doi: 10.5007/1808-1711.2017v21n3p427

¿Cuándo una Demostración es Más Perspicua que Otra?

José Seoane

Abstract. Proofs contribute to mathematical knowledge in a richer way than through exclusively of their results. Then, a philosophically relevant task is to inquire how diverse demonstrations of the same result concretize that contribution. This essay compares (following a recent work by John Dawson) various demonstrations of an elementary result of number theory, regarding a specific relation: "…is more perspicuous than …". The main conclusion of this work aims to highlight (in the cases considered) the relevance of the analysis of the strategic and expressive contrasts and its peculiar dynamics, in the understanding of the relationship of perspicuity between proofs.

Keywords: Proof; proof strategies; expressive strategies; philosophy of mathematical practice.

1. Introducción

Oswaldo Chateaubriand, en el capítulo 19 de "Logical Forms", llama la atención sobre la multiplicidad de motivaciones legítimas para elaborar una demostración. En su clásica introducción a la lógica, Enderton afirma categóricamente que una demostración es un argumento que "you give to someone else and that completely convinces that person of the correctness of your assertion" (Enderton 2001, p.109). A propósito señala Chateaubriand:

> It is certainly not the case for (true) intuitionists — e.g. Brower — for whom a proof is a mental construction, that proofs are given to someone else. … But leaving intuitionists aside, why can I not produce proofs for myself without the slightest intention or desire to convince anyone else? I might not even have the intention of convincing myself, since I might be already convinced. I might do it because I want to know if there is a proof of that assertion in a certain context. I might be trying to ascertain something about the context, not the assertion. (Chateaubriand 2005, p.282)

Dos aspectos merecen destacarse de esta cita. En primer término, una demostración puede emprenderse por motivos distintos al de provocar la convicción acerca de su conclusión. Entre otras razones, como bien señala Chateaubriand, porque ya se podría estar convencido de la misma. Es decir, frecuentemente se ofrecen demostraciones de resultados bien establecidos. Un ejemplo paradigmático de esto lo brinda el Teorema de Pitágoras; existen conocidas compilaciones que reúnen un número

Published by NEL — Epistemology and Logic Research Group, Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil.

importante de demostraciones pretendidas del mismo.[1] El objetivo de tales pruebas, obviamente, no es convencer a nadie del teorema.

En segundo término, el pasaje arriba citado sugiere que esa variación en los motivos (diferentes de la búsqueda de establecer la conclusión), no equivale a abandonar el propósito cognitivo. Se trata de aportar al conocimiento, aunque no a través de la conquista del resultado, sino, para usar la expresión de Chateaubriand, proveyendo información matemáticamente relevante del contexto. "Contexto" aquí puede significar, por ejemplo, un sistema axiomático particular. Chateaubriand señala certera y cuidadosamente este aspecto :

> . . . the mathematical proof contains more information than the theorem proved, either in the sense that it involves additional results, or in the sense that it can serve as a model for other proofs (or both). It may also contain more information in the more straightforward sense, emphasized by constructivists, that it spells out in some detail ideas that are only formulated synthetically in the statement of the theorem. Even when the mathematician sees the truth of the new theorem through a proof, its connections to previous knowledge, and, especially, its consequences in relation to old and new knowledge, may not be too clear, and the relationships contained in the proof can be an initial foothold. But that is essentially what interests him about the proof over and above the theorem proved: the additional information. (Chateaubriand 2005, pp.303–304)

Dicho de una forma sintética: una demostración puede aportar al conocimiento matemático no exclusivamente en virtud de la novedad de su tesis. Por ello, algunas veces los matemáticos procuran demostraciones nuevas de resultados conocidos. Ahora bien, en general, ¿qué "motiva" la creación de tales alternativas?

John W. Dawson, en una obra reciente, ofrece una lista de "motivaciones" que pueden alentar la elaboración de nuevas demostraciones — en cierto sentido, podría decirse que dicha lista recoge el espíritu de la primera observación arriba realizada sobre el texto de Chateaubriand. Destaca aquel autor las siguientes motivaciones:[2]

M1) corregir errores o superar vacíos o "huecos" de demostraciones previas;

M2) eliminar hipótesis superfluas o discutibles de demostraciones previas;

M3) extender el dominio de aplicación de un teorema;

M4) obtener una demostración más perspicua (que las demostraciones previas).

En términos generales, estas motivaciones son identificadas por Dawson como "primary motives"; este autor señala, además de estas, otras relevantes posibilidades: la búsqueda de la pureza metodológica y, en general, la preocupación por ciertas propiedades o restricciones relacionados a los medios de prueba. Asimismo, agrega Dawson, pueden alentar nuevas demostraciones la prosecución de la mayor elegancia o simplicidad así como la fidelidad a patrones individuales de estilo o pensamiento matemático.[3] Dados los objetivos de este ensayo, la discusión se concentrará en los cuatro puntos arriba apuntados y, especialmente, en el último; no obstante, aquellos otros ítems referidos poseen un interés innegable.

En línea con el segundo aspecto sugerido por Chateaubriand, cabe resaltar que estos motivos o propósitos resultan cognitivamente relevantes. En tal sentido, podría ponerse el acento, más que en la dimensión motivacional, en las diversas "relaciones" o "papeles epistémicos" que cumplen las "nuevas" demostraciones. Para hacer explícito este cambio de énfasis, podría reescribirse así la lista anterior:

R1) la demostración "nueva" corrige errores, o supera vacíos o "huecos" de demostraciones previas;

R2) la demostración "nueva" elimina hipótesis superfluas o discutibles de demostraciones previas;

R3) la demostración "nueva" extiende el dominio de aplicación de un teorema;

R4) la demostración "nueva" es más perspicua que las demostraciones previas.

