Historias de Matemáticas

Sobre las sumas de Bernoulli

On the sums of Bernoulli

Federico Ruiz López

Revista de Investigación

Volumen VIII, Número 2, pp. 109–134, ISSN 2174-0410
Recepción: 4 Jun'18; Aceptación: 26 Jul'18

1 de octubre de 2018

Resumen

Es conocida por muchos la anécdota que contaba el propio *K. F. Gauss (1777-1855)* sobre sus primeros años en la escuela primaria, cuando impresionó a su malhumorado profesor de matemáticas, con un procedimiento muy ingenioso sobre la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética. En cambio no es materia tan conocida que cien años antes, uno de los matemáticos más sobresalientes de la familia Bernoulli, *Jacob Bernoulli (1654-1705)* (Jacques en francés o James en inglés), dejaba para la posteridad una obra brillante, que bien podría considerarse el primer gran tratado de combinatoria y probabilidad: *el Ars Conjectandi (1713)*. En esta genial obra, de lectura altamente recomendable, aparece un resultado en buena medida muy superior a la suma de Gauss. ¿Qué les parece si calculamos la suma de los 1000 primeras potencias de 10 de los números naturales? Eso si, con lápiz y papel, o pluma, que eran las herramientas que contaba nuestro querido profesor Bernoulli en aquellos tiempos.

Esta artículo expone algunas de las ideas esenciales que le llevaron a realizar tal propósito y que además fueron el origen de unos números que hoy llevan su nombre: *los números de Bernoulli.*

Palabras Clave: Familia Bernoulli, Ars Conjectandi, sumas de potencias, números de Bernoulli.

Abstract

It is known by many the story that had the proper *K. F. Gauss* about his early years in elementary school, when he impressed his grumpy professor of mathematics, with an ingenious procedure on the sum of the first 100 terms of a progression arithmetic. In contrast material is not so well known that a hundred years ago, one of the most outstanding mathematicians of the Bernoulli family, *James Bernoulli (1654-1705)*, left to posterity a brilliant work, which could well be considered the first major combinatorics and probability treaty: *the Ars Conjectandi (1713)*. In this great work, highly recommended read, a result appears very largely greater than the sum of Gauss. How about if we calculate the sum of the 1000 first powers of 10 natural numbers? That if, with pencil and paper or pen, they were the tools our beloved teacher Bernoulli had in those days.

This article discusses some of the key ideas that led him to make such purpose and who were also the origin of numbers that now bear his name: *Bernoulli numbers.*

Keywords: Bernoulli family, Ars Conjectandi, sums of powers, Bernoulli numbers.

1. Sumando potencias de raíces de polinomios: el método de Newton.

La teoría de números encierra resultados de gran belleza. En ocasiones, problemas aparentemente simples, generan toda una teoría matemática de gran complejidad. En este artículo vamos a tratar de descifrar las técnicas empleadas por *Jacob Bernoulli*, a finales del siglo XVII, para encontrar los valores de las sumas

$$S_n(p) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

con $n, p \in \mathbb{N}$. Observar que para valores de p negativos obtendríamos la versión algebraica de la conocida *función zeta de Riemann*,

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

definida inicialmente en la región $R = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) > 1\}$ y cuyo estudio es fundamental en la moderna *Teoría Analítica de Números*.

Antes de introducirnos en la historia y en el pensamiento matemático de la época, vamos a tratar en esta sección un problema previo, un tanto más general, que nos muestra como van apareciendo estructuras numéricas a partir de sucesiones definidas de modo recurrente. Aunque no lo parezca, esta idea es esencial en toda nuestra exposición, y es en cierto modo, una generalización de las propiedades que se atribuyen a los números del *Triángulo de Pascal*. El problema en sí fue abordado por grandes matemáticos a lo largo de la historia, como *Newton (1643-1727)*, *Euler (1707-1783)* o *Lagrange (1736-1813)*.

Para ilustrar todo esto, podemos comenzar considerando el polinomio

$$p(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

Sabemos, por el *Teorema Fundamental del Álgebra*, que dicho polinomio posee cinco raíces complejas. Se plantea el problema de calcular la suma de los cuadrados, cubos, quintas potencias o en general

$$S_p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \alpha_3^p + \alpha_4^p + \alpha_5^p$$

siendo $\alpha_i \in \mathbb{C}$, las distintas raíces del polinomio para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y $p = 1, 2, 3, \ldots$

Inicialmente el problema se presenta complicado si pretendemos atacarlo de manera directa. Es conocido que no existe un procedimiento general para resolver ecuaciones de grado superior a 4, por lo que la dificultad es añadida. Tendremos que ser un poco más ingeniosos para acometer nuestra labor.

1.1. Un caso sencillo

Para dilucidar un procedimiento que simplifique nuestra tarea podemos comenzar con un caso más simple, como es el caso de una ecuación de grado dos. De hecho, si α y β son las raíces del polinomio

$$x^2 - sx + p = 0$$

resulta claro que

$$s = \alpha + \beta \qquad p = \alpha \cdot \beta$$

Diseñamos un algoritmo eficiente para determinar el valor de

$$y_n = \alpha^n + \beta^n$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Observar que $y_0 = 2$ y que para diferentes valores de n se van obteniendo

$$y_1 = \alpha + \beta = s$$

$$y_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha \cdot \beta = s^2 - 2p$$

$$y_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta \cdot (\alpha + \beta) = s^3 - 3sp$$

La ley de recurrencia en este caso, la podemos obtener de manera sencilla si observamos que

$$y_{n-1} \cdot s = (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})(\alpha + \beta) = \alpha^n + \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \beta\alpha^{n-1} =$$

$$= y_n + \alpha\beta(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) = y_n + py^{n-2}$$

esto es,

$$y_n = s \cdot y_{n-1} - py_{n-2}$$

Más adelante veremos un razonamiento más general que nos proporciona el mismo resultado, pero válido para polinomios de cualquier grado. Por la teoría de sucesiones definidas por recurrencia, buscamos las raíces del polinomio característico

$$x^2 - sx + p = 0$$

obteniendo la expresión explícita de y_n, en la forma

$$y_n = \left(\frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}\right)^n + \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}\right)^n$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Se comprueba que efectivamente los primero valores de n nos proporcionan los resultados ya calculados:

$$y_0 = 2 \qquad y_1 = s \qquad y_2 = s^2 - 2p \qquad y_3 = s^3 - 3ps$$

Por tanto, denotando por $\Delta = s^2 - 4p$ el valor del discriminante, podemos desarrollar ambas potencias, haciendo uso de la fórmula del binomio,

$$\left(\frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(s^n + \binom{n}{1}s^{n-1}\sqrt{\Delta} + \binom{n}{2}s^{n-2}\Delta + \binom{n}{3}s^{n-3}\sqrt{\Delta^3} + \ldots\right)$$

$$\left(\frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(s^n - \binom{n}{1}s^{n-1}\sqrt{\Delta} + \binom{n}{2}s^{n-2}\Delta - \binom{n}{3}s^{n-3}\sqrt{\Delta^3} + \ldots\right)$$

y sumando las dos expresiones término a término

$$y_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left(s^n + \binom{n}{2}s^{n-2}\Delta + \binom{n}{4}\Delta^2 + \ldots\right)$$

Tanto esta expresión, como la ley de recurrencia de la que deriva, nos permite elaborar una tabla con los primeros valores:

De la tabla anterior podemos extraer varias consecuencias. La primera de ellas, es que si los coeficientes del polinomio son números enteros, el valor de la suma de sus potencias, siempre es un número entero, ya sean raíces reales o complejas. La segunda es que existe una pauta de regularidad en los coeficientes, una *ley de formación* para la expresión general del tipo:

$$y_n = s^n + a_n ps^n + b_n p^2 s^{n-2} + c_n p^3 s^{n-6} + \cdots$$

y_n	**Expresión**
y_0	2
y_1	s
y_2	$s^2 - 2p$
y_3	$s^3 - 3ps$
y_4	$s^4 - 4ps^2 + 2p^2$
y_5	$s^5 - 5ps^3 + 5p^2s$
y_6	$s^6 - 6ps^4 + 9p^2s^2 - 2p^3$
y_7	$s^7 - 7ps^5 + 14p^2s^3 - 7p^3s$
y_8	$s^8 - 8ps^6 + 20p^2s^4 - 16p^3s^2 + 2p^4$
y_9	$s^9 - 9ps^7 + 27p^2s^5 - 30p^3s^3 + 9p^4s$
y_{10}	$s^{10} - 10ps^8 + 35p^2s^6 - 50p^3s^4 + 25p^4s^2 - 2p^5$

Por ejemplo, $a_n = -n$, $b_n = \frac{n(n-3)}{2} \ldots$ Estas secuencias se obtienen a partir de leyes de recurrencia de la forma

$$b_{n+1} - b_n = a_{n-1}$$

para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Observar que esta ley de formación determina una expresión general

$$b_{n+1} = b_1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Por ejemplo si suponemos que $b_1 = 2$ y $a_k = k$,

$$b_n = b_1 + \sum_{k=0}^{n-2} k = 2 + (1 + 2 + 3 + \cdots (n-2)) = 2 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2 - 3n + 2}{2} + 2 = \frac{n^2 - 3n + 6}{2}$$

De igual modo podemos definir una nueva sucesión a partir de b_n,

$$c_n = c_1 + \sum_{k=0}^{n-2} b_k$$

y continuar así indefinidamente. Estos tipos de sucesiones son precisamente las que se obtienen sumando filas diagonales en el triángulo de Pascal. Jacob Bernoulli se dio cuenta de muchas de estas propiedades como veremos mas adelante, obteniendo unas relaciones entre estos números no muy conocidas, pero realmente útiles a nuestros propósitos.

