

# Reseña sobre el estado del arte de la aplicación del modelo Fokker-Planck-Kolmogorov en la estimación de amenazas hidrológicas

## Review of the state of the art of applying the model Fokker -Planck -Kolmogorov in estimating hydrological hazards

Diana Carolina Palacio Gómez<sup>1</sup>, Carlos González Murillo <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Ingeniera en Recursos Hídricos y Gestión Ambiental, Especialista, Estudiante en Maestría en la ESING, dacarol2000@yahoo.com*

<sup>2</sup> *Ingeniero Agrícola, M. Sc., Docente e Investigador en la Universidad Nacional de Colombia, cagonzalezmu@unal.edu.co*

Fecha de recepción: 22/08/2016 Fecha de aceptación del artículo: 16/12/2016

### Resumen

Este trabajo es producto de una investigación sobre el estado del arte en la aplicación del modelo Fokker-Planck y Fokker-Planck-Kolmogorov en materia de la estimación de la probabilidad de ocurrencia de uno o varios eventos. El tema se conoce en la teoría de la gestión del riesgo como estimación de amenazas. El trabajo expone el origen del modelo en diversas ciencias (física clásica, física cuántica, finanzas, geociencias e hidrología). Describe brevemente las aplicaciones recientes del modelo en la estimación de las probabilidades de eventos hidrológicos en países diversos (Estados Unidos, Rusia, Francia y Colombia). Además, como ilustración práctica se desarrolla un ejercicio completo de la aplicación del modelo Fokker-Planck-Kolmogorov para modelar la amenaza en escenarios no estacionarios para los caudales medios multianuales del río Fonce (Santander, Colombia). Este ejercicio demuestra las ventajas del modelo frente a las experiencias del modelado de las amenazas con los modelos tradicionales.

### Palabras claves:

Amenaza, Modelo Fokker-Planck-Kolmogorov, Proceso no estacionario

### Abstract

This work is the result of a researching into the state of the art in applying Fokker-Planck model and Fokker-Planck-Kolmogorov regarding the estimation

of the probability of occurrence of one or more events. The issue is known in the theory of risk management as hazards. The paper describes the origin of the model in various sciences (classical physics, quantum physics, finance, geosciences and hydrology). briefly describes recent applications of the model in estimating the likelihood of hydrological events in various countries (United States, Russia, France and Colombia). Moreover, as a practical illustration full exercise of applying the model Fokker-Planck-Kolmogorov it is developed for modeling nonstationary proceses for multi-year average flow of the river Fonce (Santander, Colombia). This exercise demonstrates the advantages of the model against the experimental modeling of threats to traditional models.

### Keywords

Fokker-Planck-Kolmogorov model, Hazard, Nonstationary processes.

### 1. Introduccion

Hace unas cuantas décadas atrás, la propiedad de estacionariedad (cuando los momentos estadísticos permanecen constantes a lo largo del tiempo o del espacio) en los procesos hidrológicos se consideraba una propiedad intrínseca del ciclo del agua. Así, se fortaleció el método de balance hídrico de una cuenca hidrográfica y el método de diseño hidrológico para el diseño de obras civiles y militares. Este último se soporta en el modelado estadístico tradicional del

comportamiento temporal del proceso hidrológico: a) se compilan los datos de niveles del agua, velocidades del agua y caudales; b) se someten los datos a revisiones de calidad y se conforma una serie temporal homogénea e independiente; c) se estiman los momentos estadísticos (centrales o iniciales); se ajusta un modelo estadístico tradicional (tipo Normal, Log Normal, Weibull, Gamma, Paretto, Fisher, u otro), al comportamiento histórico de la serie; d) se estiman los valores de las probabilidades de los eventos de interés. Todo ello es válido siempre y cuando la serie temporal hidrológica demuestre ser un proceso estacionario.

De otra parte, en la gestión del riesgo, la ley actual en Colombia No. 1523 de 2012 exige conocer la amenaza del evento y la vulnerabilidad del sitio de interés ante ese evento. La amenaza se define como la probabilidad de ocurrencia de un evento.

¿Cómo estimar la amenaza de un evento en un sitio, si el proceso hidrológico en estudio demuestra propiedades de ser no estacionario (cuando al menos un momento estadístico es inconstante en el tiempo o espacio)? Ese es el interrogante que mueve la presente investigación. Su desarrollo fue planteado en la tesis de maestría para optar al título de Maestría en Gestión del Riesgo y Desastres de la Escuela de Ingenieros Militares – ESING.

El trabajo inicia con una discusión sobre los resultados que ofrecen los modelos deterministas y estocásticos. Se hace hincapié en que ambos tipos de modelos tienen más similitudes que diferencias. Ambos utilizan ecuaciones diferenciales. Luego se describen brevemente algunos aspectos de la ley 1523 de 2012 que trata sobre la gestión del riesgo en Colombia. Allí se define al concepto de amenaza como la probabilidad que de ocurra un evento. El trabajo continúa con una descripción breve sobre los primeros trabajos de los científicos Fokker y Planck, con los cuales nace el modelo Fokker-Planck. En este modelo los parámetros A y B que definen una ecuación diferencial en derivadas parciales se obtienen mediante experimentos en laboratorios o deducciones empíricas. Posteriormente, se describe el origen del modelo Fokker-Planck-Kolmogorov - FPK, acentuando la atención en que los parámetros A y B de la ecuación de Kolmogorov se definen ya no mediante formulaciones empíricas, sino mediante

abstracciones matemáticas en términos de las esperanzas condiciones del proceso Q.