Esta reformulación, al concentrarse en la relación epistémica entre las demostraciones, puede proponer "ordenamientos" no necesariamente coincidentes con el orden histórico de aparición de las mismas. Dicho de otra forma, "nueva" y "previa" son aquí predicados relativos al análisis, no suponen (necesariamente) respetar la sucesión histórica. Dawson enfatiza la dimensión motivacional (el capítulo 2 antes referido se titula, precisamente, "Motives for finding alternative proofs"), no obstante, este autor alude ocasionalmente a la dimensión aquí jerarquizada.[4] Podría pues entenderse la opción epistémica adoptada en este ensayo como una radicalización de estas últimas observaciones; los eventuales conflictos o desajustes entre serie "histórica" y "serie analítica" pueden luego interpretarse como una consecuencia de tal alternativa. Sin embargo, cuando ambas coinciden, la información histórica puede resultar un recurso extremadamente valioso para la comprensión de la relación.

Dawson estudia en su obra múltiples casos, identificando formas variadas de manifestarse las cuatro relaciones entre demostraciones arriba señaladas. Uno de esos casos se refiere a la suma de enteros y, especialmente, cómo algunas de esas demostraciones son más perspicuas que otras. El propósito de esta exposición es *comparar* entonces cuatro demostraciones de un resultado básico de suma de enteros, apoyándose en las observaciones de aquel autor; tal comparación procurará *complementar* su análisis, incluyendo la distinción explícita de dos dimensiones relevantes: estratégica y expresiva. La conjetura principal es que la interacción entre estas dimensiones permite (en al menos algunas situaciones) una comprensión más refinada de la relación R4.

2. Una digresión previa: comparando las relaciones epistémicas

Una mirada rápida a las cuatro motivaciones propuestas por Dawson revela diferencias importantes. Especialmente, si se las entiende no como "motivos" o "estímulos" sino como relaciones epistémicas específicas, valiosas en el desarrollo del conocimiento matemático. En este sentido, los párrafos que siguen no pretenden reproducir fielmente el pensamiento del autor referido, sino más bien servirse de sus reflexiones para razonar el problema que él brillantemente ha colocado. Solo a los efectos de remarcar este énfasis relacional y epistémico, se usó "R", en lugar de "M", precediendo la descripción de cada una de ellas.

La relación epistémica R1 contrasta fuertemente con las restantes. Esta supone una demostración (en el sentido fuerte) de una proposición que solo contaba con demostraciones (en un sentido débil). Es decir, se trata, simplemente, de ofrecer una demostración de una proposición hasta ese momento no demostrada. Por supuesto, Dawson es consciente de esta diferencia. Dado su enfoque motivacional, su respuesta es contextual-histórica: cierta demostración (en un contexto histórico dado) es corregida a la luz de otros criterios de rigor matemático (correspondientes a un cierto contexto histórico posterior). Pensar la cuestión desde un punto de vista epistémico, supone admitir criterios de rigor diversos o, si se prefiere, exigencias distintas para caracterizar qué cuenta como una demostración — por ejemplo, como apunta el autor estudiado, requisitos que regimentan contextos matemáticos propios de momentos históricos diversos. Si no fuera así, la situación quedaría mejor descripta, más que como un caso de *comparación* de demostraciones, como la aparición de *la* demostración, cuando antes *strictu sensu* no existía ninguna. Esto no puede decirse respecto de R3 y R4.

El punto de vista epistémico es perfectamente compatible con la sensibilidad histórica; simplemente el énfasis se concentrará en el análisis comparativo entre ambas tramas demostrativas, orientado a identificar la pertinencia de las críticas (a la demostración "vieja") y la adecuación de la "terapia" propuesta (a través de la demostración "nueva"). El caso histórico presentado por Dawson resulta plenamente adecuado para ejemplificar M1: los defectos o insuficiencias en términos de rigor atribuidos a la geometría euclídea y su superación por la propuesta hilbertiana.[5] Es absolutamente indiscutida la convicción de Hilbert acerca de la imperfección de las demostraciones originales euclídeas (en términos de rigor) y la necesidad de superarlas vía una nueva axiomatización. Desde el punto de vista de R1, en cambio, la situación resulta menos neta. Podría sostenerse que en realidad la axiomatización hilbertiana no está solucionando ningún problema previo de rigor, sino introduciendo nuevas demostraciones a partir de un original concepto de rigor — alcanzaría para adherir a tal tesis, por ejemplo, con suscribir los brillantes análisis de Manders al respecto.[6]

Respecto de R2, quienes objetan la(s) hipótesis previamente usada(s), podrían quizá sostener algo semejante a R1: dado que la nueva demostración se ha librado de la(s) misma(s), se tiene ahora quizá una auténtica demostración. Esta última observación sugiere una suerte de naturaleza dual de R2. Esta parece albergar dos opciones claramente diferentes, dependiendo de cómo se clasifica a la hipótesis eliminada. Si se trata de una hipótesis "superflua", el caso recoge aquellas oportunidades donde se logra una demostración más elegante que las previas. "Elegancia" es, obviamente, un predicado estético. Pero eso no supone carezca de valor cognitivo. Más bien aquí se entenderá lo contrario, a saber, una demostración elegante (en el sentido contemplado en esta opción) aporta positivamente nueva información acerca de la red de conocimiento matemático en la cual el resultado se inserta. La ganancia estética importa así ganancia cognitiva.[7] Si se trata de la eliminación de una hipótesis "discutida" o "discutible" el caso se aproxima, en cierta forma, a R1, es decir, desde el punto de vista de aquel que rechaza la hipótesis en cuestión, la nueva trama argumental cuenta como *la* demostración. Como se advierte, podría ensayarse aquí una respuesta histórico-contextual (similar a la propuesta por Dawson en relación a la primera motivación) y, nuevamente, cabría señalar que la misma es absolutamente compatible con el énfasis epistémico.

