Infancia y Aprendizaje, 1985, 30, 69,79.

«Un redondel con muchas cosas dentro». Eso es un conjunto

Amparo Moreno, Gerardo Echeita, Elena Martín y Cristina del Barrio *

Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Madrid

La introducción de la llamada matemática moderna en las escuelas, a partir de los años 60, obedeció, entre otras razones, al sentimiento de que los niños no llegaban a aprender las estructuras matemáticas elementales a través de la enseñanza de la matemática tradicional. En concreto, se supuso que la enseñanza de la teoría de conjuntos podía ser un instrumento útil para que los niños adquirieran, de forma más adecuada, la noción de número y comprendieran mejor las operaciones aritméticas elementales.

Al comenzar la investigación [1] que este trabajo recoge en parte, nuestro objetivo no era entrar en la polémica matemática tradicional-matemática moderna, que ya había sido profusamente tratada con anterioridad (Freudenthal, 1963; Dieudonné, 1973; Kline, 1973). Nuestro interés se centraba en examinar la comprensión que tenían los niños de algunas nociones de la teoría de conjuntos. El análisis iba encaminado a estudiar la evolución en esa comprensión y a detectar las principales dificultades que los sujetos podían encontrar en el curso de la misma.

Es bien sabido, a partir de las investigaciones realizadas por la escuela de Ginebra (Piaget e Inhelder, 1941; Piaget y Szeminska, 1941), que los conceptos lógico-matemáticos (por ejemplo, la conservación de materia, las clases y relaciones), en un primer momento, no son tales, sino que aparecen ligadas a situaciones concretas y a aspectos perceptivos de la situación. Así, nuestro estudio estaba dirigido a descubrir si el contexto físico en el que aparecen las nociones de la teoría de conjuntos es también relevante para la comprensión que tienen los niños de ellas.

Por otra parte, nos pareció también de gran interés el intentar comprobar si el desarrollo de la conducta clasificatoria, operación lógica elemental que se construye espontáneamente, seguía el mismo curso que la noción de conjunto, fruto de un aprendizaje escolar, y si los sujetos establecían alguna relación entre ambas.

Por último, intentábamos conocer si los niños veían alguna utilidad (o pensaban que se perseguía algún fin concreto) cuando se les pedía que aprendieran los contenidos de la teoría de conjuntos. Como apuntan diferentes autores (Donaldson, 1978; Istomina, 1975), cuando se trabaja con niños preescolares y en los primeros años de la enseñanza primaria, un aspecto esencial que debe tenerse en cuenta es que los motivos e intenciones para realizar una tarea sean inteligibles y humanamente comprensibles. Los adul-

* *Dirección de los autores:* ICE de la UAM. Cantoblanco. 28034 Madrid.

tos, y sólo cierto porcentaje de determinada cultura (Cole, 1971), estamos acostumbrados a trabajar abstrayendo el conjunto de motivaciones concretas, pero los niños no tienen por qué funcionar igual que nosotros.

Según nuestra hipótesis, la comprensión de las nociones de la teoría de conjuntos resultaría muy difícil para los sujetos menores de 12 ó 13 años, y ello no sólo por las limitaciones que impone el desarrollo evolutivo a los sujetos (véase la correspondencia que establece Collis, 1980a, entre estadios del desarrollo y aprendizaje de las matemáticas), sino también por el tipo de enseñanza que se realiza, en general, de estas nociones. A nuestro entender, intentar enseñar teoría de conjuntos a los niños durante la EGB supone caer en dos de los errores más graves que afectan a la enseñanza de las matemáticas.

En primer lugar, la matemática es una disciplina abstracta y formal y las relaciones entre los elementos matemáticos son relaciones entre abstracciones. Pero, como afirma Collis (1980), ese sistema formal no existe para el niño; para él sólo existe la experiencia y su pensamiento opera sobre ella. Cuando intentamos que los niños aprendan teoría de conjuntos estamos pidiéndoles que tomen conciencia de esas operaciones, de su pensamiento y, por tanto, que asimilen uno de los desarrollos últimos, más abstractos y formales, de la teoría matemática. Estamos exigiendo a los sujetos que comiencen por elaborar un código formal y, por tanto, libre de contexto, cuando éste debería ser el último paso y no el primero, máxime cuando la teoría psicológica sugiere que la mayor parte de los preadolescentes y, por supuesto, de los niños menores de siete u ocho años encuentran grandes dificultades en esta tarea (Collis, 1975; Hughes, 1983).

En segundo lugar, la matemática, en general, y la teoría de conjuntos, en particular, se enseña como si se tratara de conocimiento físico en vez del conocimiento lógico-matemático que es. Según Piaget (1977), existen dos tipos de experiencia: la experiencia física, que acumula conocimientos acerca de las propiedades de los objetos sobre los que actúa, y la experiencia lógico-matemática, que acumula conocimientos, no de los objetos, sino de las acciones mismas del sujeto y de sus resultados. Accedemos a la experiencia física a través de la abstracción empírica, que extrae las propiedades de los objetos (color, peso, material, etc.); accedemos a la experiencia lógico-matemática por medio de la abstracción reflexiva, que se realiza a partir de la propia acción, extrayendo las características de ésta, e implica la construcción de relaciones entre objetos (orden, inclusión, inversión, etc.) y, por tanto, la organización de los mismos. Por supuesto, una clase de abstracción no puede darse sin la otra.