Volviendo a nuestro problema original, si consideramos por ejemplo el polinomio

$$x^2 - x + 1 = 0$$

cuyas raíces son complejas conjugadas, podemos asegurar que, tomando $s = p = 1$, la suma de sus décimas potencias será

$$y_{10} = 1 - 10 + 35 - 50 + 25 - 2 = -1$$

Es más, podemos conjeturar que la suma de los coeficientes de la secuencia que define y_n sólo toma los valores ± 1 ó ± 2, en función de la característica modular de n. Aunque para esto se necesita un análisis más detallado.

En particular queda demostrado que

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^{10} = -1$$

1.2. El caso general

Las ecuaciones de *Cardano-Vieta* establecen la correspondencia entre los coeficientes de un polinomio y ciertas relaciones simétricas de sus raíces. Pero llegando un poco más allá, los matemáticos estudiaron la posibilidad de expresar la suma de potencias de dichas raíces en función de los coeficientes del mismo.

La idea original fue tratada por *Albert Girard* en 1629 y posteriormente por *Isaac Newton* en 1707. A continuación expondremos la deducción de estas fórmulas hecha por *Leonhard Euler* (equivalente a la de Newton), para relacionar raíces y coeficientes. Su demostración que data de 1750, es una combinación genial de álgebra y cálculo diferencial, para llegar a un resultado ciertamente elegante. En palabras de W. Dunham *"… su razonamiento es tan delicioso y tan completamente euleriano que merece nuestra atención."*

TEOREMA (Euler, 1750): *Si el polinomio de grado n*

$$P(y) = y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} + \cdots \pm N$$

se descompone en factores de la forma

$$(y - r_1)(y - r_2)(y - r_3) \cdots (y - r_n)$$

entonces si denotamos por $S_p = \sum_{k=1}^{n} r_k^p$, se tiene

$$S_1 = A$$

$$S_2 = AS_1 - 2B$$
$$S_3 = AS_2 - BS_1 + 3C$$
$$S_4 = AS_3 - BS_2 + CS_1 - 4D$$
$$S_5 = AS_4 - BS_3 + CS_2 - DS_1 + 5E$$

y así sucesivamente.

Demostración: El objetivo de Euler era relacionar los coeficientes del polinomio $A, B, C, \ldots, N$ y sus raíces $r_1, r_2, \ldots r_n$. Su primer paso sorprendentemente fue tomar logaritmos

$$\ln(P(y)) = \ln(y - r_1) + \ln(y - r_2) + \cdots + \ln(y - r_n)$$

y derivar ambos miembros, obteniendo:

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = \frac{1}{y - r_1} + \frac{1}{y - r_2} + \cdots + \frac{1}{y - r_n}$$

Luego convirtió cada una de estas fracciones simples en una serie geométrica equivalente:

$$\frac{1}{y - r_k} = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{1 - \frac{r_k}{y}}\right) = \frac{1}{y}\left(1 + \frac{r_k}{y} + \frac{r_k^2}{y^2} + \frac{r_k^3}{y^4} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{y} + \frac{r_k}{y^2} + \frac{r_k^2}{y^3} + \frac{r_k^3}{y^4} + \cdots$$

Sumando para $k = 1, 2, \ldots n$, Euler consigue expresar la función racional $\frac{P'(y)}{P(y)}$ como un polinomio infinito, cuyos coeficientes son precisamente las sumas de las potencias de dichas raíces, esto es

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y - r_k} = \frac{n}{y} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right)\frac{1}{y^2} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2\right)\frac{1}{y^3} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^3\right)\frac{1}{y^4} + \cdots$$

Observar que si realizamos el cambio de variable $y = \frac{1}{x}$, cuando y sea suficientemente grande, x tomará valores próximos a cero, en cuyo caso podremos escribir

$$\frac{1}{x}\frac{P'(\frac{1}{x})}{P(\frac{1}{x})} = n + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right) x + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2\right) x^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^3\right) x^3 + \cdots$$

Muchos de estos razonamientos cuando menos han sido criticados en ocasiones, mencionando la *"ligereza"* con que Euler pasa de expresiones finitas a polinomios infinitos, sin más justificación. Con todo, es imposible no impresionarse con la genialidad de sus planteamientos y la belleza de estos resultados.

Si convenimos en llamar

$$E(x) = \frac{1}{x}\frac{P'(\frac{1}{x})}{P(\frac{1}{x})}$$

la función racional obtenida a partir del polinomio P, acabamos de demostrar que esta función es analítica en un entorno del cero (desarrollable en serie de potencias con $|x| < \frac{1}{r_{max}}$), de suerte que

$$E(x) = n + S_1 x + S_2 x^2 + S_3 x^3 + \cdots$$

A esta función obtenida a partir de P, la llamaremos *transformada racional de Euler* del polinomio $P(y)$. Esta transformada es la que resuelve el problema mediante el cálculo

$$S_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n E(x)}{dx^n}(0)$$

No obstante Euler continua sacando provecho de sus ecuaciones. Puesto que

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = \frac{ny^{n-1} - A(n-1)y^{n-2} + B(n-2)y^{n-3} - C(n-3)y^{n-4} + \cdots}{y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} + \cdots \pm N}$$

podemos igualar dicha expresión con la obtenida para las sumas de las raíces, y despejar $P'(y)$

$$P'(y) = P(y) \cdot \left(\frac{n}{y} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right)\frac{1}{y^2} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2\right)\frac{1}{y^3} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^3\right)\frac{1}{y^4} + \cdots \right) =$$

$$= (y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} + \cdots \pm N) \cdot \left(\frac{n}{y} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right)\frac{1}{y^2} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2\right)\frac{1}{y^3} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^3\right)\frac{1}{y^4} + \cdots \right) =$$

$$= ny^{n-1} + \left(-nA + \sum_{k=1}^{n} r_k\right) y^{n-2} + \left(nB - A\sum_{k=1}^{n} r_k + \sum_{k=1}^{n} r_k^2\right) y^{n-3} + \cdots$$

Como este valor es precisamente la derivada del polinomio $P(y)$ y poseen el mismo coeficiente principal ny^{n-1}, todos sus coeficientes debe ser iguales. Comparando términos del mismo grado obtenemos las identidades:

$$-A(n-1) = -nA + \sum_{k=1}^{n} r_k \to S_1 = \sum_{k=1}^{n} r_k = A$$

$$B(n-2) = nB - A\sum_{k=1}^{n} r_k + \sum_{k=1}^{n} r_k^2 \to S_2 = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 = A\sum_{k=1}^{n} r_k - 2B$$

$$-C(n-3) = -nC + B\sum_{k=1}^{n} r_k - A\sum_{k=1}^{n} r_k^2 + \sum_{k=1}^{n} r_k^3 \to S_3 = \sum_{k=1}^{n} r_k^3 = A\sum_{k=1}^{n} r_k^2 - B\sum_{k=1}^{n} r_k + 3C$$

Por supuesto se puede seguir comparando para obtener

$$S_4 = AS_3 - BS_2 + CS_1 - 4D$$

$$S_5 = AS_4 - BS_3 + CS_2 - DS_1 + 5D$$

Éstas son las relaciones prometidas, conocidas como *identidades de Newton*. [C.Q.D]