Sugiere el autor referido, podría albergarse una duda si, al modificar el conjunto de las hipótesis, no se está frente a un nuevo teorema. Es decir, si se disminuyen o debilitan las hipótesis, ¿no se está frente a un teorema más fuerte? Pues si se piensa que se tiene un resultado T probado a partir de un conjunto H de hipótesis y, luego, se consigue demostrar T a partir de P, siendo P un subconjunto propio de H, se tiene $\bigwedge H \rightarrow T$ (la conjunción de los elementos de H implica T) y $\bigwedge P \rightarrow T$ (la conjunción de los elementos de P implica T). ¿No es el último un resultado más fuerte? Dado que Dawson está pensando en primer orden y el Teorema de Deducción asegura (para cualquier conjunto A de axiomas no-lógicos) la equivalencia de $A \vdash T$ y $\vdash \bigwedge A \rightarrow T$, desde el punto de vista formal, podría admitirse se trata de una cuestión de perspectiva optar por una u otra alternativa. Dawson específicamente elige considerar las demostraciones y no los teoremas como *diferentes*. Podría argüirse que esta consideración resulta más acorde a la adopción de una preocupación por la demostración informal, como explícitamente es aquella que domina su reflexión.

R3 depara otro tipo de novedad; la caracterización ofrecida se concentra, no en un contraste original entre dos tramas demostrativas, sino en dos formulaciones distintas de un resultado — obviamente, tal diferencia repercute en aquellas. ¿Dónde reside la diferencia de dichas formulaciones? En el alcance o dominio del resultado en cuestión. Dada esta localización precisa de la distinción, en un sentido muy natural, puede identificarse la demostración del resultado más general como una nueva demostración del teorema original. Por ejemplo, podría decirse que el teorema de completud para lenguajes numerables de primer orden, posee una nueva demostración cuando se lo prueba, en forma más general, para lenguajes numerables y no-numerables de primer orden. Como es evidente hay un teorema (literalmente) nuevo, no exclusivamente una novedosa demostración de un resultado ya obtenido. Una cuestión interesante es, vista la situación desde la perspectiva de la demostración original, cómo esta "subsiste" en la más general, o, visto desde esta última, cómo logra "extender" o "ampliar" aquella.

R4 quizá encierra una dosis mayor de vaguedad y, a la vez, se sitúa directamente en la comparación entre demostraciones. "Ser más perspicua que" es una relación que articula, estilizadamente, dos demostraciones. Más específicamente, el foco se encuentra en las virtudes epistémicas o cognitivas de una cierta demostración respecto de otra. Ahora bien, ¿qué significa que una demostración es "más perspicua" que otra? En una primera aproximación, podría decirse que aquella es más inteligible, más clara, más intuitiva, más comprensiva. Por ejemplo, demostraciones que evidencian no solo la verdad del resultado, sino el "por qué" este es verdad, seguramente, resultan más perspicuas. Es decir, aquellas demostraciones que aportan en forma más eficaz a la *comprensión* del teorema, caen en esta categoría. Dawson específicamente refiere a este caso tradicional. Pero no es este indicador el único relevante para identificar la mayor claridad de una demostración respecto de otra: la comprensión obtenida a partir de una dosis menor de supuestos conceptuales o de pasos argumentales, por ejemplo, podrían considerarse también rasgos determinantes. Un aspecto importante a considerar respecto a R4 es que esta pareciera otorga un protagonismo al receptor o decodificador del teorema (¿más perspicua para quién?). Tal comparación parece apelar así a un contexto más amplio que, exclusivamente, las tramas de las respectivas demostraciones.

En general, R1–R4, en forma más o menos directa, podrían auspiciar "traducciones" en términos de propiedades asociadas (satisfechas por demostraciones). Por ejemplo: "ser más perspicua que" podría dar lugar a la propiedad "ser poco perspicua" (vinculada a la primera proyección de la relación) o "ser altamente perspicua" (vinculada a la segunda proyección). La referencia de Dawson a las objeciones de los matemáticos del siglo XVI y XVII, por ausencia de perspicuidad, a las demostraciones por el método de exhaución, quizá pueda entenderse como ejemplificando una operación de tal tipo.

Finalmente una demostración "novedosa" puede jugar más de uno de estos papeles. Dicho de otra forma, en general, los mismos no son excluyentes o incompatibles. Por ejemplo, una demostración que se presenta como superación de lagunas o vacíos presentes en sus "antecesoras" (R1), puede resultar más perspicua (R4). O una demostración más general (R3), puede esclarecer u ofrecer una comprensión mayor (R4) de un cierto resultado. Pero conviene reparar que estas eventuales articulaciones entre papeles o funciones no agota la comprensión de la emergencia de R4. Una demostración puede ser más perspicua por otras razones. La comparación de cuatro demostraciones de un mismo resultado elemental de teoría de números puede servir como una aproximación a esta cuestión, sin aspirar a agotar su significado.

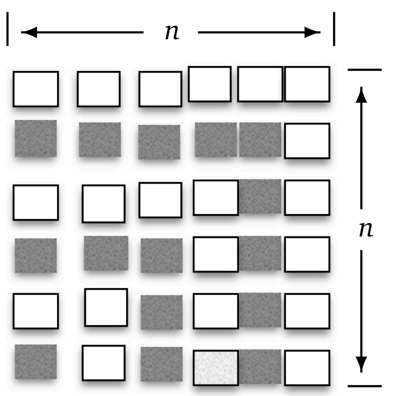
3. Cuatro demostraciones

El resultado elemental a demostrar es el siguiente:

($*$) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

En esta sección se presentarán, siguiendo a Dawson, cuatro demostraciones de ($*$) y se discutirá luego las diferencias en relación a la correspondientes estrategias y los medios expresivos usados en las mismas, prestando especial atención en cada caso a la interacción entre esas dos dimensiones.

1. Prueba con cuadrados (formando un cuadrado)



$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$

2. Prueba por inducción

Sea $n=1$, es trivial: $1=1^2$. Asumiendo, por hipótesis inductiva que el resultado vale para n, se tiene que $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$. Luego, $1+3+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=n^2+(2n+1)$. Es decir, $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$. Luego $1+3+\ldots+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$, que es lo que había que demostrar.