Más adelante, se describe cada uno de los trabajos que usan o plantean el modelo FPK para la estimación de la probabilidad de ocurrencia de eventos en procesos no estacionarios. Es decir, aquellos esfuerzos científicos que modelan la amenaza de un evento hidrológico sea para aguas superficiales o subterráneas. Por último, se presenta un ejercicio completo de la aplicación del modelo Fokker-Planck-Kolmogorov para modelar la amenaza en escenarios no estacionarios para los caudales medios multianuales del río Fonce (Santander, Colombia).

## 2. Metodología

### 2.1. Breve reseña sobre el origen del modelo FPK.

En la ciencia clásica de la física se utilizan modelos deterministas, los cuales en matemáticas son llamados ecuaciones algebraicas y ecuaciones diferenciales. Estos modelos toman valores únicos tanto para los parámetros de la ecuación, como en los resultados que ofrece la solución (analítica o numérica), de la ecuación; además, se suele afirmar que estos modelos permiten vislumbrar las relaciones que existen entre la variable que se busca en la ecuación (variable dependiente), los parámetros de la misma y las demás variables (independientes) respecto a la cuales se realiza el estudio.

En el caso de las ingenierías que estudian el comportamiento del agua en la atmósfera, hidrosfera y litosfera, los modelos deterministas expresados mediante ecuaciones diferenciales contienen la variable dependiente (precipitación, evaporación, filtración, escorrentía, nivel del agua, velocidad del agua, caudal, entre muchas otras variables hidrológicas), la variable independiente (sea el tiempo en segundo, hora, día, semana, mes, año, o el espacio en metro, kilómetro, hectárea, metro cúbico, metro cuadrado, entre muchas otras expresiones espaciales), y los parámetros (propiedades de la atmósfera, hidrosfera, litosfera, tales como el coeficiente de escorrentía, el tiempo de concentración, cobertura vegetal, tipo de suelo, permeabilidad en la sub-superficie y muchos más).

A finales del siglo XIX, las ecuaciones algebraicas y diferenciales se convirtieron en un método matemático muy acertado para modelar los comportamientos de procesos diversos en la ingeniería. En Hidrología se tienen las siguientes aplicaciones: a) el balance hídrico es una expresión algebraica de restas y sumas entre los procesos de precipitación, evaporación, escorrentía, transpiración, almacenamiento y filtración [1]; b) el modelo SOIL es una relación algebraica entre las propiedades del suelo, tipo de vegetación, precipitación, pendiente del terreno y el caudal [2]; c) el modelo MIKE 11 es una ecuación diferencial en derivadas parciales que relaciona aspectos hidráulicos e hidrológicos (en cantidad de agua) para un tramo de un río [3]; d) el modelo QAL 2K es una ecuación diferencial ordinaria que relaciona aspectos hidráulicos e hidrológicos (tanto de cantidad de agua como de su calidad), [4]. En estos y muchos otros modelos la incertidumbre tiene poco lugar y el experto le lleva a su mínima expresión: los márgenes de incertidumbre, sea por errores en las mediciones de las variables o por otras causas, realmente no tienen lugar ni se tienen en cuenta. No obstante, los resultados de los modelos deterministas han satisfecho ampliamente las necesidades de las ingenierías que estudian el comportamiento del agua en la atmósfera, hidrósfera y litosfera (ingeniería agrícola, ingeniería civil, ingeniería ambiental, ingeniería geológica, ingeniería hidrológica, ingeniería sanitaria, etc.).

De otra parte, a finales del siglo XIX, surge la estadística aplicada, la cual fue liderada por Karl Pearson y Galton. A Karl Pearson se le reconoce ser el creador de las fórmulas de los momentos estadísticos (iniciales y centrales) [5] y descubrir el comportamiento asimétrico de procesos en diversas ciencias mediante el Sistema de Pearson (que es una ecuación diferencial ordinaria) [6]; mientras que a Galton se le reconoce ser el creador de la fórmula del coeficiente de correlación y de las ecuaciones de regresión.

La estadística aplicada ha permitido, facilitado y agilizado la solución de muchos problemas de las ingenierías que estudian el comportamiento del agua en la atmósfera, hidrósfera y litosfera. Se citan los siguientes ejemplos: a) se realiza un estudio estadístico del comportamiento de los caudales para estimar sus valores máximos, medios y mínimos para el diseño de

obras civiles y militares; b) se realiza un estudio de la relación intensidad-frecuencia-duración de las lluvias para diseñar obras de alcantarillado o captación de agua; c) se estima mediante modelos estadísticos la amenaza de un evento de inundación en la gestión del riesgo y atención de desastres, etc.