El concepto de número o el concepto de conjunto no pueden extraerse simplemente de una observación de la realidad, ya que no son propiedades de los objetos, sino que el niño debe construirlos coordinando las relaciones simples que ha creado él mismo antes entre los objetos (véase Kamii, 1982, para una exposición más detenida de la diferencia entre conocimiento lógico-matemático y conocimiento físico y social).

Sin embargo, frecuentemente, los libros de texto y los profesores enseñan sus ejercicios matemáticos basándose en la experiencia física. Como resultado de esta enseñanza y del momento evolutivo, los niños permanecen centrados en estos aspectos físicos de la situación, teniendo problemas para llegar a una construcción lógico-matemática.

Para comprobar si se daba esta apoyatura física en la comprensión de algunas nociones matemáticas, diseñamos otras tareas referidas al conocimiento de figuras geométricas en distintas posiciones y a la definición y reconocimiento de ángulos. Su análisis y resultados aparecen en otro lugar, centrándonos a continuación en los referentes a la comprensión de algunas nociones de la teoría de conjuntos.

METODOLOGIA

Sujetos.—La investigación se llevó a cabo con una muestra total de 60 niños entre seis y once años, tomándose cinco niños por edad en cada uno de los centros elegidos, dos colegios de Madrid, uno nacional y otro privado. En nuestro análisis no hemos considerado, sin embargo, la clase social. Por lo que respecta al sexo, se han elegido indistintamente niños y niñas, procurando que hubiera, aproximadamente, la mitad por cada curso.

Tenemos entonces la siguiente distribución:

$$5 \text{ sujetos} \times 6 \text{ edades} \times 2 \text{ centros} = 60 \text{ sujetos}$$

Material.—La entrevista no es estrictamente verbal, sino que, además, incluye el manejo de un material concreto para una tarea manipulativa de formación de conjuntos. El material lo constituían los siguientes elementos:

Formas geométricas

Triángulo pequeño azul.
Triángulo pequeño rojo.
Círculo amarillo pequeño.
Círculo amarillo grande.
Rectángulo pequeño azul.
Rectángulo pequeño amarillo.
Cuadrado grande rojo.

Dados

3 verdes.
4 azules.
1 amarillo.
1 rojo.

Animales

2 leones, verde y rojo.
2 jirafas, verde y azul.
2 cabras, verde y azul.
2 hipopótamos, amarillo y gris.
1 elefante.
2 caballos, verde y amarillo.
1 oso hormiguero.
1 pantera.

Números

Pequeñas cartulinas con un número impreso en cada una: 4 «unos», 5 «doses», 2 «treses».

Varias *cuerdas.*

Procedimiento.—Hemos seguido el método clínico de Piaget por considerarlo el más adecuado para este tipo de estudios sobre el pensamiento infantil. Véase la Introducción a Piaget (1926) para una descripción pormenorizada de este método.

La entrevista, de carácter individual, tenía una duración aproximada de veinte minutos y comenzaba con una charla informal para establecer un clima relajado. Además de grabarse en un magnetófono, dos ayudantes recogían todo lo realizado durante la entrevista. El protocolo final se realizaba conjuntamente a partir de las dos fuentes.

Las preguntas que se hicieron a los niños se exponen a continuación, teniendo siempre en cuenta que la flexibilidad del método utilizado hace que la entrevista de un sujeto y otro no sean idénticas, ya que, según el rumbo que sigue el propio pensamiento del niño, se profundiza sobre nuevos aspectos que no estaban previstos en el cuestionario inicial.

Se comenzaba preguntando por la definición de ciertas nociones de la teoría de conjuntos. También se le pedía al sujeto que representara gráficamente esas nociones y, en el caso del conjunto, se le planteaban las situaciones del mismo conjunto que había dibujado, pero rodeado por un diagrama cuadrado —en lugar del habitual redondo— o del conjunto sin rodear, preguntándole si en ambos casos se trataba de conjuntos.

Las preguntas eran las siguientes:

¿Has estudiado conjuntos?
¿Sabes qué es un conjunto? Dibujo de un conjunto.
Representación del conjunto dentro de un cuadrado.
Representación del conjunto sin línea.
¿Por qué se necesita que el conjunto esté rodeado?
¿Qué es el conjunto: la línea o los elementos?
¿Qué es un subconjunto?
¿Qué es la unión de conjuntos? Dibujo.
¿Qué es la intersección de conjuntos? Dibujo.
¿Qué es un elemento?

A continuación, se le pedía que formara conjuntos con el material que teníamos encima de la mesa, una vez que había observado sus características: forma, color, tamaño, etc. Disponíamos de unos cordeles que servían para rodear el material por si los niños querían utilizarlos como representación del diagrama.

Después de esta tarea, se le presentaban al sujeto dos conjuntos, formado cada uno de ellos por cinco elementos iguales (por ejemplo, cinco animales y cinco dados) y se le preguntaba si ambos conjuntos se parecían en algo, a fin de ver si reconocía la equivalencia numérica. A continuación se hacían preguntas acerca de otros puntos de la entrevista y después se volvían a presentar dos conjuntos coordinables o equivalentes, en este caso formados por cuatro elementos distintos (por ejemplo, una cabra, un cuadrado, un número y un dado, y un león, dos números y un círculo) para comprobar si el niño tenía adquirida la noción y era capaz de generalizarla a otra situación.