3. Prueba vía método de Gauss

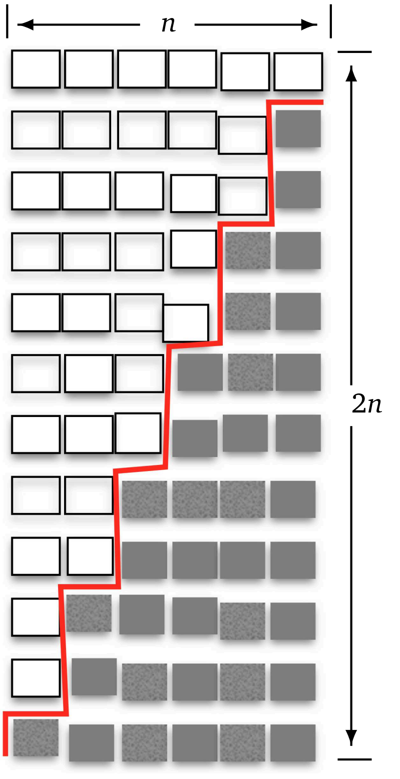
$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=S$$
$$(2n-1)+\ldots+5+3+1=S$$

Luego, sumando por columnas, se tiene que

$$2n + 2n + \ldots + 2n = 2S$$

Luego, dado que se tiene n sumandos, $2n \cdot n = 2S$ o sea $n^2 = S$.

4. Prueba con cuadrados (donde los sumandos forman una escalera)

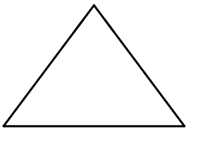


$$2\,[1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] = n \cdot 2n$$

¿Cómo pueden *compararse las demostraciones*? ¿Qué rasgos o diferencias resultan relevantes? R1–R 4 pueden pensarse, estructuralmente, como relaciones binarias. Sus argumentos son, naturalmente, demostraciones. Luego, cuando se procura determinar si, entre dos demostraciones dadas, se cumple una de tales relaciones, es preciso identificar sus contrastes, sus diferencias. ¿Cuáles son las diferencias relevantes? Por ejemplo: dado que se trata de demostraciones informales, las mismas se desarrollan en lenguajes históricos específicos (español, portugués, inglés,...), pero es evidente que las diferencias dimanadas del lenguaje particular usado es matemáticamente irrelevante. Esta nota sugerirá dos tipos o especies de diferenciación relevante:

la diferenciación "estratégica" y la diferenciación "expresiva". La primera atiende a consideraciones acerca de la concepción y ejecución de la prueba; la segunda refiere a los medios de expresión y a sus usos en dicho contexto. La *diferencia estratégica* entre dos demostraciones puede residir en variaciones en el modo de representar ciertos conceptos protagónicos o en los mecanismos o dispositivos de prueba activados en una y otros caso. Por ejemplo, una demostración en teoría de reticulados puede servirse de una caracterización de los retículos puramente algebraica, mientras otra puede explotar su definición en términos de nociones de orden.[8] O la diferencia entre las demostraciones puede consistir, por ejemplo, en el método más general usado por una y otra: directo/indirecto.[9] El contraste representacional es relevante si y solamente si repercute inferencialmente. Para clasificar una demostración como diferente a otra no bastará entonces con que representen (respectivamente) en forma diversa ciertos conceptos importantes; esta disidencia debe asociarse a novedad inferencial. La diferencia expresiva entre dos demostraciones se concentra en los medios empleados en la comunicación respectiva de las mismas. Por ejemplo, puede en un caso usarse exclusivamente el medio lingüístico, mientras que en otro caso apelarse a la combinación de recursos lingüísticos y visuales (lingüística/heterogénea).[10] La intuición básica que orienta este trabajo es la siguiente: es plausible esperar que un análisis de las relaciones en consideración (R1–R4) pueda beneficiarse de una atención cuidadosa al impacto e interacción entre las dos diferenciaciones (estratégica y expresiva). El diagrama siguiente ilustra el punto:

$$\mathrm{R}_i(\mathrm{Dem}_j,\mathrm{Dem}_k) \quad \text{con } 1 \leq i \leq 4 \text{ y } j \neq k$$



$$\mathrm{DEs}(\mathrm{Dem}_j,\mathrm{Dem}_k) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{DEx}(\mathrm{Dem}_j,\mathrm{Dem}_k)$$

DEs y DEx refieren, respectivamente, a diferenciación estratégica y expresiva; la "doble flecha gruesa" sugiere la interacción entre diferenciaciones. El "triángulo" pretende captar la contribución de las diferencias estratégicas y expresivas (y, especialmente, su interacción) a la economía de las relaciones R_i.

Las páginas que siguen discutirán la relación particular R4 ("ser más perspicua que") examinando las cuatro demostraciones presentadas. La discusión se concentrará en analizar tal relación entre dichas demostraciones, a la luz de los dos contrastes aludidos: estratégico y expresivo. Esta perspectiva sugiere pues una primera aproximación rudimentaria a las posibilidades de combinar ausencia o presencia de aquellos dos tipos de diferenciación y la relación específica en estudio. Es decir:

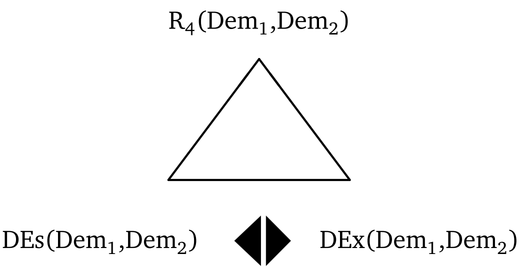
Caso 1	$R4 \longleftarrow$	¿? DEs	DEx
Caso 2	$R4 \longleftarrow$	¿? DEs	no DEx
Caso 3	$R4 \longleftarrow$	¿? no DEs	DEx
Caso 4	$R4 \longleftarrow$	¿? no DEs	no DEx

Conviene consignar que no toda combinación de diferencias auspicia la emergencia de la relación en cuestión (por ello la presencia de los signos de interrogación en el diagrama de arriba). En particular, esta afirmación es esencial para la consideración de los casos 3 y 4: si no hay diferencia estratégica, no puede haber relación de perspicuidad; más aún, si no hay diferencia estratégica que satisfaga ciertas condiciones específicas, no hay relación de perspicuidad.