1.3. La solución al problema

Ya estamos en condiciones de abordar el problema original planeado al comienzo de esta sección. Recordemos que partíamos del polinomio

$$p(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

Por lo anterior es claro que, con la notación empleada, $A = 15$, $B = 85$, $C = 225$, $D = 274$ y $E = 120$. Si queremos calcular la suma de las quintas potencias de las raíces de dicho polinomio (que de momento desconocemos), utilizamos las identidades obtenidas, de manera recurrente:

$$S_1 = A = 15$$

$$S_2 = AS_1 - 2B = 225 - 170 = 55$$

$$S_3 = AS_2 - BS_1 + 3C = 825 - 1275 + 675 = 225$$

$$S_4 = AS_3 - BS_2 + CS_1 - 4D = 3375 - 4675 + 3375 - 1096 = 979$$

$$S_5 = AS_4 - BS_3 + CS_2 - DS_1 + 5E = 14685 - 19125 + 12375 - 4110 + 600 = 4425$$

Es decir, la suma de las quintas potencias de las raíces es

$$S_5 = r_1^5 + r_2^5 + r_3^5 + r_4^5 + r_5^5 = 4425$$

Como curiosidad hacer notar que, en este caso, el polinomio se puede factorizar en $\mathbb{Z}(\mathbb{X})$, ya que sus raíces son precisamente los 5 primeros números naturales, esto es

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

y por tanto lo que acabamos de obtener es

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 = 4425$$

2. Las sumas de Bernoulli en el Ars Conjectandi (1713)

Una de las ventajas de vivir en el siglo XXI es, sin duda, el rápido acceso que tenemos a gran cantidad de información. Muchos documentos y obras antiguas se pueden consultar on-line, e incluso descargar en PDF. Antiguos tratados o textos, que hace unos pocos años hubieran sido difíciles de localizar o consultar por cualquiera de nosotros ahora están a nuestro alcance, con un clic de nuestro ratón.

Desde antiguo los matemáticos se han interesado por reducir la incertidumbre, a través de sus cálculos. Quizás sea ésta una de las razones por las que muchos matemáticos se interesaron en los juegos de azar, tanto para mejorar las ventajas en un juego, como para cuestiones más trascendentes. De los primeros tratados sobre probabilidad destacamos una obra que, aunque escrita hace mas de 300 años, ofrece unos resultados que sin duda la sitúan como una de las obras más importantes escritas sobre la combinatoria y probabilidad: el *Ars Conjectandi de J. Bernoulli*.

Figura 1. Jacob Bernolli (1654 - 1705).

Jacob (Jacques o James) Bernoulli nació en Basilea el 27 de diciembre del 1654, curiosamente el mismo año que la probabilidad nació en París. De hecho **1654** es la fecha en la que los historiadores coinciden como el comienzo del desarrollo de la teoría de la probabilidad , cuando dos los más matemáticos más importantes de la época, *Blaise Pascal (1623-1662)* y *Pierre de Fermat (1601-1665)*, comienzan una fructífera correspondencia para discutir ciertos temas relacionados con juegos de azar.

Los problemas planteados por Antoine Gombaud (más conocido como *el caballero de Meré*), a Pascal y otros matemáticos franceses, motivaron la búsqueda de soluciones a múltiples problemas relacionados con los juegos y sus aplicaciones prácticas. Los importantes **números de Bernoulli** no aparecieron en una obra de análisis infinitesimal, sino en la que se considera la producción de Jacob que ha tenido mayor trascendencia: **Ars conjectandi** (El arte de las conjeturas), publicada en Basilea en 1713 por su sobrino Nicolás I, ocho años después de la muerte de su autor.

No obstante, antes incluso de su publicación se habían suscitado grandes expectativas en torno al manuscrito de Jacob Bernoulli, circulando de modo más o menos vago lo que se intuía que podría representar el *Ars Conjectandi* en el avance de la nueva teoría.

Jacob Bernoulli produce gran parte de los resultados que figuran en *Ars Conjectandi* entre 1684 y 1689 , como queda registrado en su diario, *Meditationes*. Cuando comenzó la obra en 1684 a la edad de 30 años, intrigado por problemas combinatorios y probabilísticos , Bernoulli aún no había leído la obra de Pascal *"Sobre la aritmética del triángulo"*, ni de *Johan de Witt (1625-1672)* sobre las aplicaciones de la teoría de la probabilidad. Leibniz, sin embargo, se las arregló para proporcionarle el trabajo de Huygens , y por lo tanto, es a partir de este tratado que *Ars Conjectandi* comienza a elaborarse. En cambio, si que parecía tener conocimiento del contenido, aunque fuera de fuentes secundarias.

Jacob era un entusiasta de las series numéricas, y se las ingenió para añadir al final de su obra un tratado sobre series infinitas, como se puede apreciar en la portada de la figura 2. A pesar de la dificultad que para algunos puede suponer la lectura de un texto antiguo, originariamente escrito en latín, es una delicia ver como van surgiendo los conceptos de probabilidad, números combinatorios, aplicaciones a juegos de azar, o desarrollos numéricos que, salvando la notación de la época, bien supondrían un completo curso de probabilidad numérica. De las cinco partes

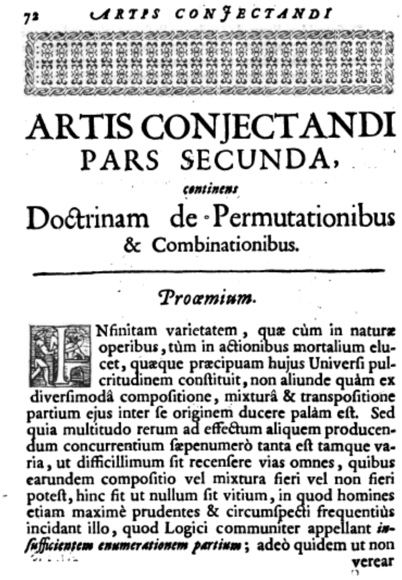
JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

Figura 2. Portada de la obra "Ars Conjectandi" de J. Bernoulli (1713).

en que se halla dividida, nos quedaremos en la segunda, un tratado de combinatoria donde aparecen por primera vez los números que llevan su nombre.

2.0.1. Parte II: Doctrina de las permutaciones y combinaciones



72 ARTIS CONJECTANDI

ARTIS CONJECTANDI
PARS SECUNDA,
continens
Doctrinam de Permutationibus
& Combinationibus.

Proœmium.

INfinitam varietatem, quæ cùm in naturæ operibus, tùm in actionibus mortalium elucet, quæque præcipuam hujus Universi pulcritudinem constituit, non aliunde quàm ex diversimodâ compositione, mixturâ & transpositione partium ejus inter se originem ducere palàm est. Sed quia multitudo rerum ad effectum aliquem producendum concurrentium sæpenumerò tanta est tamque varia, ut difficillimum sit recensere vias omnes, quibus earundem compositio vel mixtura fieri vel non fieri potest, hinc fit ut nullum sit vitium, in quod homines etiam maximè prudentes & circumspecti frequentiùs incidant illo, quod Logici communiter appellant *insufficientem enumerationem partium*; adeò quidem ut non verear

Figura 3. Parte II: La doctrina de las permutaciones y combinaciones.

La segunda parte del *Ars Conjectandi* ocupa las páginas 72-137 y contiene la doctrina de las permutaciones y combinaciones. Jacob Bernoulli menciona en la introducción que otros matemáticos han tratado este tema antes que él, y sobre todo Schooten, Leibnitz, Wallis y Prestet; y así da a entender que lo que contiene en esta sección no es del todo nuevo.

J. Bernoulli empieza por el tratamiento de las permutaciones; confirma la regla ordinaria para encontrar el número de permutaciones de un conjunto de elementos cuando no hay repetición entre ellos y cuando si se repiten. Escribe los factoriales de los números hasta 12, (ver pag.76) y y como ejemplo ofrece un análisis completo de la cantidad de arreglos del verso.

Tot tibi sunt dotes , Virgo , quot sidera coeli ; (ver art. 40, pág.78) . A continuación, considera combinaciones. Primero encuentra el número total de formas que ponemos tomar una serie de cosas. Primero de uno en uno, luego de dos en dos, luego tomando tres a la vez ...es decir subconjuntos de un conjunto mayor. Procede a encontrar lo que deberíamos llamar al número de combinaciones de n objetos sobre r, y aquí llegamos a la parte en la que añade algo más a los resultados obtenidos por sus predecesores.

Elabora una tabla que en esencia es el **triángulo aritmético de Pascal**, deduciendo muchas de sus propiedades.