A pesar de contar con una experiencia de más de un siglo en la aplicación del modelado determinista y estadístico, se pueden identificar las siguientes restricciones: a) en el enfoque tradicional del modelado en ingeniería no se identifica relación alguna entre el modelado determinista y el estadístico; b) el modelado determinista permite ver una relación directa entre las causas y los efectos, pero no concierne de ninguna manera la incertidumbre; c) el modelo estadístico tradicional (por ejemplo Gumbel, Normal, Weibull, Pareto, Fisher, etc.), vincula de cierta manera la incertidumbre en el estudio de los procesos pero hace imposible determinar una relación directa entre las causas y los efectos. Está claro que el ser humano puede descubrir con la ciencia las leyes mediante las cuales se comportan los procesos, y ese conocimiento conlleva incertidumbre; por lo tanto, surge la necesidad de crear modelos que contemplen principios deterministas y estadísticos a la vez.

El modelo Fokker-Planck-Kolmogorov es precisamente la herramienta física y estadística que permite enlazar en una ecuación diferencial en derivadas parciales las leyes físicas (clásicas y modernas), y los principios estadísticos (aplicados y teóricos). Este modelo se conoce con nombres diversos, entre otros se citan los siguientes: a) modelo Rayleigh en la teoría del sonido [8], b) modelo Einstein del movimiento browniano [9], c) modelo Bachelier en finanzas [10], d) modelo Fokker en física [11], e) modelo Planck en física cuántica [12], f) modelo Kolmogorov [11], g) ecuación prospectiva de Kolmogorov [13], h) ecuación máster de Chapman-Kolmogorov [14], y muchos más.

En adelante solo haremos referencia a los trabajos de Fokker, Planck y Kolmogorov.

Adriaan Daniël Fokker nació el 17 de agosto de 1887 en Buitenzorg (Indias Orientales, conocidas como Indonesia), tierras conquistadas por los gobiernos de Holanda, y murió el 24 de septiembre de 1972. Fue

físico y músico holandés, hermano del famoso empresario y científico, creador de los aviones Fokker.

El trabajo científico de Adriaan Daniël Fokker, con el cual presentó su ecuación diferencial lleva por nombre “Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld”, publicado en 1914 por Annalen Der Physik y, cuya traducción al español podría ser “Modelación de la energía promedio de la rotación de dipolos eléctricos en el campo de radiación mediante una ecuación diferencial”. El modelo Fokker es de la forma:

$$W(q)f(q)\tau - W(q)R + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \{W(q)R^2\} = 0$$

$$W(q)f(q)\tau = +W(q)R - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \{W(q)R^2\}$$

$$W(q) = + \frac{W(q)R}{f(q)\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \frac{W(q)R^2}{f(q)\tau} \right\}$$

En donde q es una variable de estado, la cual en este caso es un momento angular en la rotación de un dipolo eléctrico;  $\tau$  es un intervalo muy pequeño de tiempo;  $W(q)$  es la densidad de probabilidad con respecto al momento angular;  $f(q)$  es una velocidad que evidencia la pérdida del momento angular por unidad de tiempo;  $R$  es un valor promedio de los cambios de q en intervalo  $\tau$  como resultado de acciones externas irregulares o erráticas.

Así las cosas, el modelo Fokker en su versión original permitió plantear un modelo teórico (sin pruebas experimentales), del comportamiento de la probabilidad del momento angular en la rotación de un dipolo eléctrico bajo leyes físicas, teniendo en cuenta una fuerza exterior errática. Al aplicar la ecuación diferencial en derivadas parciales de Fokker se obtiene una ley de distribución de probabilidad para q.

Max Karl Ernest Ludwig Planck nace el 23 de abril de 1858 en Kiel (Alemania) y, muere en Gotinga el 3 de octubre de 1947. Fue un físico que con sus teorías fundamentó la física cuántica.

El trabajo científico de Max Planck con el cual presentó su ecuación diferencial lleva por nombre

“Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie”, publicado en 1917 por Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften y cuya traducción al español podría ser “Estudio de un conjunto de estadística dinámica y su expansión a la teoría cuántica”. Con este trabajo Planck pretendió brindar una demostración práctica de la validez del modelo de Fokker, presentado en 1914, y también presentar su aplicación a la teoría del espectro de rotación en la molécula biatómica.

Es importante recordar que, para esa época para Planck, uno de los creadores de los fundamentos teóricos de la física estocástica y cuántica, el problema de las líneas espectrales de los sistemas con múltiples grados de libertad se convirtió en uno de sus principales intereses científicos.

El modelo Planck es la misma ecuación de Fokker en la forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial q} \left( W(q) \frac{r}{\tau} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q^2} \left( W(q) \frac{r^2}{\tau} \right)$$

A finales de la segunda década del siglo XIX los científicos ya contaban con una herramienta de modelado que combinaba las leyes físicas con los principios estadísticos, gracias a los trabajos científicos de Fokker y Planck; de allí el nombre del modelo Fokker-Planck. Sin embargo, muy a pesar de la existencia de una ecuación diferencial para obtener los histogramas de frecuencias, los valores de los parámetros en ella se determinaban o establecían con ayuda de los experimentos o razonamientos empíricos.