Esta observación requiere un cierto desarrollo. Se quiere subrayar que si hay relación de perspicuidad, hay diferencia estratégica. En realidad, como se discutirá más adelante, esta implicación es más fuerte: esa diferencia estratégica satisface determinadas propiedades especiales. Pero la conversa del condicional de arriba no vale, es decir, no es cierto que si hay diferencia estratégica (¡sin cualificación!), entonces hay relación de perspicuidad. Sin embargo, es importante retener una idea: la "perspicuidad" se conecta directamente con el "plano estratégico". Son los recursos movilizados en la prueba los que sustentan la relación, y solamente en su vínculo con los mismos es que adquieren relieve los recursos comunicativos específicos activados en la exposición de la misma. Estas consideraciones no desafían una constatación relativamente obvia: puede haber una cierta superioridad en términos de claridad o inteligibilidad de una notación, pero este fenómeno (interesante por derecho propio) no es el que se quiere abordar aquí.[11] Por supuesto, la diferencia estratégica capaz de sustentar la relación de perspicuidad debe encarnar ciertas propiedades. En la próxima sección se estudiarán ejemplos de los cuatro casos arriba descriptos y se discutirán algunas de tales propiedades.

4. "Perspicuidad", estrategia y expresión

Un ejemplo del caso 1 es (expuesto en forma sintética) el siguiente:

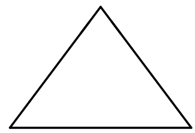


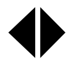
La demostración 1 es más perspicua que la demostración 2. ¿Por qué? Para responder tal pregunta, según la conjetura de esta nota, debiera recurrirse al plano de las diferencias estratégicas y expresivas. En primer lugar, 1 y 2 son diferentes, desde el punto de vista estratégico. Representan, por ejemplo, la sumatoria de modos diversos (en 1 podría decirse la representación de la misma posee una naturaleza, al menos parcialmente, espacial y explicitada; en 2 no ocurre así). Los mecanismos de prueba son evidentemente diversos: la primera no apela a la inducción matemática; la segunda sí. En ambos casos, singularidad representacional y estrategia inferencial se encuentran en perfecta armonía. Pero, desde el punto de vista de la relación R4, ¿tales diferencias son relevantes? La respuesta es sí: la diferencia estratégica evidencia que la comprensión de la primera prueba posee menos supuestos o es más "económica" que el entendimiento de la segunda. Por ejemplo, para seguir la primera prueba no es necesario conocer el mecanismo inductivo, el papel de la base, el papel del "paso", …En este caso particular, la segunda demostración supone el desarrollo de una suma elevada al cuadrado, extremo que puede ignorar el lector de la primera, sin mengua de su comprensión de la trama demostrativa. Esta suerte de "economía cognitiva" es, precisamente, una de las características o propiedades específicas que tornan relevante la diferencia estratégica para la relación de perspicuidad. Es evidente que tal característica de la demostración relativamente "más perspicua" (y, luego, de la diferencia estratégica) ilumina el rasgo señalado en la sección 2 en relación a la exigencia de un menor monto de supuestos conceptuales. Asimismo la ilustración de un "método" constructivo, cuya posibilidad de réplica se deja aprehender con facilidad, trabaja directamente en proveer no solo la convicción acerca del resultado, sino la idea de "por qué" es correcto. Estas características de la primera proyección del par respecto de la segunda, pueden fácilmente traducirse como "propiedades" o "condiciones" que debe satisfacer la diferencia estratégica. Dicho pues en forma breve: la diferencia estratégica explicita el sustento de la relación.

¿Qué ocurre con el plano expresivo? En este ejemplo, resulta indiscutible que existe una diferencia entre ambas demostraciones: la primera es heterogénea, la segunda, lingüística. El aspecto más interesante reside en la articulación entre ambos contrastes. La peculiaridad expresiva de la primera demostración es la base de su especificidad estratégica. Son precisamente las constricciones físicas del diagrama que, al coincidir con las constricciones propias del objeto del raciocinio, permiten obtener el resultado con menor "costo" (en relación a la codificación lingüística). Este fenómeno se conoce en la literatura como "free ride".[12] Dicho concepto suele ejemplificarse a través de casos tales como la evaluación silogística. En el caso de los silogismos, si se recurre a los diagramas de Venn, la representación de las premisas es suficiente para testar su validez: si al representarlas queda expresada la conclusión, no hay necesidad de realizar ningún "trabajo inferencial" extra. Esta situación contrasta con el tratamiento lingüístico. Si, por ejemplo, se apelase a la lógica de primer orden, luego de expresada las premisas, se deberían realizar una serie de pasos inferenciales (eliminación de cuantificadores, reglas proposicionales, introducción de cuantificadores) a los efectos de demostrar la conclusión. En la demostración 1 sucede algo análogo: la elección apropiada de un modo de representar los sumandos, ahorra trabajo inferencial, pues evidencia la conclusión pretendida. Es precisamente la especificidad comunicativa de la primera demostración la que permite representar y resolver el desafío de demostrar la proposición. Quizá valga la pena revisar ahora el esquema de arriba. Puesto en pocas palabras: la interacción entre las diferencias estratégica y expresiva (representada por la "doble flecha") contribuye a iluminar o explicar (vínculo representado por el "triángulo") la relación de perspicuidad. Tal interacción entre ambas diferencias es, como se dijo, de muy fuerte complementariedad.