Por último, planteábamos a los sujetos varias preguntas sobre la existencia de conjuntos en la realidad, sobre la utilidad de su aprendizaje y su relación con las matemáticas:

¿En esta habitación hay conjuntos?
¿Cuando estáis en el recreo, formáis un conjunto? ¿Los árboles son un conjunto?
¿Para qué sirven los conjuntos?
¿Los conjuntos tienen que ver algo con las matemáticas?
¿Se pueden sumar y restar conjuntos?

Análisis.—Hemos analizado las respuestas de forma cualitativa intentando describir la secuencia evolutiva que se da en la comprensión de las diferentes nociones.

Nos ocuparemos, en primer lugar, de la definición y reconocimiento de algunas nociones de la teoría de conjuntos. Pasaremos luego a analizar cómo los niños forman conjuntos con un material determinado para finalizar resumiendo qué utilidad ven en el estudio de estos contenidos.

RESULTADOS

Conjunto.—Dentro de las preguntas sobre la noción de conjunto podemos distinguir: a) las relativas a la «definición», en las que al niño se le pedía una definición verbal y un dibujo del conjunto, y (b) las relativas al «reconocimiento», dirigidas a que el niño juzgara si el dibujo de unos elementos dentro de un cuadrado o de los elementos solos formaban un conjunto.

a) Por lo que se refiere a la *definición* de «conjunto», las respuestas que daban los niños pueden dividirse en cuatro categorías:

i) No saben qué es un conjunto o se trata de respuestas tautológicas.

ii) La definición hace hincapié en la necesidad del diagrama de Euler, confundiendo la noción con su representación. Aquí se encontrarían definiciones de conjunto, tales como «un redondel con cosas dentro» o «un grupo de elementos rodeados». Naturalmente, estas dos respuestas no implican el mismo nivel de comprensión, pero comparten ambas la necesidad *sine que non* de que exista algo que rodee los elementos para que haya un conjunto.

iii) Las definiciones por el ejemplo, denominadas así por Piaget (1924), son menos evolucionadas que las definiciones lógicas en las que se tienen en cuenta los atributos del concepto, pero suponen ya un primer manejo de éste. Con todo, los ejemplos que nos han dado los niños no son igualmente correctos. No podemos equiparar las dos respuestas siguientes:

AZ (6; 5): «Por ejemplo, tienes muchos caramelos y los metes en un conjunto».

GAR (9; 14): «Los animales son un conjunto, un conjunto de animales».

iv) Los sujetos señalan que la característica principal de un conjunto es ser un grupo o reunión de cosas, que pueden tener o no una propiedad en común, y no necesitan «estar encerrados» en algo para formar un conjunto.

Estas diferentes clases de respuestas se distribuyen según las edades. Los niños entre 6 y 8 años, o bien no saben o bien incluyen en su definición la referencia a una línea concreta que rodee los elementos. A los 9 años, 4.º de EGB, se pueden encontrar respuestas de los cuatro tipos antes citados. Y es a los 10 y 11 años cuando el sujeto se despega de algunos aspectos concretos de la noción de conjunto, como el diagrama, y pasa a nociones más elaboradas: «Conjunto es una colección de objetos de la misma clase» o «una reunión de objetos y cosas». Es sorprendente que las respuestas referentes a la necesidad del diagrama siguen apareciendo a los 9, 10 y 11 años.

Una progresión semejante en las respuestas se encuentra cuando insistimos y preguntamos a los niños *qué es realmente lo* *que forma el conjunto:* la línea cerrada, los elementos o ambas cosas. Para la mayoría de los niños de 6 y 7 años, el conjunto es el redondel. Esta respuesta desaparece en las siguientes edades: los niños mayores señalan que el conjunto es ambas cosas o está formado por los elementos. El diagrama sirve para evitar confusiones a la hora de representar conjuntos, pero no lo constituye.

b) En cuanto al *reconocimiento* del conjunto en las dos situaciones antes mencionadas (elementos dentro del cuadrado y elementos solos), comprobamos que los niños aceptaban con mayor facilidad que se tratara de un conjunto si los elementos estaban dentro de un cuadrado que si no existía ninguna línea que los rodeara. Sólo los más pequeños (entre 6 y 8 años) negaban que los elementos dentro de un cuadrado formaran un conjunto. Sin embargo, la mayoría de los sujetos desde 1.º hasta 6.º de EGB, de 6 a 11 años, se resisten a aceptar que los elementos por sí solos formen un conjunto. De 4.º a 6.º, entre 9 y 11 años, más del 50 por 100 de los niños siguen afirmando que si no hay diagrama no hay conjunto, lo que pone de relieve el apego a una configuración perceptiva determinada.

En resumen, podemos observar que la secuencia que se da en la construcción de esta noción es la siguiente: en un primer momento, conjunto y redondel son equivalentes. Posteriormente, para que haya un conjunto es necesario, además de la línea cerrada, unos elementos que lo formen. Por último, la existencia de un grupo de elementos es condición suficiente para que podamos hablar de conjunto. Se ha pasado de la centración en una representación concreta al logro de una noción abstracta.