Por esa época en hidrología aún se modelaban los procesos con soportes en las ecuaciones algebraicas y apenas se asomaban los primeros ensayos de modelación con ecuaciones diferenciales. Tomaba auge la modelación estadística, solo que se usaban los modelos conocidos como ley Normal, ley Log Normal, Ley Fisher, Ley Student, Ley Poisson y también las leyes discretas (Binomial, Geométrica, Hipergeométrica, entre otras). Se desconocía por ese entonces los avances de la física clásica y cuántica respecto a los trabajos de Fokker y Planck.

Andrei Nikolaevich Kolmogorov nace en Tambov el 25 de abril 1903 y muere en Moscú el 20 de octubre de 1987. Toma el apellido de su madre, hecho que le facilitó y agilizó su vinculación a las altas esferas de las sociedades científicas en Rusia.

Antes de los trabajos de Kolmogorov se conocía el modelado estadístico de procesos con origen determinista mediante la ecuación Fokker-Planck; aunque, a decir verdad, ese era un privilegio de pocos científicos y en los ámbitos de las ingenierías de ese entonces que estudiaban el comportamiento del agua en la atmósfera, hidrósfera y litosfera (ingeniería agrícola, ingeniería civil, ingeniería hidrológica, etc.), no se tenía el más mínimo conocimiento del modelo Fokker-Planck. Lo que sí se conocía en ellas eran los modelos estadísticos tipo Normal, Log Normal, Fisher, Student, Poisson y también las leyes discretas (Binomial, Geométrica, Hipergeométrica. Tampoco se conocía en hidrología el Sistema de Pearson como conjunto de modelos estadísticos que contienen a los demás (Normal, Log Normal, Fisher, Student, Poisson, etc.) y que es una ecuación diferencial ordinaria.

Andrei Kolmogorov creó con sus trabajos un novedoso enfoque en la teoría de la probabilidad: una variable aleatoria ya no será un conjunto de datos con frecuencias, sino una estructura topológica en la cual el rol principal lo jugarán las sigmas álgebras (A) y la medida de probabilidad (P). La variable aleatoria en Kolmogorov es una función que se establece a partir de un espacio muestral ( $\Omega$ ), los eventos y las sigmas álgebras, sin recurrir necesariamente a los valores de las frecuencias. A partir de la tripla ( $\Omega, A, P$ ), Kolmogorov presenta a las sociedades matemáticas su axiomática, que termina constituyéndose en la teoría moderna de probabilidad, conocida en los ámbitos de las ingeniería como teoría moderna de los procesos estocásticos. Interpretando a Kolmogorov en términos sencillos, se afirma que el modelo de un sistema físico o social que se encuentre estocásticamente definido está dado por una triplete de la forma ( $\Omega, A, P$ ), en la cual  $\Omega$  representa al conjunto de todos los posibles estados del sistema físico o social (con sus respectivos elementos, cada uno de ellos representando un estado diferente), A, se identifica como un sub-conjunto (se llama  $\sigma$ -álgebra ó  $\sigma$ -cuerpo), de los elementos de  $\Omega$  y P, es la medida de probabilidad que se define sobre el sub-conjunto A

[15]. Precisamente en esta nueva interpretación, la probabilidad es una “medida sobre una  $\sigma$ -álgebra”.

Para Kolmogorov existe una relación directa y unívoca entre las leyes naturales (físicas, químicas, biológicas, etc.) o de la sociedad y las leyes estadísticas. Deduce que la teoría moderna de la probabilidad es la herramienta adecuada para estudiar la incertidumbre en el modelado de los procesos naturales y sociales. Con esta premisa expone una ecuación diferencial en derivadas parciales para modelar el comportamiento de la densidad de probabilidad de una variable a partir de los parámetros A y B con sentido determinista. Según su famoso artículo “Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung” del año 1931, su ecuación diferencial es de la forma:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial[Ay]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2[By]}{\partial x^2}$$

en donde,

$y$	Valor a encontrar de la probabilidad
$t$	tiempo
$x$	Variable hidrológica en estudio
$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta x   x]}{\Delta x}$	Coefficiente de traslación
$B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta x^2   x]}{\Delta x}$	Coefficiente de difusión o volatilidad
$E[\Delta x   x]$	Esperanza matemática

Para solucionar la ecuación FPK se requiere conocer la condición inicial y las condiciones de frontera.

Los parámetros de la ecuación FPK se deben deducir a partir del modelo determinista que simula el comportamiento del proceso que se desea estudiar; esta necesidad es una gran diferencia con respecto a la ecuación Fokker-Planck.