¿Pueden encontrarse ejemplos del Caso 2? Considérese las demostraciones 3 y 2; siguiendo a Dawson, se puede afirmar que se cumple la relación 4. Si se ensaya un análisis análogo al caso anterior, puede comenzar señalándose la diferencia estratégica entre ambas. La demostración de Gauss resulta diversa en cómo representa la suma (podría decirse: "duplica" la representación de la suma, invirtiendo el orden de los sumandos) y la trama inferencial es menos onerosa, en términos de supuestos, que la prueba inductiva. Representación y política inferencial, en cada demostración, se encuentran en línea. Nuevamente, la comprensión de 2 resulta dependiente de una comprensión de un método relativamente más sofisticado que el que explota 3. Y tal "economía de supuestos" así como una manipulación elemental aritmética redundan en una mayor capacidad de dar cuenta de "por qué" vale el resultado (y no meramente de su corrección). Pero, a diferencia del caso 1, esta "economía" no parece sustentarse fuertemente en los recursos expresivos usados. ¿Por qué? Porque parecería que 2 y 3 no poseen una diferencia neta en términos expresivos (como la que se encuentra, por ejemplo, entre las demostraciones 1, por un lado, y 2 y 3, por el otro). Sin embargo, podría insistirse en la necesidad de apreciar más finamente la supuesta coincidencia expresiva entre ambas demostraciones. Aunque 3 no usa un componente explícitamente visual, la disposición de las dos ecuaciones (con los sumandos ordenados en forma invertida) es un recurso que apela al espacio de una forma que no encuentra análogo en el caso de 2. Este es un aspecto especialmente interesante en el sentido siguiente: parece mostrar que en estos casos, la diferencia estratégica impone cierta "audacia" o "innovación" expresiva (vinculada a la representación pero con una complicidad obvia en relación a la estrategia inferencial). Aún coincidiendo ambas demostraciones, en términos generales, desde el punto de vista expresivo, tal coincidencia no resulta absoluta: el plano expresivo parece evidenciar así algún nivel de sensibilidad a la diferencia estratégica. Esta situación exige luego una lectura más fina de su retrato esquemático:

$R_4(Dem_3,Dem_2)$



$DEs(Dem_3,Dem_2)$  no $DEx(Dem_3,Dem_2)$

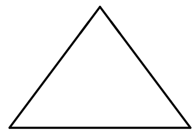
Para expresarlo más claramente: aunque no podría adjudicarse a la interacción entre las diferencias el nivel de complementariedad del caso anterior, sin embargo resulta razonable atribuir a la misma la exposición de una cierta relevante afinidad — tal cual fue argumentado antes. Es notoria, no obstante, la contribución de la explicitación de la diferenciación estratégica para identificar los rasgos propios de la perspicuidad.

Cabe subrayar que, entendida esta última diferencia como aquella capaz de sustentar o clarificar tal relación, los dos últimos diagramas no retratan una situación que se da, en forma exclusiva, en estos ejemplos; trivialmente, representan una articulación general: si se da DEs (satisfaciendo ciertas propiedades precisas), entonces se da R4. Como se consignó antes, si no se da DEs, entonces no se da R4. En otras palabras, DEs (poseyendo ciertas propiedades precisas) es condición suficiente y necesaria, para la presencia de R4. Por supuesto, diferencias estratégicas pueden resultar insuficientes para sustentar la aparición de tal relación entre dos demostraciones (pues podrían diferir las demostraciones, pero no producirse los contrastes relevantes en términos de perspicuidad). Sin embargo, la diferencia estratégica más aquellas propiedades específicas aseguran la perspicuidad. Algunas de tales diferencias se ilustraron en la discusión anterior pero no se trata de una ejemplificación exhaustiva; no obstante, resultan suficientemente elocuentes como para permitir al lector formarse una idea de su funcionamiento.

Los dos últimos diagramas enseñan que, en cambio, la diferencia expresiva puede acompañar o no la diferencia estratégica. El punto aquí, sin embargo, es más sutil: la primera puede resultar imprescindible para la concreción de la segunda (ejemplo del caso 1) o la segunda puede, por así decir, impactar en menor grado sobre la primera (ejemplo del caso 2). En cualquier de las opciones, sin embargo, la atención a la relación entre ambas ilumina la emergencia de la relación de perspicuidad, por el vínculo destacado entre singularidad estratégica y expresión correspondiente. Ahora bien, ¿qué ocurre cuando no se da DEs? Los dos últimos casos contemplan esa situación.

Un ejemplo interesante del caso 3 lo constituye el siguiente:

no $R_4(Dem_3,Dem_4)$



no $DEs(Dem_3,Dem_4)$ $DEx(Dem_3,Dem_4)$

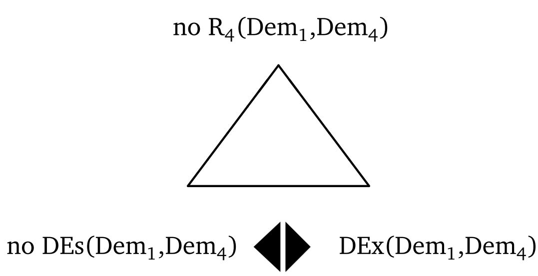
Una observación preliminar. La ausencia o no satisfacción de DEs (por parte de un par de demostraciones) puede revelar, básicamente, dos situaciones: o la ausencia de diferencia estratégica sin más (por ejemplo, las dos demostraciones poseen la misma estrategia) o la ausencia de diferencias estratégicas relevantes en términos de perspicuidad (por ejemplo, las dos demostraciones no resultan comparables en términos de tal relación). Es evidente la relación que hay entre las dos acepciones de la indiferencia estratégica así planteadas: la primera implica la segunda, pero la segunda no implica la primera. A los efectos de ayudar al lector a identificar rápidamente ambas alternativas, para retratar la indiferencia estratégica en el primer sentido o "fuerte" se usará "**no**" en negrita: esta convención permite leer el diagrama de arriba de un modo preciso, a saber, la indiferencia estratégica es en este ejemplo "fuerte": se trata de la misma estrategia la desarrollada por ambas demostraciones. Cuando se trate de la indiferencia "débil", se optará por escribir simplemente "no".