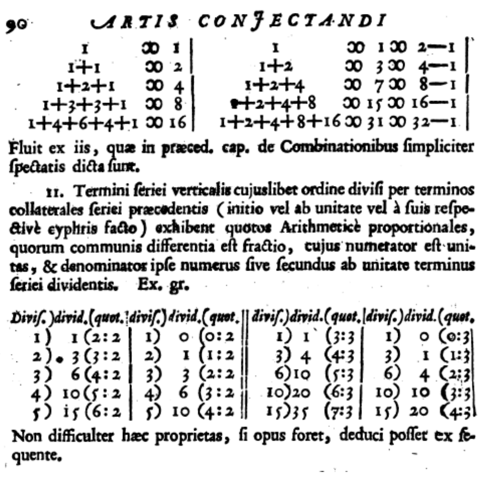
Enumera hasta doce propiedades de estos números que llama *"figurados"*, a partir del triángulo, entre ellas la conocida fórmula para el término general,

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)...}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots}$$

o que la suma de los elementos de cada fila, es una potencia de 2. Evidentemente carecía de la notación moderna y sus desarrollos resultan un tanto laboriosos, pero no por ello dejan de tener una gran relevancia. En la página 90 (ver figura 4) podemos encontrar un par de resultados que en notación moderna podrían escribirse así:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$1+2+4+8+\cdots 2^n=2^{n+1}-1$$


90 ARTIS CONJECTANDI

1	∞ 1	1	∞	1	∞	2—1
1+1	∞ 2	1+2	∞	3	∞	4—1
1+2+1	∞ 4	1+2+4	∞	7	∞	8—1
1+3+3+1	∞ 8	1+2+4+8	∞	15	∞	16—1
1+4+6+4+1	∞ 16	1+2+4+8+16	∞	31	∞	32—1

Fluit ex iis, quæ in præced. cap. de Combinationibus ſimpliciter ſpectatis dicta ſunt.

11. Termini ſeriei verticalis cujuslibet ordine diviſi per terminos collaterales ſeriei præcedentis (initio vel ab unitate vel à ſuis reſpectivè cyphris facto) exhibent quotos Arithmeticè proportionales, quorum communis differentia eſt fractio, cujus numerator eſt unitas, & denominator ipſe numerus ſive ſecundus ab unitate terminus ſeriei dividentis. Ex. gr.

Diviſ.)	divid.	(quot.	diviſ.)	divid.	(quot.	diviſ.)	divid.	(quot.	diviſ.)	divid.	(quot.
1)	1	(2:2	1)	0	(0:2	1)	1	(3:3	1)	0	(0:3
2)	3	(3:2	2)	1	(1:2	3)	4	(4:3	3)	1	(1:3
3)	6	(4:2	3)	3	(2:2	6)	10	(5:3	6)	4	(2:3
4)	10	(5:2	4)	6	(3:2	10)	20	(6:3	10)	10	(3:3
5)	15	(6:2	5)	10	(4:2	15)	35	(7:3	15)	20	(4:3

Non difficulter hæc proprietas, ſi opus foret, deduci poſſet ex ſequente.

Figura 4. Propiedades de los números combinatorios en la obra original

Desarrolla su método para ir calculando estos números combinatorios, a través de productos y divisiones. Es precisamente partir de la suma de una serie de números combinatorios que Bernoulli procede a derivar la suma de las potencias de los números naturales. Encuentra expresiones para la suma de los n primeros, hasta la potencia 10. Y utiliza el símbolo de $\int$ donde actualmente usamos el símbolo de sumatorio $\sum$. A continuación, extiende sus resultados por inducción sin demostración e introduce por primera vez en el análisis los ya conocidos **números de Bernoulli**.

2.1. Las sumas de Bernoulli

En la época en la que se escribió el Ars Conjectandi (finales del siglo XVII), era común la proliferación de tratados de aritmética, que no eran más que compendios de tablas numéricas,con cálculos más o menos laboriosos, y utilizados por astrónomos o ingenieros. De hecho, fue a comienzos del siglo XVII cuando se comenzaron a desarrollar las primeras tablas de logaritmos para simplificar muchos de estos cálculos.

Parece ser que J. Bernoulli era conocedor de estos tratados, que consideraba escasamente ingeniosos. Como el del astrónomo francés, *Ismael Bouilleau*, que en su *Nova Arithmeticae*, elaboraba tablas para calcular las sumas de los cuadrados, cubos, cuartas o quintas potencias de los primeros números naturales.

Quizás fuera por una cuestión de orgullo matemático, que se dispuso a realizar su propia contribución al problema de calcular las sumas

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots n^p$$

conocidas desde entonces como ***sumas de Bernoulli.***

Para su propósito debemos irnos a la página 94 de su obra, donde a partir del triángulo de Pascal, deduce una curiosa propiedad de los números combinatorios (ver figura 5).

Tabula

Combinationum, ſeu Numerorum Figuratorum.

Exponentes Combinationum.

Numeri Rerum Combinandarum.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6.	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7.	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8.	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
9.	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
10.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
11.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
12.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Figura 5. Triángulo de Pascal, en la página 87 con los primeros "números figurados".

Bernoulli hizo la apreciación de que la suma de los elementos de cada columna, hasta cierto orden, es el elemento de inmediato inferior de la columna siguiente. Por ejemplo, si sumamos los 11 primeros elementos de cada columna vamos obteniendo

$$1 + 1 + 1 + \cdots 1 = 11$$

para la segunda

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

para la tercera

$$0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 = 165$$

En notación moderna, recordando que estos números son precisamente números combinatorios, tendríamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{0} = \binom{n}{1} \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{1} = \binom{n}{2}$$

$$\sum_{k=2}^{n-1}\binom{k}{2}=\binom{n}{3} \qquad \sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}=\binom{n}{i+1}$$

para $i=0,1,2\ldots n-1$.

J. Bernoulli utiliza una notación bastante particular. No existían todavía los símbolos ni de factorial ni de número combinatorio, por lo que sus números figurados los describía completamente como producto de factores.

$$\frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{1\cdot 2\cdot 3}$$

No hace uso de paréntesis en sus operaciones algebraicas (en ocasiones emplea una raya horizontal en su lugar) emplea el signo del infinito abierto ∞, como signo de igualdad y nuestro sumatorio $\sum$ por una s alargada, antecedente claro del símbolo de integración *(summas integralis)* $\int$.

Así, las expresiones

$$\int 1\infty n$$

$$\int \frac{n-1}{1}\infty\frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}$$

$$\int \frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\infty\frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{1\cdot 2\cdot 3}$$

expresan en notación moderna las propiedades

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{0}=\binom{n}{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{k}{1}=\binom{n}{2}$$

$$\sum_{k=2}^{n-1}\binom{k}{2}=\binom{n}{3}$$

que generaliza por inducción. Es a partir de aquí cuando comenta la posibilidad de utilizar estas identidades para calcular la suma de los cuadrados, cubos, cuartas y demás potencias de los primeros números naturales, mediante un ingenioso proceso recurrente (ver figura 6).

Por las consideraciones previas escribe

$$\int(n-1)=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\infty\frac{n\cdot n-n}{2}$$

Luego

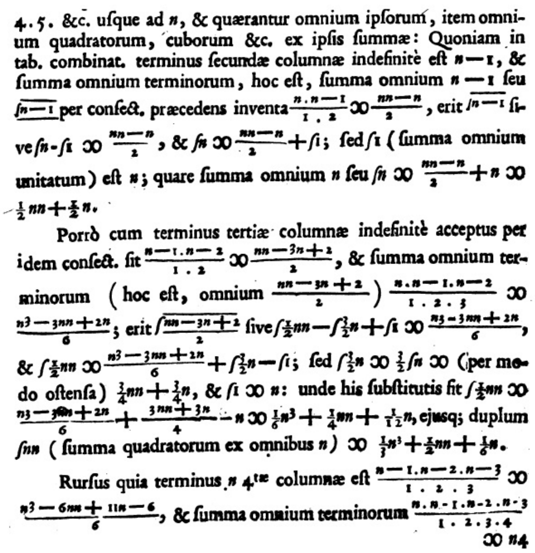
$$\int n-\int 1=\frac{n^2-n}{2}\rightarrow\int n=\frac{n^2-n}{2}+\int 1$$

Como la suma se extiende hasta n, éste es el valor del último sumando, por lo que

$$\int n=\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

Fíjense que en notación actual quedaría en la forma

$$1+2+3+4+\cdots n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$



4 . 5 . &c. uſque ad n, & quærantur omnium ipſorum, item omnium quadratorum, cuborum &c. ex ipſis ſummæ: Quoniam in tab. combinat. terminus ſecundæ columnæ indefinitè eſt $n-1$, & ſumma omnium terminorum, hoc eſt, ſumma omnium $n-1$ ſeu $\int \overline{n-1}$ per conſect. præcedens inventa $\frac{n.n-1}{1.2} \infty \frac{nn-n}{2}$, erit $\int \overline{n-1}$ ſive $\int n - \int 1 \infty \frac{nn-n}{2}$, & $\int n \infty \frac{nn-n}{2} + \int 1$; ſed $\int 1$ (ſumma omnium unitatum) eſt n; quare ſumma omnium n ſeu $\int n \infty \frac{nn-n}{2} + n \infty \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$.