En la ecuación Fokker-Planck los parámetros de la ecuación se estiman mediante experimentos en laboratorios o mediante técnicas empíricas o por deducción del investigador [16]. En la ecuación FPK

los parámetros (de traslación y difusión), se definen mediante abstracciones matemáticas (como el límite de la esperanza matemática de la variable del proceso en estudio). Precisamente en los parámetros A y B están incluidas las leyes deterministas y las consideraciones estadísticas del modelo FPK.

A cada modelo determinista que se plantee mediante una ecuación diferencial para estudiar un proceso en los ámbitos naturales y sociales, le corresponde su propia expresión de la FPK.

El modelo FPK ofrece como resultado un histograma de frecuencias teóricas de la variable en estudio, solo que ese histograma se genera a partir de las propiedades físicas del proceso y de la incertidumbre inmersa en las mediciones de las variables.

Además de lo anterior, Kolmogorov demostró que su ecuación en derivadas parciales, se extiende a la ecuación diferencial ordinaria del Sistema de Pearson [17]. Esta extensión le permite al modelo FPK enlazarse a los modelos estadísticos tradicionales, tales como Normal, Log Normal, Gumbel, Weibull, Fisher, Pareto, Student, y muchos más. Veamos este hecho en forma breve.

En más de 15 artículos denominados “Contributions to the Mathematical Theory of Evolution” [18], publicados a partir de 1893, el profesor Pearson demostró por primera vez en la historia de la estadística que los comportamientos de los fenómenos naturales, sociales y biológicos se someten en términos estadísticos a curvas de frecuencias (conocidas en Hidrología como histogramas empíricos de frecuencias o de distribución de probabilidad) con formas simétricas y asimétricas.

Cabe resaltar de nuevo que en tiempos anteriores a 1890 en estadística sólo se conocían las curvas simétrica y uniforme para estudiar el comportamiento de los procesos naturales, sociales y biológicos. Por ello, resultó ser una gran novedad para la época el descubrimiento de la asimetría por parte de Pearson.

El profesor Pearson consideró que un modelo determinista en forma de ecuación diferencial ordinaria podía describir en forma satisfactoria el comportamiento de una curva de frecuencia. El sistema de Pearson es de la forma [18, 19]:

$$\frac{dy}{y} = \frac{x+a}{C_1 + C_2x + C_2x^2} dx$$

en donde,

x es el símbolo en letra que representa al proceso en estudio, en Hidrología, por ejemplo, puede ser la radiación proveniente del Sol, la temperatura del aire, la precipitación, la escorrentía superficial, los niveles del agua, la velocidad del agua, los caudales, etc.

y es el símbolo en letra que representa a la probabilidad de un evento del proceso en estudio.

dx es el símbolo en letras que representa al diferencial de x, es decir, a la variación infinitamente continua del proceso hidrológico.

dy es el símbolo en letras que representa al diferencial de y, es decir, a la variación infinitamente continua de la probabilidad.

a, C1, C2, C3 son símbolos en letras y números que representan a los parámetros de la curva que forma el histograma de frecuencias empíricas o teóricas.

La extensión del modelo FPK al Sistema de Pearson se lleva a cabo para el caso cuando la relación de la variación infinitamente continua de y con respecto a la variación infinitamente continua de t es nula, de tal forma que:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{d[Ay]}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d^2[By]}{dx^2},$$

$$\frac{2A}{B} - \frac{dB}{dx} = \frac{dy}{y} = \frac{x+a}{C_1 + C_2x + C_2x^2} dx$$

En este caso, Kolmogorov demostró que de la ecuación FPK pasa al Sistema de Pearson; el tipo de éste dependerá de la ecuación diferencial que simula el comportamiento del proceso de manera determinista.

## 2.2. Reseña sobre las aplicaciones del modelo Fokker-Planck-Kolmogorov en los ámbitos hidrológicos

A partir de la década de los años 30 del siglo pasado, los científicos físicos y matemáticos crearon los modelos tipo FPK-Pearson que incluyen tanto las leyes deterministas como las probabilísticas para modelar los comportamientos de procesos diversos.

A partir de ello, inician los ingenieros y demás profesionales a aplicar estas herramientas novedosas en su diario quehacer.

Se reconocen tres alternativas para estimar la probabilidad de un evento hidrológico, que en la teoría de riesgos se define con el concepto de “amenaza hidrológica”: a) el método de la probabilidad empírica [20], b) los modelos estadísticos tradicionales [21, 22], c) el modelo de funciones de distribución de probabilidad mixta propuesto por Poveda G. [23] y d) el modelo FPK.

Uno de los pioneros en aplicar el modelo FPK es Matheron [24], considerado el creador de la geoestadística, quien se dedicó por muchos años a entender, comprender y aplicar los trabajos de Kolmogorov sobre el modelo FPK en el comportamiento espacial de los procesos.

En Francia, una de las primeras alusiones al modelo FPK en el ámbito hidrológico la realizó Philip [25], quien estudió el comportamiento del agua en la zona no saturada.