¿Por qué falla DEs? Como señala Dawson, ambas demostraciones se sustentan en, por decirlo metafóricamente, dos movimientos tácticos: invertir y duplicar. En un caso, estas operaciones se ejercen sobre una figura, en el otro, sobre una ecuación. Los recursos cognitivos movilizados en una y otra opción asimismo no parecen diferir. Un aspecto interesante es que podría decirse divergen en el modo de representar, por ejemplo, la suma, sin embargo, por la argumentación anterior, esta diferencia no impacta inferencialmente. i.e. no genera diferencia estratégica. Concluye aquel autor que la demostración 4 es una "representación geométrica" de la demostración 3, es decir, ambas son "igualmente perspicuas" (Dawson 2015, p.15). En el lenguaje de este escrito, no hay diferencia estratégica, luego no vale R4. Pero ¿qué ocurre a nivel expresivo? No cabe duda de la diferencia entre ambas demostraciones: 4 es heterogénea, 3 es lingüística. El punto interesante nuevamente se vincula a la interacción entre los dos planos: si bien las demostraciones 4 y 3 resultan expresivamente diferentes, el recurso espacial arriba observado en la demostración 3 ahora aproxima a ambas (desde el punto de vista expresivo). Es decir, el plano expresivo nuevamente no se manifiesta insensible a las relaciones en el plano estratégico. Este aspecto sutil no queda retratado en el diagrama anterior que, a pesar de ello, evidencia razonablemente bien la relación entre las tres relaciones en juego.

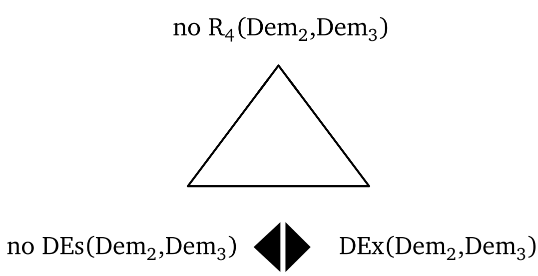
Dicho de forma directa: la no existencia de diferencia estratégica (en sentido fuerte) explica la inexistencia de la relación R4 y la interacción entre los planos estratégico y expresivo (aunque no en la forma plena del primer ejemplo) es sensible a esta ausencia de originalidad estratégica.

Podría preguntarse el lector si no existe la posibilidad de ejemplificar este caso apelando, ya no a la indiferencia estratégica "fuerte", sino a la "débil". La respuesta es positiva. Las demostraciones protagonistas son 1 y 4; se discute inmediatamente este ejemplo.

El último caso a considerar es el caso 4. Este caso contempla una posibilidad especial. Usando las distinciones hechas arriba, es inmediato que no parece razonable esperar ejemplificación de este caso que atribuya indiferencia "fuerte" en el plano estratégico. Pues, en un sentido intuitivo, ¿por qué hablar de dos demostraciones? Ya que no difieren en la estrategia y no difieren en la expresión, ¿cuál sería la diferenciación relevante en este contexto entre ambas? El ejemplo que se propondrá pues supone optar por la alternativa débil. Aunque es trivial, completa el cuadro de las ejemplificaciones:



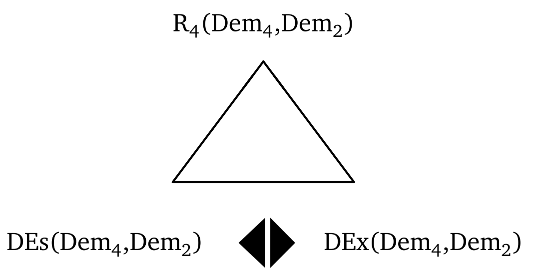
Nada novedoso: no presentan estrategias comparables en términos de perspicuidad y no evidencian diferenciación expresiva. Pero hay, finalmente, una situación más interesante



Las relaciones DEs y DEx son simétricas, pero DEs (más las condiciones específicas aludidas) y R4 no lo son. Más aún: ambas son antisimétricas. En tal sentido, dado que se da R4(Dem_3,Dem_2), puede deducirse no R4(Dem_2,Dem_3) y, a partir de DEs(Dem_3,Dem_2) y el cumplimiento de aquellas condiciones específicas, puede concluirse no DEs(Dem_2,Dem_3). Este ejemplo ilustra la diferencia entre diferencia estratégica y diferencia estratégica cualificada (del modo que se ha propuesto aquí); si se trata, simplemente, de la primera relación la simetría está asegurada, si se trata de la segunda relación, es antisimétrica. Obviamente, la segunda implica la primera, pero la primera no implica la segunda. Podríamos decir, en general, que la relación de perspicuidad entre *j* y *k* coopera en la comprensión del fracaso de tal relación entre *k* y *j*.

5. Observaciones finales

Un nuevo ejemplo del primer caso permitirá resumir las ideas expuestas. El ejemplo es el siguiente:



En lo que respecta a la diferencia estratégica, la situación es la descripta en el comentario del caso 2, es decir, la diferencia entre la demostración 3 y la 2. Pero el punto interesante aquí es la articulación entre los planos estratégico y expresivo. Resulta difícil negar que la "intensidad" del apoyo del primero sobre el último no alcanza los niveles del primer ejemplo del caso 1. Pero, asimismo, el "ilustrar" la estrategia de 3, por parte de los recursos expresivos puestos en obra en 4, fortalece y expande la apelación visual ya presente en 3. Así pues llama la atención sobre un hecho importante: la posibilidad de *gradualidad* en la profundidad de la sociedad estratégico-expresivo.