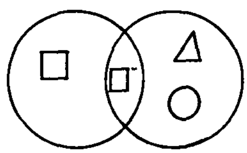
Otras nociones de la teoría de conjuntos.—Las respuestas a las preguntas relativas a qué era un elemento, un subconjunto, o la unión y la intersección reflejan igualmente el desconocimiento que los niños muestran con respecto a estos contenidos escolares. Hasta los 9 años aproximadamente, los sujetos confunden en muchas ocasiones elemento, conjunto y subconjunto, y sus definiciones ponen una vez más de manifiesto el apego a los aspectos perceptivos de estas nociones, ante la incapacidad de asimilarlas de una manera abstracta. Así, por ejemplo, la diferencia entre lo que es un elemento y lo que no, reside únicamente en la situación de «estar dentro» del diagrama o la cuerda, y un conjunto y un subconjunto se distinguen exclusivamente por su forma o su tamaño.

Por lo que respecta a la unión y la intersección, resulta bastante descorazonador que tan sólo un 20 por 100 de los sujetos muestren una comprensión más o menos adecuada de lo que significan. El resto de la muestra tan sólo recuerda los signos mediante los que se representan ($\cup$ y $\cap$) o el dibujo de los diagramas, la mayor parte de las veces confundiendo una y otra situación. Incluso cuando la representación es correcta, al profundizar mínimamente en las respuestas del sujeto se conserva una falta total de comprensión, como en el caso de este niño:

HER (8; 10):

—¿Te acuerdas de lo que es la intersección?

—*Sí, dos redondeles que se unen* (lo dibuja).



—¿Este, por qué está en el medio?

—*Porque es la intersección.*

—¿Y en vez de éste (□) podría estar éste (△)?

—*No.*

—¿Por qué?

—*No sé.*

—¿Por qué ése es la intersección? ¿Qué quieres decir con eso?

—*Porque no pueden estar todos aquí y ninguno aquí.*

—¿Pero ése (□) está ahí por algo en vez de ése (△) o ése (○)?

—*Sólo pueden estar uno o dos.*

—¿Tres no?

—*No.*

—¿Pero éste (□), por qué está en vez de estar el triángulo solo?

—*Porque... No sé.*

Sin embargo, es prácticamente seguro que la mayoría de estos niños, que no son capaces de explicar lo que es la unión o la intersección, realizarían perfectamente una adición de clases en la tarea de clasificación y podrían señalar el resultado final, y si algún elemento estaba repetido en los dos grupos. Es la falta de conexión entre estas acciones, que el niño realiza normalmente, y los contenidos de la teoría de conjuntos lo que dificulta su aprendizaje.

Conjuntos coordinables.—Nos han parecido especialmente relevantes los resultados que hemos encontrado en la parte de la prueba que trataba el tema de los conjuntos coordinables o equivalentes.

Uno de los objetivos al introducir la teoría de conjuntos es que los niños deberían llegar al concepto de número abstrayéndolo del hecho de que en dos conjuntos equivalentes el único atributo común es justamente la cantidad de elementos que los componen.

Se podría esperar, por el nivel de abstracción que esto exige, que no iba a ser un proceso que los niños realizaran fácilmente y, de hecho, los resultados de nuestra investigación ponen de manifiesto ese fracaso. Hasta los 9 años aproximadamente, los niños, en general, son incapaces de reconocer como característica común de los conjuntos el número de elementos, incluso cuando se lo sugeríamos al ir quitando un elemento de cada uno de los dos conjuntos.

La mayoría de los niños aluden a atributos como el color y el tamaño de los objetos para explicar por qué son iguales los conjuntos, o al hecho de que los dos tienen cuerdas y elementos. Todas estas razones que los niños señalan tan sólo exigen una abstracción empírica sobre la realidad, mientras que el número supondría ya la abstracción reflexiva, al ser producto de nuestras acciones de contar elementos y comparar la suma de los mismos en uno y otro conjunto.

El resultado de esta prueba pone en duda una vez más la validez de la teoría de conjuntos para la introducción del concepto de número, ya que muchos de estos niños habían alcanzado esta noción, pero a través de otro tipo de experiencias de cuantificación, en situaciones más próximas a ellos.

Formación de conjuntos con un material determinado.—Para esta tarea, todo el material estaba disgregado sobre la mesa desde el inicio de la entrevista con el niño, quien, al entrar en la habitación, se encontraba con un montón desordenado de diferentes objetos.

Al comenzar la tarea preguntábamos al sujeto si conocía cada una de las cosas que había sobre la mesa, lo que nos servía para adoptar su propia nomenclatura durante el resto de la entrevista (por ejemplo, «cuadraditos» para los dados, «redondeles» para los círculos, «tiras» para los rectángulos). Le preguntábamos después si con ellos se podía formar algún conjunto, pidiéndole que hiciera cuantos pudiera. Mientras los iba formando nos asegurábamos del nombre que daba a cada uno y de la razón de que los rodeara o no con las cuerdas.

A continuación le planteábamos la posibilidad de hacer otros conjuntos distintos con el material, si espontáneamente no había considerado más que un solo criterio de clasificación.

Se han analizado dos aspectos en esta tarea: a) la necesidad de utilizar cuerdas y b) los criterios que tienen en cuenta los niños para formar los conjuntos. En este último se observa un claro desarrollo de unas edades a otras, mientras que en el primero, como veremos a continuación, el cambio es más lento.

