of *A. nigrum* are able to utilize *Chlorella* as a food source. The larvae reared on *Chlorella* plus yeast showed a higher percentage of eggs hatched than those reared on *Chlorella* alone. This suggests that the addition of yeast to the *Chlorella* diet may be beneficial for the larvae.