En Rusia, El profesor Kliatskin consolidó la aplicación del modelo teórico FPK en áreas diversas de la ingeniería en su monografía titulada “Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами” del año de 1975 [26]. En ella, hizo énfasis en la dinámica de los procesos relacionados con los movimientos del agua (hidrodinámica y mecánica de fluidos), con el fenómeno de la turbulencia (en el agua y en la atmósfera) y, las propiedades del movimiento de la luz. Otros trabajos fueron realizados de manera original por parte de su colega V. I. Tatarskii, con quien publicó varios artículos científicos sobre temas pioneros en los ámbitos de la interpretación estocástica de los procesos con variables de incertidumbre. V. I. Tatarskii se convirtió en el primer investigador en publicar las soluciones a las ecuaciones diferenciales estocásticas en el área de Hidrología (referenciadas a problemas de mecánica de fluidos), en la década de los años 70 del siglo pasado [27]. En la década de los 80 del siglo XX el profesor Kovalenko V. consolida la aplicación del modelo FPK en diversos ámbitos de la hidrología (pronóstico, impacto del cambio climático, hidráulica, diseño de redes de monitoreo, etc.). [17].

En Canadá en 1987 se publicó la primera reseña sobre las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas en hidrología por parte de Bodo B., Thompson M. y Unny T. En ese caso, el modelo FPK se expresó mediante la fórmula [28]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[a(x,t)p] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b^2(x,t)p] + \lambda \int_U \{p[x-\bar{c}(x,t,u),t|x_0,t_0]J(x)-p\}dF_u(u)$$

En Estados Unidos, los ingenieros Ignacio Rodríguez-Iturbe, Amilcare Porporato, Oscar Mesa, Vijay Gupta, entre otros, logran plantear el uso del modelo FPK en los ámbitos de la ingeniería civil, hidrología, ecología y morfometría. Específicamente Rodríguez-Iturbe y Porporato deducen la ley de distribución de probabilidades de la humedad del suelo y le llaman ecuación prospectiva (unidimensional y bidimensional), de Chapman- Kolmogorov [29]; Oscar Mesa plantea la ley de distribución con los parámetros de desplazamiento y difusión con el nombre de función de Green para estudiar el comportamiento de las pendientes y la geometría de una red hídrica en la producción de caudales de un río [30]; Gupta y Rodríguez-Iturbe proponen el modelo FPK para estudiar las propiedades morfométricas de una red hídrica en una cuenca hidrográfica [31]. De este trabajo se resalta que los cálculos del artículo fueron realizados con el apoyo del ingeniero Oscar Mesa.

En Colombia, se cuenta con experiencia amplia en la aplicación del modelo FPK para los ámbitos de los pronósticos hidrometeorológicos, impacto de los escenarios de cambio climático, diseño de redes hidrológicas, diseño hidrológico de obras y fallas de obras civiles y militares.

El profesor Oscar Mesa, docente de la Universidad Nacional de Colombia, expone el modelo Fokker-Planck en un artículo publicado en 1994 en la Revista Avances Hidráulicos [32]. En el artículo compara los resultados de dos modelos estadísticos: a) regresivos no lineales y b) ecuación diferencial aleatoria no lineal con inclusión de ruido blanco. Estos modelos se aplicaron a una serie temporal hidrológica de caudales del río Riogrande. En el desarrollo teórico del tema expone brevemente el modelo Fokker-Planck.

Tres trabajos doctorales se han desarrollado sobre la aplicación del modelo FPK para el estudio de algunos ríos en Colombia, a saber: a) “Desarrollo y aplicación de una metodología para el pronóstico de la escorrentía mensual de los ríos en Colombia con soporte en modelos dinámicos y estocásticos. Caso del río Catatumbo” realizada por Rivera H. [33]; b) “Metodología de pronóstico de caudales decadales medios de los ríos del norte de Colombia con soporte en modelos dinámicos y estocásticos” realizada por Rivera M. [34]; c) “Pronóstico estocástico de afluencia al embalse de Betania” realizada por Domínguez Calle E. [35]. Las tres tesis doctorales fueron dirigidas por el profesor Víktor Kovalenko y se encuentran disponibles en el Centro de Formación de la Organización Meteorológica Mundial en la Universidad Estatal Hidrometeorológica de Rusia en San Petersburgo.

Los artículos que publican la aplicación del modelo FPK-Pearson a los casos de los ríos del territorio colombiano son [36, 37, 38], entre otros.

### 2.3. Ejemplo de aplicación del modelo FPK en el río Fonce

El río Fonce con sus afluentes es un conjunto de corrientes de agua que corren por las montañas del departamento de Santander y entregan sus aguas al río Suárez en el municipio de Pinchote. En [39] se recomienda estudiar el comportamiento del río mediante la teoría moderna de procesos estocásticos, habida cuenta de la volatilidad en los valores de las variables hidrológicas y de la posible existencia de procesos no estacionarios.

En este ejercicio, se toma un área de la cuenca superficial del río Fonce hasta la estación hidrológica de nombre San Gil, con unos 2400 km<sup>2</sup> aproximadamente. Se estudia el comportamiento histórico de los valores medios anuales de caudales en dos periodos (el primero desde 1955 hasta 1984 y el segundo desde 1985 hasta 2014). El comportamiento de estos caudales en ambos periodos se ilustra en los gráficos 1 y 2.