La necesidad de utilizar cuerdas que rodeen los conjuntos es producto de la tendencia a considerar el conjunto como algo que tiene forma redonda. Esta tendencia, prácticamente unánime en los tres primeros cursos (sujetos entre 6 y 8 años), persiste en la mitad de los niños de los tres últimos (sujetos entre 9 y 11 años).

En los más pequeños, esto les lleva a disponer de modo espontáneo el material en forma circular. Cogen algunos objetos, normalmente de una misma clase, y hacen con ellos un círculo que a veces tiene algo dentro. Esta conducta, que sigue apareciendo entre los de 8 años, es semejante a la de los sujetos que identifican el conjunto con el círculo de las figuras geométricas. El siguiente ejemplo ilustra este tipo de conducta:

SER (6; 6):

—¿Con estas cosas se pueden hacer conjuntos?

—*Sí, con este* (círculo pequeño)... *es un conjunto, pero sin esto* (sólo la tapa).

—¿Por qué es un conjunto?

—*Porque es redondito.*

—¿Hay alguna cosa más que pudiera ser un conjunto?

—*Sí, esto* (círculo grande).

—Y esto, ¿qué es?

—*Animales.*

—¿Y se puede hacer un conjunto?

—*No, porque no tienen forma de conjunto.* (Dice que con dos jirafas sólo no puede hacer un conjunto.)

—Esto, ¿qué es?

—*Esto son cubos.*

—¿Hay más cubos?

—*Sí.*

—¿Podrían ser un conjunto?

—*Sí.* (Dispone los cubos formando un círculo.)

—¿Por qué los has colocado así?

—*Porque si no, no era un conjunto.*

—¿Y hay algo dentro?

—*No.*

—¿No hace falta?

—*No.*

—¿Y esto es un conjunto? (dos triángulos)

—*No.*

—¿Y si les pongo esto? (los rodea con una cuerda).

—*Ahora sí.*

Sólo la mitad de los mayores consideran innecesario rodear los objetos con una cuerda y explican que a veces se dibujan así por motivos de clasificación, nombrando varias formas de representación además de los diagramas de Euler, como el diagrama lineal y las llaves.

Con respecto al *criterio de formación de los conjuntos* se pueden distinguir cinco categorías generales de clasificación:

I. *Ausencia de criterio.*—Los sujetos de esta categoría no tienen en cuenta una propiedad común a todos los elementos que reúnen en un conjunto. Había dos conductas incluidas en esta categoría, que suelen aparecer a veces en un mismo sujeto.

La primera se refiere a lo que hemos llamado *elementos mezclados* y en ella es la cuerda lo que define el conjunto, dentro de la cual pueden meter cualquier objeto de los que hay sobre la mesa (cuadrados, cabras y números), habiendo elementos comunes a varios conjuntos (caballo en dos conjuntos distintos).

La segunda conducta que refleja una ausencia de criterio es la denominada de *criterio variable.* Consiste en que el sujeto agrupa, por ejemplo, unos elementos por el color (jirafa, triángulo y dado azules); otros, por el tamaño (círculo amarillo y cuadrado rojo grande); otros, por un criterio específico distinto (dos triángulos, de distinto color y tamaño). Esta actuación pone de manifiesto la dificultad del niño para tener en cuenta a la vez todo el material y aplicarle un criterio de clasificación: por ejemplo, tipo de objeto (animales, figuras geométricas, dados, números) y luego otro al mismo material: por ejemplo, color (elementos rojos, amarillos, azules, verdes, blancos, grises).

La ausencia de criterio caracteriza a los conjuntos que forman los niños de 6 años, aunque sigue apareciendo aisladamente todavía en los de 10 años. La subcategoría más frecuente es la de elementos mezclados, lo que coincide con el uso de las cuerdas, como elemento que define el conjunto de objetos dispares, y con la definición de conjunto como diagrama.

II. *Conjuntos paralelos.*—Esta categoría supone ya un inicio de criterio: se tiene en cuenta una propiedad común a todos los elementos de cada conjunto formado, pero hacen varios conjuntos semejantes: por ejemplo, varios de «animales». Hemos incluido en esta categoría a aquellos sujetos que hacen conjuntos incompletos, dejando fuera elementos que según el criterio elegido deberían entrar en los conjuntos formados, porque refleja la misma dificultad para manejar la extensión de la clase. Esta categoría corresponde a los sujetos entre 6 y 8 años.

III. *Conjuntos por la propiedad específica.*—Los niños forman conjuntos considerando sólo la propiedad más inmediata, menos extensa, de los elementos que agrupa. Así dividen, por ejemplo, las figuras geométricas en triángulos, círculos, etc., o según su color; los animales, según su especie, resistiéndose a abstraer la propiedad más general de varios elementos. La mitad de los niños de segundo curso (siete años) manifiesta esta conducta y aparece de modo aislado en los demás cursos.