Porrò cum terminus tertiæ columnæ indefinitè acceptus per idem conſect. ſit $\frac{n-1.n-2}{1.2} \infty \frac{nn-3n+2}{2}$, & ſumma omnium terminorum (hoc eſt, omnium $\frac{nn-3n+2}{2}$) $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6}$; erit $\int \overline{\frac{nn-3n+2}{2}}$ ſive $\int \frac{1}{2}nn - \int \frac{3}{2}n + \int 1 \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6}$, & $\int \frac{1}{2}nn \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6} + \int \frac{3}{2}n - \int 1$; ſed $\int \frac{3}{2}n \infty \frac{3}{2}\int n \infty$ (per modo oſtenſa) $\frac{3}{4}nn + \frac{3}{4}n$, & $\int 1 \infty n$: unde his ſubſtitutis ſit $\int \frac{1}{2}nn \infty \frac{n^3-3nn+2n}{6} + \frac{3nn+3n}{4} - n \infty \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}nn + \frac{1}{12}n$, ejusq; duplum $\int nn$ (ſumma quadratorum ex omnibus n) $\infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$.

Rurſus quia terminus n 4[tæ] columnæ eſt $\frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3} \infty \frac{n^3-6nn+11n-6}{6}$, & ſumma omnium terminorum $\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \infty \frac{n4}{}$

Figura 6. Detalle de la obra donde muestra el procedimiento para determinar las sumas.

A continuación, y siguiendo la misma línea de razonamiento considera el producto

$$\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{n^2-3n+2}{2}$$

Sumando ambos términos desde 1 hasta n, llega por un lado a que

$$\int \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} = \frac{n^3-3n^2+2n}{6}$$

y por otro iguala este valor a la suma

$$\frac{n^3-3n^2+2n}{6} = \int \frac{n^2-3n+2}{2} = \int \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}\int n + \int 1$$

Como ya conoce la expresión para $\int n$, despeja $\int \frac{1}{2}n^2$, obteniendo

$$\int \frac{1}{2}n^2 = \frac{n^3-3n^2+2n}{6} + \int \frac{3}{2}n - \int 1$$

Ahora bien

$$\int \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}\int n = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{4}n \qquad \int 1 = n$$

Sustituyendo

$$\frac{1}{2}\int n^2 = \frac{n^3-3n^2+2n}{6} + \frac{3n^2+3n}{4} - n = $$
$$= \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{12}n$$

de donde finalmente obtiene la suma de los cuadrados

$$\int n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

En notación moderna, esta expresión es equivalente a esta otra más conocida

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bernoulli prosigue su búsqueda, para calcular la suma de los cubos. Siguiendo el mismo procedimiento parte de la igualdad

$$\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}=\frac{n^3-6n^2+11n-6}{6}$$

y los suma de 1 hasta n

$$\int\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}=\frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{24}$$

es decir

$$\int\frac{n^3-6n^2+11n-6}{6}=\frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{24}$$

Por propiedades de linealidad de la suma, se tiene

$$\int\frac{1}{6}n^3-\int n^2+\int\frac{11}{6}n-\int 1=\frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{24}$$

de donde

$$\frac{1}{6}\int n^3=\frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{24}+\int n^2-\int\frac{11}{6}n+\int 1$$

Como ya tenemos expresiones para todos los elementos del segundo miembro, podemos sustituir

$$\int\frac{1}{6}n^3=\frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{24}+\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n-\frac{11}{12}n^2-\frac{11}{12}n+n=\frac{1}{24}n^4+\frac{1}{12}n^3+\frac{1}{24}n^2$$

Multiplicando todo por 6, obtenemos finalmente

$$\int n^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

En notación moderna acabamos de probar que

$$1^3+2^3+3^3+\cdots n^3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

En general Bernoulli da las expresiones de las sumas como polinomios sin factorizar, estudiando la ley de formación de sus coeficientes. Se observa que para sumar las potencias cuadradas aparece un polinomio de grado 3, para las potencias cúbicas uno de grado cuatro y así, en general, para la potencia p-ésima un polinomio de grado $p+1$, cuyo coeficiente principal es precisamente $\frac{1}{p+1}$. Calcula dichas expresiones de la sumas hasta la potencia 10, obteniendo una precisa ley de formación.

Polinomios de Bernoulli

$$\int n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$$\int n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

$$\int n^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

$$\int n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}$$

$$\int n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$
$$\int n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$
$$\int n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$
$$\int n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$
$$\int n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}n^3$$
$$\int n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

En notación actual demuestra (ver figura 7) que:

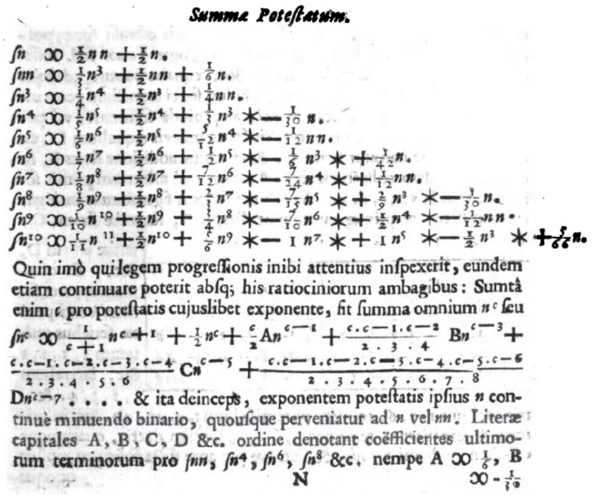
$$\sum n^c = \frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3} +$$
$$+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{c-5} +$$
$$\frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)(c-5)(c-6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}Dn^{c-7} + \cdots$$

Las letras capitales A, B, C, D en orden denotan los coeficientes últimos para las sumas de las potencias pares. Esto es

$$A = \frac{1}{6} \qquad B = -\frac{1}{30} \qquad C = \frac{1}{42} \qquad D = -\frac{1}{30} \qquad E = \frac{5}{66}$$

Observa que la suma de todos los coeficientes de cada expresión debe valer 1. Por ejemplo para $\int n^8$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{7}{15} + \frac{2}{9} + D = 1$$

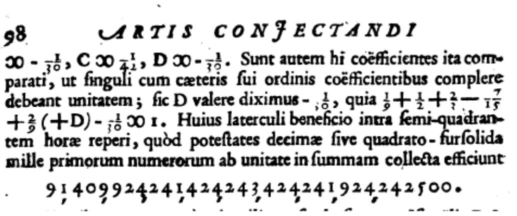

Summæ Poteſtatum.

$\int n \infty \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n.$
$\int nn \infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n.$
$\int n^3 \infty \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn.$
$\int n^4 \infty \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 * - \frac{1}{30}n.$
$\int n^5 \infty \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 * - \frac{1}{12}nn.$
$\int n^6 \infty \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 * - \frac{1}{6}n^3 * + \frac{1}{42}n.$
$\int n^7 \infty \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 * - \frac{7}{24}n^4 * + \frac{1}{12}nn.$
$\int n^8 \infty \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 * - \frac{7}{15}n^5 * + \frac{2}{9}n^3 * - \frac{1}{30}n.$
$\int n^9 \infty \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 * - \frac{7}{10}n^6 * + \frac{1}{2}n^4 * - \frac{1}{12}nn.$
$\int n^{10} \infty \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 * - 1n^7 * + 1n^5 * - \frac{1}{2}n^3 * + \frac{5}{66}n.$

Quin imò qui legem progreſſionis inibi attentius inſpexerit, eundem etiam continuare poterit abſq; his ratiociniorum ambagibus: Sumtâ enim c pro poteſtatis cujuslibet exponente, fit ſumma omnium n^c ſeu $\int n^c \infty \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c.c-1.c-2}{2.3.4}Bn^{c-3} + \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4}{2.3.4.5.6}Cn^{c-5} + \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4.c-5.c-6}{2.3.4.5.6.7.8}Dn^{c-7} \ldots$ & ita deinceps, exponentem poteſtatis ipſius n continuè minuendo binario, quouſque perveniatur ad n vel nn. Literæ capitales A, B, C, D &c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$ &c. nempe A $\infty \frac{1}{6}$, B
N $\infty - \frac{1}{30}$

Figura 7. Detalle de la obra donde aparecen por primera vez las sumas de Bernoulli y su ley de formación.