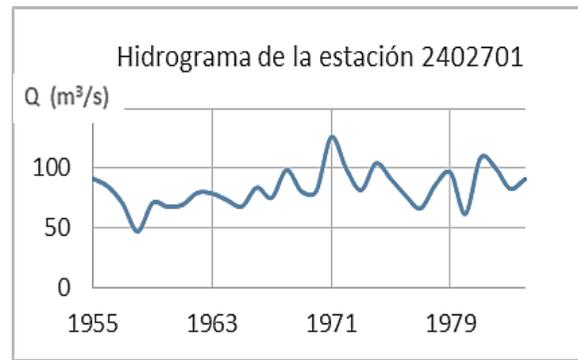


Gráfico 1. Comportamiento de los valores medios de caudales del río Fonce en el periodo 1955-1984

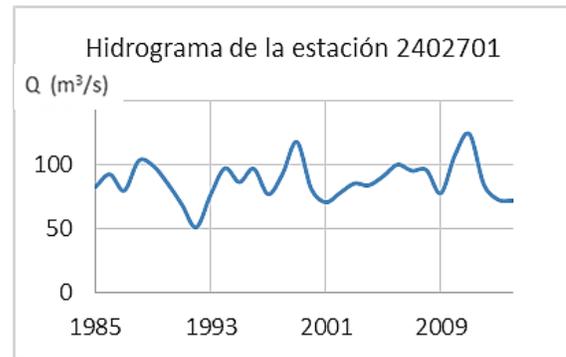


Gráfico 2. Comportamiento de los valores medios de caudales del río Fonce en el periodo 1985-2014

Como se puede apreciar en los gráficos 1 y 2, el caudal promedio en el primer periodo no supera los 84 m<sup>3</sup>/s, mientras que en el segundo periodo supera los 87 m<sup>3</sup>/s. Esta situación permite inferir desde el punto de vista de los momentos estadísticos de Pearson, que el comportamiento de los caudales medios obedece a dos estructuras estadísticas diferentes. Teniendo en cuenta esta aseveración, se considera que los caudales medios anuales en la estación hidrológica San Gil presentan en el periodo temporal 1955-2014 un proceso no estacionario en su valor promedio: en el primer periodo la media es inferior en comparación con el periodo segundo. Esta es la premisa que justifica aplicar el modelo FPK para estudiar el comportamiento temporal de los valores medios anuales de los caudales.

La primera etapa para aplicar el modelo FPK requiere de las premisas siguientes: a) se acepta la descripción del universo planteada por Isaac Newton, en la cual se afirma que el universo es una gran máquina a dominar por parte del hombre; b) se acepta como cosa cierta el planteamiento de Isaac Newton en el sentido de que

son cuatro absolutos los que describen al mundo real: energía, materia, espacio y tiempo; c) en el caso del comportamiento del agua en la esfera Tierra se acepta que se cumple la ley de conservación de masa, expuesta por Isaac Newton; d) el balance hídrico es una la ley en hidrología que manifiesta la ley de conservación de masa en un sistema cerrado, de allí que su ecuación algebraica sea:

$$P-E-ET-Q_s-F-A=0$$

en donde, P es el valor medio de la precipitación multianual, E es el valor medio de la evaporación multianual, ET es el valor medio de la transpiración de las plantas, Q<sub>s</sub> es el valor medio de la escorrentía, F es el valor medio de la filtración de agua, A es el valor medio del almacenamiento de agua.

Como se puede apreciar, la ecuación algebraica del balance hídrico garantiza que el agua total en el planeta Tierra se transforma, mas no se crea o se destruye.

Para el caso del área aferente del río Fonce seleccionada (cuenca hasta la estación San Gil), el balance hídrico del periodo 1955-1984 es el siguiente: P(2330mm)-Q(1100mm)- E-ET-F-A = 0

Se asume un valor de precipitación de 2330 mm en la estación Charalá, y que el valor total de la evaporación, transpiración, filtración y el almacenamiento son 1230 mm.

El balance hídrico para el periodo 1985-2014 es el siguiente:

$$P(2550\text{mm})-Q(1150\text{mm})-E(1200\text{mm})-F-ET-A = 0.$$

Se asume que el valor total de la transpiración, filtración y el almacenamiento son 400 mm.