IV. *Conjuntos por la propiedad general de modo ocasional.*—Los niños de esta categoría forman un(os) conjunto(s) según una propiedad general, pero no otros; por ejemplo, muchos sujetos agrupan todos los animales bajo esta denominación (con subconjunto o no), pero vuelven a estrategias anteriores con el resto del material y así forman conjuntos paralelos, mezclan elementos o aplican una propiedad específica. O bien, hacen clases generales iniciales con todos los elementos, pero vuelven a conductas anteriores cuando se les pide otra posibilidad de clasificación. Puede ocurrir también que comiencen por clases específicas o conjuntos paralelos y luego lleguen a abstraer propiedades generales en unos casos, pero no en otros.

Esta categoría es característica de los sujetos entre 9 y 10 años.

V. *Conjuntos según la propiedad general con subconjuntos.*—En este caso, los sujetos son capaces de distinguir propiedades de distinto grado de abstración en los conjuntos, incluyendo en éstos subconjuntos. Domina ya, por tanto, la extensión y comprensión de la clase y es notoria también la facilidad para pensar en otro criterio de clasificación. Algunos sujetos agrupan objetos aparentemente dispares. Sin embargo, a diferencia de los niños pequeños para quienes su inclusión dentro de la cuerda les haría ser automáticamente un conjunto, estos sujetos definen éste por una propiedad que se abstrae de los objetos, como en el caso de MOR (11; 10), quien después de reunir las figuras geométricas, dados, animales y números, mezcla elementos de cada uno de éstos y lo llama el conjunto «de juguetes».

La utilidad de los conjuntos y su relación con las matemáticas

Entre otros, uno de los objetivos de este trabajo era estudiar la «utilidad» que los niños conceden a los conjuntos y si aprecian que existe algún tipo de relación entre éstos y las «otras» matemáticas, aspectos éstos de los que se han ocupado también otros estudios (Sastre y Moreno, 1980).

Hace tiempo que sabemos que para que se produzca un aprendizaje «significativo» (Novak, 1977) debe existir una predisposición del alumno hacia la tarea de aprendizaje, disposición que es difícil mantener si ésta no conecta con los intereses del sujeto o si la nueva información que ha de asimilarse no tiene relación con la estructura cognitiva del sujeto.

La escuela, además, no puede vivir encerrada en sí misma, sino que ha de asegurar la funcionalidad de los aprendizajes que en ella se desarrollan y, por ello, que sirvan tanto para preparar al sujeto para la vida como para estimular su desarrollo intelectual y social. Por eso, nos parecía importante saber si los sujetos aprecian la utilidad de tantas horas como invierten «haciendo conjuntos» y si han encontrado en ellos un camino más fácil para comprender algunos conceptos matemáticos que se introducen posteriormente en las programaciones escolares.

El análisis de las respuestas de los niños no puede ser más aclaratorio. Que estas enseñanzas debían servir para que los niños fueran capaces de aplicar a la realidad un método de análisis lógico-matemático se aprecia sólo en un 30 por 100 del total de las respuestas. El resto, fundamentalmente hasta los 9 años, no son capaces de transferir estos contenidos fuera del contexto escolar.

PEI (7; 11):

—¿Por qué estudias conjuntos?

—*Porque los profesores los estudian de pequeños y luego se los enseñan a los niños.*

Lo que se estudia y se hace en la escuela es, para muchos niños, algo que sirve «para estudiar» y «para aprender», es decir, actitudes cuya finalidad y utilidad descansa en su propia contemplación. Si el estudio de tantos conjuntos sirviera al menos para introducir mejor algunos conceptos matemáticos posteriores, no todo el esfuerzo sería baldío. Sin embargo, de los 43 sujetos a los que se les ha preguntado si había alguna relación entre los conjuntos y las operaciones de suma y resta, 38 afirmaron que no veían ninguna relación, salvo la de que las dos cosas estaban en el libro de matemáticas. Que el 62 por 100 de las respuestas obtenidas aludan a razones de este tipo como toda conexión entre las matemáticas y los conjuntos es suficientemente indicativo del fracaso de este aprendizaje.

Siempre podemos pensar que preguntas como, ¿para qué sirven los conjuntos? sitúan el problema en el plano de la reflexión abstracta, no siempre posible para muchos niños. Para evitar el quedarnos en un plano de reflexión abstracta, pedíamos a los sujetos que nos indicasen qué conjuntos se podrían hacer con los elementos de su entorno. Los resultados, sin embargo, parecen confirmar las ideas que venimos manteniendo. Por una parte, no sólo un grupo importante de niños (entre 6 y 7 años) es incapaz de ver la posibilidad de formar conjuntos con los objetos de la habitación, sino que más del 50 por 100 de los sujetos hasta 8 años consideran necesaria la presencia del círculo, la cuerda o algo que encierre los objetos para considerarlos como un conjunto, tendencia que, en parte, se mantiene hasta los 11 y 12 años.

REM (10; 9):

—¿Los coches en la autopista forman un conjunto?

—*Sí.*

—¿Y están encerrados en algo?

—*Sí, en la autopista.*

—¿Y muchos aviones en el cielo es un conjunto de aviones?

—*Sí.*

—¿Y están encerrados en algo?

—*Sí, están encerrados en el mundo.*

—¿Siempre tienen que estar encerrados por algo?

—*Sí.*

—¿Y hay un conjunto de estrellas?

—*Sí, ya que están encerradas en el cielo.*

Esto que, sin duda, podría ser un brillante ejercicio de imaginación, no creemos que sea el objetivo que se persiguió cuando se introdujo la teoría de conjuntos en la escuela como fundamento de una Matemática Moderna.