Con este resultado, calcula la suma de las mil primeras potencias de diez, obteniendo un número enorme de 32 cifras que expone en la página 98. De la traducción del texto, parece ser que tardó menos de un cuarto de hora en calcular la solución correcta. Un sorprendente ejercicio de ingenio y cálculo, sin lugar a dudas (ver detalle en figura 8).


98 ARTIS CONJECTANDI

$\infty - \frac{1}{30}$, C $\infty \frac{1}{42}$, D $\infty - \frac{1}{30}$. Sunt autem hi coëfficientes ita comparati, ut ſinguli cum cæteris ſui ordinis coëfficientibus complere debeant unitatem; ſic D valere diximus $-\frac{1}{30}$, quia $\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{15}+\frac{2}{9}(+D)-\frac{1}{30} \infty 1$. Huius laterculi beneficio intra ſemi-quadrantem horæ reperi, quòd poteſtates decimæ ſive quadrato-ſurſolida mille primorum numerorum ab unitate in ſummam collecta efficiunt

9,140,992,424,142,424,342,424,241,924,242,500.

Figura 8. Suma de las mil primeras potencias de 10.

2.2. Los números de Bernoulli

Hoy conocemos que *las sumas de Bernoulli* se pueden expresar en forma de polinomios, cuyos coeficientes obedecen a una ley de formación muy precisa.

$$\sum_{k=1}^{n} n^p = \sum_{k=1}^{p+1} A_k(p) n^k$$

siendo

$$A_k(p) = \frac{(-1)^{p+1-k}}{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k}$$

y B_i **los números de Bernoulli**. Estos números, nombrados así por *Abraham De Moivre(1667-1754)*, en mención a su creador, se calculan por la recurrencia

$$B_n = (1+B)^n$$

con $B_0 = 1$, y donde aquí las potencias realmente simbolizan coeficientes. Esto es, si por ejemplo hacemos $n = 2$, escribiríamos

$$B_2 = (1+B)^2 = 1 + 2B + B^2 = 1 + 2B_1 + B_2 \rightarrow B_1 = \frac{-1}{2}$$

En general

$$B_n = (1+B)^n = \binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \cdots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} + B_n$$

de donde podemos deducir la ley de recurrencia

$$B_n = -\frac{\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \cdots + \binom{n+1}{n-1} B_{n-1}}{\binom{n+1}{n}}$$

Por ejemplo, para $n = 3$

$$B_2 = -\frac{\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1}{\binom{3}{2}} = -\frac{1 + 3 \cdot \frac{-1}{2}}{3} = -\frac{1 - \frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

Para $n = 4$

$$B_3 = -\frac{B_0 + 4B_1 + 6B_2}{4} = -\frac{1 - \frac{4}{2} + \frac{6}{6}}{4} = -\frac{1 - 2 + 1}{4} = 0$$

Este resultado es generalizable cuando el indice es impar. Es decir, el número de Bernoulli $B_{2n+1} = 0$ para $n = 1, 2, 3 \ldots$ La lista de los doce primeros es:

$$B_0 = 1 \qquad B_1 = \frac{-1}{2} \qquad B_2 = \frac{1}{6} \qquad B_3 = 0 \qquad B_4 = \frac{-1}{30}$$

$$B_5 = 0 \qquad B_6 = \frac{1}{42} \qquad B_7 = 0 \qquad B_8 = \frac{-1}{30} \qquad B_9 = 0$$

$$B_{10} = \frac{5}{66} \qquad B_{11} = 0 \qquad B_{12} = \frac{-691}{2730}$$

No parece existir una ley de formación sencilla para estos números. Los números de Bernoulli pueden expresarse en términos de la **función zeta de Riemann**, lo que implica que en esencia, son valores de la función zeta para los enteros negativos. Así, se puede esperar que tengan propiedades aritméticas de índole no trivial, un hecho que fue descubierto por *Ernst Kummer(1810-1893)* en sus trabajos sobre el Último teorema de Fermat. L. Euler encontró la expresión que muestra dicha relación:

$$B_{2k} = 2(-1)^{k+1} \frac{\zeta(2k)\ (2k)!}{(2\pi)^{2k}}$$

2.3. Aplicaciones. Fórmula de sumación de Bernoulli

Sea $S(n,p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$, se tiene

$$S_n(p) = \frac{1}{p+1}\left[\binom{p+1}{0}B_0 n^{p+1} - \binom{p+1}{1}B_1 n^p + \binom{p+1}{2}B_2 n^{p-1} + \cdots \pm \binom{p+1}{p}B_p n\right]$$

Veamos como se aplica esta igualdad, en algunos casos.

Caso p=1:

$$S_n(1) = \frac{1}{2}\left[\binom{2}{0}B_0 n^2 - \binom{2}{1}B_1 n\right] = \frac{1}{2}\left[B_0 n^2 - 2B_1 n\right] = \frac{1}{2}\left[n^2 + n\right] = \frac{n(n+1)}{2}$$

Caso p=2:

$$S_n(2) = \frac{1}{3}\left[\binom{3}{0}B_0 n^3 - \binom{3}{1}B_1 n^2 + \binom{3}{2}B_2 n\right] = \frac{1}{3}\left[n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{6}n\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{6n^3 + 9n^2 + 3n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Caso p=3:

$$S_n(3) = \frac{1}{4}\left[\binom{4}{0}B_0 n^4 - \binom{4}{1}B_1 n^3 + \binom{4}{2}B_2 n^2 - \binom{4}{3}B_3 n\right] = \frac{1}{4}\left[n^4 + 2n^3 + n^2\right] =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

En particular, tenemos como corolario que la suma de los cubos de los números naturales siempre es un cuadrado perfecto.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots n)^2$$

Caso p=4:

$$S_n(4) = \frac{1}{5}\left[\binom{5}{0}B_0n^5 - \binom{5}{1}B_1n^4 + \binom{5}{2}B_2n^3 - \binom{5}{3}B_3n^2 + \binom{5}{4}B_4n\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[n^5 + \frac{5}{2}n^4 + 10\cdot\frac{1}{6}n^3 - 10\cdot 0 + 5\cdot\frac{-1}{30}n\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{n}{6}\right] =$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

En particular tenemos que 30 divide al numerador, o equivalentemente es un número que acaba en cero y es divisible por 3. Por ejemplo

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots 1000^4 = \frac{6015009999999000}{30} = 200500333333300$$

Caso p=5:

$$S_n(5) = \frac{1}{6}\left[\binom{6}{0}B_0n^6 - \binom{6}{1}B_1n^5 + \binom{6}{2}B_2n^4 - \binom{6}{3}B_3n^3 + \binom{6}{4}B_4n^2 - \binom{6}{5}B_5n\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[n^6 + \frac{6}{2}n^5 + 15\cdot\frac{1}{6}n^4 - 20\cdot 0n^3 + 15\cdot\frac{-1}{30}n^2 - 0\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[n^6 + \frac{6}{2}n^5 + \frac{5}{2}n^4 - \frac{1}{2}n^2\right] =$$

$$= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

Caso p=6:

$$S_n(6) = \frac{1}{7}\left[\binom{7}{0}B_0n^7 - \binom{7}{1}B_1n^6 + \binom{7}{2}B_2n^5 - \binom{7}{3}B_3n^4 + \binom{7}{4}B_4n^3 - \binom{7}{5}B_5n^2 + \binom{7}{6}B_6n\right] =$$

$$= \frac{1}{7}\left[n^7 - 7B_1n^6 + 21B_2n^5 - 35B_3n^4 - 20 + 35B_4n^3 - 21B_5n^2 + 7B_6n\right] =$$

Los números de Bernouilli impares se anulan

$$= \frac{1}{7}\left[n^7 - 7\cdot\frac{-1}{2}n^6 + 21\cdot\frac{1}{6}n^5 + 35\cdot\frac{-1}{30}n^3 + 7\cdot\frac{1}{42}n\right] =$$

$$= \frac{1}{7}\left[n^7 + \frac{7}{2}n^6 + \frac{7}{2}n^5 - \frac{7}{6}n^3 + \frac{n}{6}\right] =$$

$$= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} = \frac{6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n}{42}$$

Como detalle observar que $6n^7 + n \equiv 0 (mod 7)$.