En síntesis, la conclusión principal de este trabajo apunta a resaltar (en los casos considerados) la relevancia del análisis de los contrastes estratégico y expresivo en la comprensión de la relación de perspicuidad entre demostraciones. Pero, especialmente, la contribución a tal inteligencia del registro de la dinámica estratégico-expresiva. Otros ejemplos de R4, ¿admitirán un tratamiento fecundo a partir del contraste estratégico-expresivo? Por supuesto, las modalidades estudiadas no pueden generalizarse y, especialmente, no corresponde reducir la diversidad expresiva al contraste lingüístico/heterogéneo. ¿Podrá la relación de perspicuidad manifestarse (en otros casos) de formas muy disímiles a estas? El ejemplo del caso 2 muestra variaciones expresivas que no suponen tanto heterogeneidad de medios, cuanto singularidad en el uso de los mismos: ¿cuán rico puede ser este fenómeno? Por ejemplo, dos demostraciones que usan exclusivamente el medio lingüístico, pueden diferir sensiblemente en el modo de representar los conceptos matemáticos en obra y, consecuentemente, evidenciar estrategias disímiles. ¿La complicidad estratégico-expresiva se reflejará también en las otras tres relaciones asociadas a los "primary motives" de Dawson? ¿Y en las restantes motivaciones apuntadas arriba? Por ejemplo, las ideas de Henkin para demostrar la completud de primer orden (para lenguajes numerables) pueden usarse para demostrar tal resultado para lenguajes infinitos en general (ya sean numerables o no-numerables), apelando para hacerlo a recursos matemáticos más potentes. Podría quizá conjeturarse que la interacción estrategia y expresión en ese contexto es menos rica (en principio al menos) que la estudiada en algunos casos discutidos en estas páginas. Pero, en contrapartida, se abre paso una caracterización de la diferencia estrategia que debe dar cuenta de la profundidad o fortaleza de los medios inferenciales puestos en obra.[13] Como el lector seguramente ya advirtió, estas son apenas algunas de las interrogantes que merecerían investigarse en el futuro.

Referencias

Allwein, G.; Barwise, J. (eds.) 1996. *Logical Reasoning with Diagrams*. Oxford University Press.

Barwise, J.; Etchemendy, J. 1991. Visual Information and Valid Reasoning. Reimpreso en Allwein, G.; Barwise, J (eds.) 1996.

Blackwell, A. (ed.) 2001. *Thinking with Diagrams*. Dordrecht: Springer.

Burris, S.; Sankappanavar, H. P. 1981. *A Course in Universal Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Chateaubriand, O. 2005. *Logical Forms. Part II Logic, language, and knowledge*. Campinas: CLE.

Dawson, J. 2015. *Why prove it again? Alternative proofs in Mathematical Practice*. New York: Birkhäuser.

Enderton, H. 2001. *A Mathematical Introduction to Logic*. New York: Academic Press.

Gardies, J. L. 1991. *Le raisonnement par l'absurde*. París: PUF.

Greenberg, M. 1993. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. New York: W. H. Freedman and Company.

Loomis, E. S. 1968. *The Pythagorean Proposition-its Demonstrations Analyzed and Classified, and Bibliography of Sources for Data if the Four Kinds of Proofs*. 2nd. ed. Washington D.C.: NCTM.

Manders, K. 2008a. Diagram-Based Geometric Practice. In: P. Mancosu (ed.) *The Philosophy of Mathematical Practice*, pp.80–133. Oxford: Oxford University Press.

———. 2008b. The Euclidean Diagram. In: P. Mancosu (ed.) *The Philosophy of Mathematical Practice*, pp.80–133. Oxford: Oxford University Press.
Manzano, M. 2006. *Model Theory*. Oxford: Clarendon Press.
Shimojima, A. 1996. *On the Efficacy of Representation*. Ph. D. Thesis, The Department of Philosophy, Indiana University.
———. 2001. The Graphic-Linguistic Distinction. Reimpreso en A. Blackwell (2001).

JOSÉ SEOANE
Instituto de Filosofía-FHCE
UdelaR – Uruguay
SNI
seoanejose2010@gmail.com

RECEIVED: 14/08/2017 REVISED: 22/12/2017 ACCEPTED: 25/01/2018

Notas

[1]Referencias y comentarios sobre algunas de ellas pueden leerse en Dawson (2015), p.25–26. En particular, puede consultarse Loomis (1968).

[2]Véase Dawson (2015), p.7.

[3]Véase Dawsin (2015), cap.2.

[4]Por ejemplo: Preface, p.vii.

[5]Greenberg elocuentemente expresa ese punto de vista al introducir los axiomas de Hilbert: "Quite a few Euclid's proofs are based on reasoning from diagrams. To take these proofs rigorous, a much larger systems of explicit axioms is needed" (Greenberg 1993, p.70).

[6]Véase Manders (2008a; 2008b).

[7]Una discusión general acerca del vínculo entre elegancia matemática y cognición excede el propósito de estas páginas.

[8]Véase, por ejemplo, Burris and Sankappanavar (1981), p.5.

[9]Este contraste posee, como sabe el lector, una historia larga. Un interesante análisis histórico de las demostraciones por el absurdo puede leerse en Gardies(1991).

[10]La noción de "inferencia heterogénea" y el contraste entre perspectiva logocéntrica y heterogénea de la inferencia son introducidas por Barwise y Etchemendy. Véase especialmente Barwise y Etchemendy (1996).

[11]Si tal superioridad no se asocia a una novedad estratégica, difícilmente podría admitirse se trata de dos demostraciones diferentes. Por supuesto, pueden encontrarse situaciones difíciles de clasificar; pero parecería extraño asumir un protagonismo estelar de la diferencia expresiva que dejara incólume el plano estratégico.

[12]Por una discusión sintética del punto puede consultarse Shimojima (2001) . Un desarrollo en detalle de este fenómeno así como de su variante "negativa" puede leerse en Shimojima (1996).

[13]Para ambas demostraciones puede consultarse, por ejemplo, Manzano (2006).