CONCLUSIONES

Los resultados de nuestro estudio son bastante claros y no permiten hacernos muchas ilusiones de lo que aprenden los niños de la teoría de conjuntos. O bien no aprenden nada, o aprenden mal. Estos resultados eran de esperar conociendo la evolución de la mente del niño. Este asimila lo que se le enseña, modificando y adecuándolo a sus estructuras intelectuales, que se hacen patentes a través de esas deformaciones.

Las ideas sobre lo que es un conjunto son un ejemplo más de la dificultad que tienen los niños para acceder a nociones abstractas que requieran poner en funcionamiento la abstracción reflexiva para su comprensión. Ante esta ausencia de operaciones de segundo grado o reflexión sobre las propias acciones —en este caso, sobre las acciones de considerar unos objetos y otros y reunirlos en virtud de un criterio—, el sujeto se queda sólo con el conocimiento que le proporciona la abstracción directa o empírica sobre los objetos, es decir, el conocimiento de sus propiedades físicas perceptibles; en nuestro caso, la forma habitualmente redonda de la representación del conjunto.

La noción de conjunto, por su elevado nivel de generalidad, resulta de las más abstractas de las matemáticas. Por otra parte, las nociones de la teoría de conjuntos son, en su mayoría, relativas; por ejemplo, el subconjunto, que sólo lo es con referencia a un conjunto. Una reunión de elementos tiene la propiedad de conjunto si el que lo crea —material o mentalmente— los considera reunidos y que el sujeto tome conciencia de sus propias acciones supone una abstracción refleja. Esto es lo que persigue la enseñanza de la teoría de conjuntos. En lugar de ello, se dota a estas nociones de características concretas y absolutas que ocultan sus verdaderas características.

La primera confusión se refiere a la propia noción de conjunto, que se identifica con la línea que rodea los elementos, tanto a la hora de definir conjuntos como de formarlos a partir de un material dado (casi un 75 por 100 de la muestra «necesita» utilizar cuerdas) o de identificar conjuntos en la realidad. Los elementos son algo que se da por añadidura.

Sólo a partir de los 10 y 11 años aparecen definiciones más abstractas. Lo mismo puede decirse de las restantes nociones, como subconjunto, elemento, y las operaciones de unión e intersección. Encontramos en ellas el mismo fenómeno de estar apegado el sujeto a características perceptivas y a formas de presentación anecdótica, que es el único aspecto que retiene.

Igualmente sorprendente resulta la desconexión entre las nociones de la teoría de conjuntos y otras nociones matemáticas. Para muchos profesores resulta difícil establecer esta conexión,* que también falta en los libros de texto, donde se presentan por separado. Si esto es así, es de esperar que tampoco los alumnos entiendan la relación entre teoría de conjuntos y matemáticas. Ni siquiera se dan cuenta de la relación entre conjunto y número, y de que los conjuntos coordinables tienen el mismo número de elementos, buscando semejanzas en la forma o color de los elementos. Qué decir de la utilidad y aplicabilidad de los conjuntos. Para un 70 por 100 de la muestra, carecen de ellas.

Es evidente, pues, que la mayoría no llega a ver el conjunto como una operación mental, no necesariamente práctica, sobre objetos (no necesariamente reales), que pueden estar alejados en el espacio y en el tiempo. Esto es difícil de entender para niños que se encuentran en una etapa de pensamiento concreto, ya que tienen que realizar materialmente dicha operación y están más centrados en el aspecto físico de su resultado.

La introducción de la teoría de conjuntos en la enseñanza básica se debe en parte a una interpretación errónea de la teoría de Piaget. Este sostiene que el niño, en su desarrollo más o menos espontáneo, realiza clasificaciones sirviéndose de una serie de operaciones que describe la teoría de conjuntos. Pero no tiene por qué tomar conciencia simultáneamente de esas operaciones, lo que se lograría más tarde en el desarrollo.

Es de esperar que estos resultados, que sólo apoyan lo que otros autores ya han demostrado, estimulen nuevas investigaciones y un replanteamiento de qué enseñar de matemáticas en EGB y cómo hacerlo.

Notas

[1] Este trabajo recoge parte de los resultados del proyecto de investigación «La conexión de la enseñanza de las Matemáticas y la Física en la segunda etapa de EGB», dirigido por Juan Delval. Dicha investigación fue financiada con cargo al IX Plan Nacional de Investigación de la Red INCIE - ICES de 1979, año en que se inició.

Resumen

Se examina la comprensión infantil de algunas nociones de la teoría de conjuntos en una muestra de sesenta niños madrileños entre 6 y 11 años de edad. El análisis se centra en la definición y reconocimiento de conjuntos por parte de los niños, la formación de conjuntos a partir de un material dado y la conciencia de la utilidad de los conjuntos y su relación con otras áreas de las Matemáticas. Los resultados indican que más del 50 % de los sujetos identifica el conjunto con el diagrama que lo representa y son incapaces de aplicar esas nociones a problemas concretos. Se interpretan estas dificultades a la luz de la descripción piagetiana de los dos tipos de abstracción —empírica y reflexiva—, y los dos tipos de conocimiento —físico y lógico-matemático— a que dan lugar.