Caso p=7:

$$S_n(7) = \frac{1}{8}\left[\binom{8}{0}B_0n^8 - \binom{8}{1}B_1n^7 + \binom{8}{2}B_2n^6 - \binom{8}{3}B_3n^5 + \binom{8}{4}B_4n^4 - \binom{8}{5}B_5n^3 + \binom{8}{6}B_6n^2 - \binom{8}{7}B_7n\right] =$$

al anular los coeficientes impares

$$= \frac{1}{8}\left[n^8 - 8B_1n^7 + 28B_2n^6 + 70B_4n^4 + 28B_6n^2\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[n^8 - 8\cdot\frac{-1}{2}n^7 + 28\cdot\frac{1}{6}n^6 + 70\cdot\frac{-1}{30}n^4 + 28\cdot\frac{1}{42}n^2\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[n^8 + 4n^7 + \frac{14}{3}n^6 - \frac{7}{3}n^4 + \frac{2}{3}n^2\right] =$$

$$= \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{1}{12}n^2 = \frac{21n^8 + 84n^7 + 98n^6 - 49n^4 + 14n^2}{168}$$

Observar que $S_1(p) = 1$, por lo que la suma de los coeficientes de los polinomios que van surgiendo debe dar dicho valor, i.e.,

$$\frac{1}{p+1}\left[\binom{p+1}{0}B_0 - \binom{p+1}{1}B_1 + \binom{p+1}{2}B_2 + \cdots \pm \binom{p+1}{p}B_p\right] = 1$$

Dejando a un lado de la igualdad los términos pares y al otro los impares, y observando que estos últimos son todos nulos salvo el primero de ellos, podremos tener la relación funcional

$$\binom{p+1}{0}B_0 + \binom{p+1}{2}B_2 + \binom{p+1}{4}B_4 + \cdots \pm \binom{p+1}{p}B_p = \frac{1+p}{2}$$

cuando p sea par. Por ejemplo, en el caso $p = 6$ comprobamos

$$\binom{7}{0}B_0 + \binom{7}{2}B_2 + \binom{7}{4}B_4 + \binom{7}{6}B_6 = 1 + 21\cdot\frac{1}{6} + 35\cdot\frac{-1}{30} + 7\cdot\frac{1}{42} =$$

$$= 1 + \frac{21}{6} - \frac{35}{30} + \frac{7}{42} = \frac{7}{2}$$

Caso p=8:

$$S_n(8) = \frac{1}{9}\left[\binom{9}{0}B_0n^9 - \binom{9}{1}B_1n^8 + \binom{9}{2}B_2n^7 - \binom{9}{3}B_3n^6 + \cdots + \binom{9}{8}B_8n\right] =$$

al anular los coeficientes impares

$$= \frac{1}{9}\left[n^9 - 9B_1n^8 + 36B_2n^7 + 126B_4n^5 + 84B_6n^3 + 9B_8n\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\left[n^9 - 9\cdot\frac{-1}{2}n^8 + 36\cdot\frac{1}{6}n^7 + 126\cdot\frac{-1}{30}n^5 + 84\cdot\frac{1}{42}n^3 + 9\cdot\frac{-1}{30}n\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\left[n^9 + \frac{9}{2}n^8 + 6n^7 - \frac{126}{30}n^5 + \frac{84}{42}n^3 - \frac{9}{30}n\right] =$$

$$= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

Observar que nuevamente la suma de coeficientes es

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{7}{15} + \frac{2}{9} - \frac{1}{30} = 1$$

Expresado de otro modo tendremos

$$S_n(8) = \frac{10n^9 + 45n^8 + 60n^7 - 42n^5 + 20n^3 - 3n}{90}$$

Caso p=9:

$$S_n(9) = \frac{1}{10}\left[\binom{10}{0}B_0n^{10} - \binom{10}{1}B_1n^9 + \binom{10}{2}B_2n^8 - \binom{10}{3}B_3n^7 + \cdots - \binom{10}{9}B_9n\right] =$$

al anular los coeficientes impares

$$= \frac{1}{10}\left[n^{10} + 5n^9 + 45\frac{1}{6}n^8 + 210\cdot\frac{-1}{30}n^6 + 210\cdot\frac{1}{42}n^4 + 45\cdot\frac{-1}{30}n^2\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[n^{10} + 5n^9 + \frac{15}{2}n^8 - 7n^6 + 5n^4 - \frac{3}{2}n^2\right] =$$

$$= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

O equivalentemente

$$S_n(9) = \frac{2n^{10} + 10n^9 + 15n^8 - 14n^6 + 10n^4 - 3n^2}{20}$$

Caso p=10:

$$S_n(10) = \frac{1}{11}\left[\binom{11}{0}B_0n^{11} - \binom{11}{1}B_1n^{10} + \binom{11}{2}B_2n^9 - \binom{11}{3}B_3n^8 + \cdots + \binom{11}{10}B_{10}n\right] =$$

al anular los coeficientes impares

$$= \frac{1}{11}\left[n^{11} + \frac{11}{2}n^{10} + 55\frac{1}{6}n^9 + 330\cdot\frac{-1}{30}n^7 + 462\cdot\frac{1}{42}n^5 + 165\cdot\frac{-1}{30}n^3 + 11\cdot\frac{5}{66}n\right] =$$

$$= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

O equivalentemente

$$S_n(10) = \frac{6n^{11} + 33n^{10} + 55n^9 - 66n^7 + 66n^5 - 33n^3 + 5n}{66}$$

Así, para $n = 2$, debemos obtener el valor 1025, como efectivamente se comprueba con un sencillo cálculo. Utilizando dicha expresión también podemos hacer gala de nuestras habilidades numéricas y emular las posibles operaciones que pudo hacer Bernoulli para deducir la expresión de las sumas de las mil primeras potencias de 10.

Por ejemplo si comenzamos con el caso $n = 10$ observamos que

$$S_{10}(10) = \frac{6\cdot 10^{11} + 33\cdot 10^{10} + 55\cdot 10^9 - 66\cdot 10^7 + 66\cdot 10^5 - 33\cdot 10^3 + 5n}{66} =$$

$$= \frac{(600000000000 + 330000000000 + 55000000000 + 6600000 + 50) - (660000000 + 33000)}{66} =$$

$$= \frac{985006600050 - 66003300}{66} = \frac{984346567050}{66} = 14914341925$$

Es decir, obtenemos con unos pocos cálculos el valor de la suma

$$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots 10^{10} = 14914341925$$

Parece ser que la idea de Bernoulli de usar potencias de 10, para ejemplificar la potencia de sus fórmulas, simplificaba mucho los cálculos. Hemos realizado todas estas operaciones a mano, y realmente no llevan mucho tiempo, puesto que se reducen a sumas con muchos ceros, restas sencillas y una división por 66. Aunque no reproducimos aquí las operaciones realizadas en la cara de un folio, cualquiera puede comprobar estos hechos, para obtener de este modo los valores de las sumas:

$$S_{100}(10) = 1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots 100^{10} = 959924142434241924250$$

$$S_{1000}(10) = 1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots 1000^{10} = 91409924241424243424241924242500$$

valor que coincide con el que Bernoulli expuso en su obra.

2.4. Un nuevo método para $S_n(p)$

Existe un procedimiento puramente algebraico, que permite determinar el valor de las **sumas de Bernoulli**, haciendo uso de las técnicas de álgebra lineal. Expondremos aquí dicho método.