Summary

Children's understanding of some notions of set theory is examined in a sample of 60 children. The analysis focuses on children's definition and identification of sets; sets' construction with a given material; and the awareness of the utility of them and their relation to other domains in Mathematics. Results show that more than 50 % of the sample identifies the set with the diagram representing it, and is unable to apply those notions to specific situations. These difficulties are interpreted in terms of the piagetian description of two types of abstraction —empirical and reflective— and the two types of knowledge that they lead to physical and logico-mathematical.

Résumé

On examine la compréhension de quelques notions de la théorie des ensembles chez l'enfant, dans une échantillon de 60 enfants avec un âge compris entre 6 et 11 ans. L'analyse est centré sur la définition et réconaissance d'ensembles par les enfants, la formation d'ensembles à partir d'un materiel donné et la conscience de l'utilité des ensembles et leur relation avec d'autres aspects des Mathématiques. Les résultats indiquent que plus de 50 % des sujets identifie l'ensemble avec le diagramme qui le représente, et qu'ils ne peuvent pas appliquer ces notions à des problemes concrets. On interprete cettes difficultés à la lumière de la description piagetienne des deux types d'abstraction —empirique et réfléchissante— et les deux types de connaissance —physique et logico-mathématique— qui s'en decoulent.

Referencias

COLE, M.; GAV, J.; GLICK, J. A., y SHARP, D. N.: *The cultural context of learning and thinking* Londres, Methuen (1971).

COLLIS, K. F.: *A study of concrete and formal operations in school mathematics: a piagetian viewpoint.* Melbourne, A.C.E.R. Research series, 95 (1975).

COLLIS, K. F.: «Levels of cognitive functioning and selected curriculum areas». En J. R. Kirby y J. B. Biggs (eds.): *Cognition, development and instruction.* Nueva York, Academic Press, págs. 65-89 (1980a).

COLLIS, K. F.: «School mathematics and stages of development». En S. Modgil y C. Modgil (eds.): *Towards a theory of psychological development.* Windsor, N.J., N.F.E.R. Publishing Co., págs. 635-671 (1980b). (Trad. cast. de P. del Río: «La matemática escolar y los estudios del desarrollo». *Infancia y Aprendizaje 19-20,* 39-74, 1982).

DIEUDONNE, J.: «Devons-nous enseigner les mathématiques modernes?» *American Scientist, GI,* 1973, 16-19. (Trad. cast. en J. Piaget *et al* (1978).

DONALDSON, M.: «The child's mind», Glasgow, *Fontana Paperbacks,* 1978, (trad. cast. de A. Guerra: *La mente de los niños,* Madrid, Ocorata, 1979.

FREUDENTHAL, H.: «Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?», *L'Enseignement Mathématique,* 1963, *9,* págs. 28-44 (trad. cast. en J. Piaget, *et al,* 1978).

HUGHES, M.: «What is difficult about learning arithmetic?», en M. Donaldson, R. Grieve y C. Pratt (eds.): *Early childhood development and education,* Oxford, B. Blackwell, 1983, págs. 204-221.

ISTOMINA, Z. M.: «The development of voluntary memory in preschool-age children», *Soviet Psychology,* 1975, *13,* págs. 5-64.

KAMII, C.: *Number in preschool and Kindergarten. Educational implications of Piaget's theory,* Washington, NAEYC, 1982. (Trad. cast. de E. Martín y A. Moreno: *El número en la educación preescolar,* Madrid, Aprendizaje Visor, 1984).

KLINE, M.: *El fracaso de la matemática moderna,* Madrid, Siglo XXI, 1973.

NOVAK, J.: *A theory of education,* Cornell University Pres, 1977. (Trad. cast. de C. del Barrio y C. González: *Teoría y práctica de la educación,* Madrid, Alianza Editorial).

PIAGET, J.: *La representation du monde chez l'enfant,* París, Alcan, 1926, 4.ª ed., PUF, 1972. (Trad. cast. de V. Valls y Anglés: *La representación del mundo en el niño,* Madrid, Espasa Calpe, 1933; nueva ed., Madrid, Morata, 1973).

PIAGET, J., e INHELDER, B.: *Le développement des quantités chez l'enfant: Conservattion et atomisme,* Neuchâtel y París, Delachaux et Niestlé, 1941. (Trad. cast. de G. Sastre: *El desarrollo de las cantidades en el niño,* Barcelona, Nova Terra, 1971).

PIAGET, J., y SZEMINSKA, A.: *La génese du nombre chez l'enfant,* Neuchâtel y París, Delachaux et Niestlé. (Trad. cast. de M. Riani: *Génesis del número en el niño,* Buenos Aires, Guadalupe, 1967).

PIAGET, J. *et al: Recherches sur l'abstraction refléchissante. L'abstraction des relations logico-arithmétiques,* París, PUF, 1977, EGB, XXXIV. (Trad. cast. de *Investigaciones sobre la abstracción reflexionante 1. La abstracción de las relaciones lógico-matemáticas,* Buenos Aires, Huemul, 1979).

PIAGET, J. *et al: La enseñanza de las matemáticas modernas,* Comp. de Jesús Hernández, Madrid, Alianza, 1978.

SASTRE, G. y MORENO, M.: *Descubrimiento y construcción de conocimientos. Una experiencia de pedagogía operatoria,* Barcelona, Gedisa, 1980.