Partimos de la conocida fórmula del *binomio de Newton* para expresar la potencia

$$(k+1)^{p+1} = \binom{p+1}{0} + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{2}k^2 + \cdots \binom{p+1}{p+1}k^{p+1}$$

donde $k \in \mathbb{N}$. Pasando el ultimo sumando al primer miembro

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \binom{p+1}{0} + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{2}k^2 + \cdots \binom{p+1}{p}k^p$$

Si ahora sumamos ambos miembros, desde $k = 1, \ldots, n$, y denotando como antes $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$, obtenemos

$$(n+1)^{p+1} - 1 = \binom{p+1}{0}S_0 + \binom{p+1}{1} + S_1\binom{p+1}{2}S_2 + \cdots \binom{p+1}{p}S_p$$

al ser el primer miembro el resultado de una suma telescópica. Puesto que $S_0 = n$, podemos calcular el valor de cualquier suma S_{n+1}, a partir de las anteriores. Por ejemplo, poniendo $p = 1$ escribiríamos

$$(n+1)^2 - 1 = \binom{2}{0}S_0 + \binom{2}{1}S_1 \rightarrow n^2 + 2n = S_0 + 2S_1 = n + 2S_1$$

de donde

$$S_1 = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

como ya sabíamos. Pero lo interesante de este método es que podemos establecer un sistema de $(p+1)$ ecuaciones con $(p+1)$ incógnitas, del siguiente modo:

$$\binom{1}{0}S_0 = (n+1) - 1$$

$$\binom{2}{0}S_0+\binom{2}{1}S_1=(n+1)^2-1$$
$$\binom{3}{0}S_0+\binom{3}{1}S_1+\binom{3}{2}S_2=(n+1)^3-1$$
$$\cdots$$
$$\binom{p}{0}S_0+\binom{p}{1}S_1+\binom{p}{2}S_2+\cdots\binom{p}{p-1}S_{p-1}=(n+1)^p-1$$
$$\binom{p+1}{0}S_0+\binom{p+1}{1}S_1+\binom{p+1}{2}S_2+\cdots\binom{p+1}{p}S_p=(n+1)^{p+1}-1$$

Expresado en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \cdots \\ S_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \cdots \\ \Delta_{p+1} \end{bmatrix}$$

donde hemos convenido en denotar

$$\Delta_k=(n+1)^k-1$$

para $k=1,2,\ldots,p+1$. El determinante de la matriz de coeficientes es precisamente $(p+1)!$, y aplicando la regla de Cramer, tendremos un proceso directo para calcular el valor de la suma S_p, de acuerdo con la fórmula

$$S_p=\frac{1}{(p+1)!}\cdot\begin{vmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \cdots & \Delta_1 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \cdots & \Delta_2 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \cdots & \Delta_3 \\ \cdots & & & & \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \Delta_{p+1} \end{vmatrix}$$

en íntima conexión con el **Triángulo de Pascal**. Jugando con las propiedades de los determinantes, es posible obtener una reformulación del sistema, disminuyendo en uno el orden del mismo. En cualquier caso, el conocimiento de este determinante nos daría nuevamente la solución al problema.Resulta interesante observar que quizás la naturaleza última de los números de Bernoulli procedan de estas múltiples combinaciones y productos que genera el determinante. Quizás esto sea una explicación de su extraña ley de formación. A día de hoy no lo tengo muy claro.

2.5. Nuevas expresiones

Combinando los resultados de secciones precedentes podemos deducir un hecho interesante. Para ello denotemos por

$$P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-k)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$$

Este polinomio tiene por raíces los n primeros enteros positivos. Observar que $P_n(0)=(-1)^n n!$. De manera general dicho polinomio podrá expresarse en la forma:

$$P_n(x)=x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+\cdots+(-1)^nE$$

De las *identidades de Newton*, sabemos que dichos coeficientes se pueden utilizar para calcular la suma de las potencias de las raíces, de suerte que

$$S_1 = A$$

$$S_2 = AS_1 - 2B$$

$$S_3 = AS_2 - BS_1 + 3C$$

$$\cdots$$

$$S_p = AS_{p-1} - BS_{p-2} + \cdots + (-1)^{p+1} pE$$

donde, como siempre

$$S_k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

para $k = 1, 2, \ldots, p$.

Ahora bien, esto puede entenderse como un sistema de p ecuaciones con p incógnitas $(A, B, C, \ldots, E)$, que en forma matricial tiene la expresión:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ S_2 & -S_1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ S_{p-1} & -S_{p-2} & +S_{p-3} & \cdots & (-1)^{p+1}p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ \cdots \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \cdots \\ S_p \end{bmatrix}$$

donde aquí se suponen conocidas las sumas de Bernoulli, S_p que como bien sabemos, son polinomios de grado superior en uno a la potencia. Además el sistema es triangular y fácilmente resoluble por computación directa, determinando de manera escalonada los valores de $A, B, C, \ldots$ Observar por ejemplo que

$$A = S_1$$

$$B = \frac{S_1^2 - S_2}{2}$$

$$C = \frac{S_3}{3} - \frac{S_1 S_2}{6} - \frac{S_1^3}{6}$$

Es decir, los coeficientes del polinomio se pueden expresar como función de las sumas de las potencias de las raíces.

$$A, B, C, \ldots, E = f(S_1, S_2, \cdots S_p)$$

Pero no olvidemos que representan aquí estos coeficientes. A es la suma de los n primeros números naturales. B es la suma de los productos por parejas de las raíces. C es la suma de los productos de tres raíces distintas y así sucesivamente. De este modo, tenemos que

$$\sum_{1 \le i \le n} i = S_1$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} i \cdot j = \frac{S_1^2 - S_2}{2}$$

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} i \cdot j \cdot k = \frac{S_3}{3} - \frac{S_1 S_2}{6} - \frac{S_1^3}{6}$$

y así con todos.

Resulta interesante considerar el caso del polinomio

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{x}{k})$$

Este polinomio de coeficientes racionales es el único polinomio que tiene por raíces los n primeros enteros positivos y además $P_n(0) = 1$ La cuestión que se plantea es si es posible extender dicho polinomio cuando n es suficientemente grande, esto es, si admite prolongación analítica. Observar que para el caso de ceros en $\mathbb{Z}$, dicha prolongación si existe. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}$$

es una función analítica cuyos ceros son precisamente $\mathbb{Z} - \{0\}$, con $f(0) = 1$. La naturaleza de estos tipos de funciones están en íntima conexión con problemas relevantes de la teoría analítica de números.

3. Consideraciones finales

El estudio de los textos antiguos nos ofrece una visión novedosa de cómo era la Matemática siglos atrás. El uso de la notación, el comentario de contemporáneos, las estrategias usadas, nos proporcionan una visión más amplia de la ciencia y su época. Bien es cierto que los tratados de Matemática que llegan a nuestras manos suelen ser copias de copias de trabajos de grandes obras, que en ocasiones pierden la frescura de la idea original. Es por esto que compartimos ampliamente el pensamiento de *H.Abel(1802-1829)*, cuando le preguntaban cómo había progresado tanto en sus investigaciones matemáticas. La respuesta era contundente: *"... leyendo a los maestros, no a los discípulos"*.

El *"Ars Conjectandi"* de J.Bernoulli es una obra que comienza con un tratado de Huygens, pero llega mucho más allá. No sólo se introduce el concepto de distribución binomial, sino que se expone por primera vez con rigor la **ley débil de los grandes números**, lo que hoy conocemos como el **Teorema de Bernoulli**:*la frecuencia estadística de un suceso tiende al valor teórico esperado, cuando el número de experimentos es suficientemente grande*.

$$\left|\frac{f(A)}{n} - p(A)\right| \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

La aparición de la obra **Ars Conjectandi** en el mundo científico tuvo una repercusión muy fuerte en el campo del cálculo de probabilidades, tanto por el avance de nuevos resultados y perspectivas como por la sistematización y el enriquecimiento de lo ya conocido. Como afirma Gouraud:

"El Ars Conjectandi cambió el aspecto del cálculo de probabilidades y la originalidad del genio, cautivó, desde su aparición, la atención universal (...)"

Referencias

[1] BERNOULLI, Jakob, *"Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis"*, Basilea (1713): Thurneysen Brothers.

[2] BERNOULLI, Jakob, *"The Art of Conjecturing, together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis"*, traducción inglesa de Edith Sylla Baltimore (1713/2005): Johns Hopkins Univ Press, ISBN 0-8018-8235-4

Figura 9. Sello conmemorativo en 1994.

[3] HUYGENS, Christian (1888-1950): *"Oeuvres Complètes"*, 22 volúmenes, Société Hollandaise des Sciences. Nijhoff, La Haye. Los volúmenes usados aquí son: Vol. I, *Correspondance*, 1638-56, publicado en 1888, Vol. XIV, *Calcul des Probabilités; Travaux de mathématiques pures*, 16655-66, publicado en 1920.

[4] TODHUNTER, Isaac, *"A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace"*. Macmillan, London(1865). Reprinted by Chelsea, New York, 1949.

[5] DUNHAM, William *"Euler, el maestro de todos los matemáticos"*. Editorial Nívola, 2ª Edición, Madrid, 2006.

Sobre el autor:
Nombre: Federico Ruiz López
Correo electrónico: federico.ruiz2011@gmail.com
Institución: Instituto de Educación Secundaria Jaime II, Alicante, España.