Como se puede apreciar, en el primer periodo el balance hídrico expresa una menor cantidad de la precipitación y de la escorrentía, en comparación con el segundo periodo. Con esta premisa procedemos a aplicar la segunda etapa del modelo FPK, planteando un modelo determinista con una ecuación diferencial ordinaria lineal de la forma:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{k\tau}Q + \frac{X}{\tau}$$

$$X = P - E - ET - F - A$$

En donde t es un tiempo (en este caso t<sub>0</sub> es un tiempo inicial que comprende el periodo 1955-1984, t<sub>1</sub> es el tiempo del segundo periodo), Q es el valor medio del caudal (m<sup>3</sup>/s) del río Fonce en la estación San Gil, k y τ son coeficientes (que relacionan la precipitación, la lámina de agua, la actividad humana en la cuenca, la vegetación, el suelo, el cauce). De este modelo se puede inferir lo siguiente: a) refleja en sí una relación de balance, que comprende los procesos de escorrentía, precipitación, evaporación, transpiración, filtración y almacenamiento; b) si estos procesos presentan valores medios iguales en los periodos 1955-1984 y 1985-2014, entonces la relación diferencial dQ/dt es igual a cero.

De otra parte, en la actualidad ampliamente se sabe que las mediciones de los procesos del balance hídrico conllevan márgenes de incertidumbre, debido no solo a los procedimientos mismos de medición sino por los errores de los instrumentos de medición que se utilizan en el país. Por ello, resulta justo contemplar en el modelo determinista los errores de medición de las variables que contempla; entonces la ecuación determinista ordinaria se transforma a una ecuación aleatoria ordinaria, de la forma:

$$dQ = -(C - \alpha) Q dt + (N + \beta) dt$$

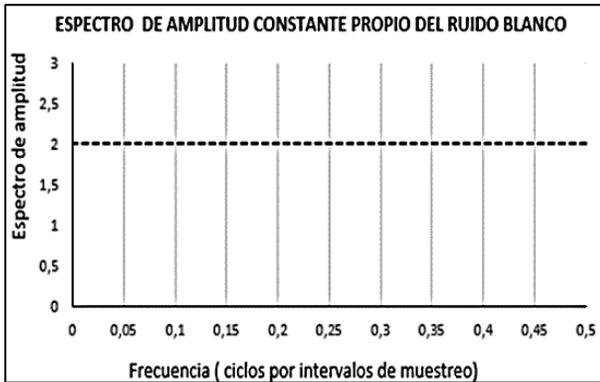
$$C = \frac{1}{k\tau}$$

$$N = \frac{X}{\tau}$$

En donde α representa a un ruido blanco (que incide en forma multiplicativa sobre Q) y β es otro ruido blanco (que incide en forma aditiva sobre X).

En este caso el concepto de ruido blanco se toma de la física, en donde es un comportamiento errático idealizado para tratar las señales. Se asume que el valor medio del comportamiento de un ruido blanco es nulo y su varianza es infinita. En física estadística se construye el ruido blanco como un conjunto de valores erráticos que se ajustan a una ley Normal con

media nula y varianza finita. Allí se estudia el ruido blanco mediante el análisis espectral, en el cual se resalta su frecuencia y amplitud. Una de las propiedades más importantes que le diferencia del concepto del ruido coloreado, es que su espectro de amplitud es constante (gráfico 3).



**Gráfico 3.** Comportamiento constante del espectro de amplitud de un ruido blanco. Fuente: [40]

La nueva ecuación diferencial ordinaria contiene ya valores erráticos dados por el ruido blanco; por ello, se denomina en este trabajo ecuación diferencial aleatoria. En otros casos, se suele expresar la incertidumbre mediante la inclusión de una integral del proceso Wiener (W) y entonces toma la forma:

$$dQ = -(CQ) + Q dW_t^1 + N + dW_t^2$$

Cuando la ecuación diferencial contiene un proceso W se denomina ecuación diferencial estocástica, cuya solución se brinda con soporte en el cálculo integral estocástico. Este cálculo ofrece dos tipos de enfoques: a) el método de Stratanovich y b) el método de Ito. Para los ingenieros ambos métodos son muy difíciles de estudiar, debido principalmente al desconocimiento que se tiene del cálculo estocástico y de la teoría moderna de probabilidad, en la cual juegan un rol importante los conceptos de sigma álgebra, medida de probabilidad, filtraciones y martingalas.

De esta manera se llega a la tercera etapa de la aplicación de la FPK, la cual consiste en establecer las fórmulas específicas de los parámetros A y B. En este trabajo solo se presentan las fórmulas de A y B considerando que la incertidumbre en el modelo determinista se expresa mediante un ruido blanco aditivo y otro multiplicativo.

Establecer las fórmulas específicas de los parámetros A y B requiere el conocimiento particular sobre la integración de procesos tipo ruido blanco, teniendo en cuenta que sus valores no están correlacionados entre sí, que su integral da como resultado una función tipo Delta-Dirac y que, ante ruidos diferentes, sus intensidades pueden estar correlacionadas. En el caso de la ecuación diferencial aleatoria planteada, las fórmulas de A y B son:

$$A(Q) = -(C - 0.5 G_\alpha) Q - 0.5 G_{\alpha\beta} + N$$

$$B(Q) = G_\alpha Q^2 - 2G_{\alpha\beta} Q + G_\beta$$

Una vez sean definidos los parámetros A y B, se procede a establecer la ecuación FPK, que en este caso es de la forma:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial[Ay]}{\partial Q} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2[By]}{\partial Q^2}$$

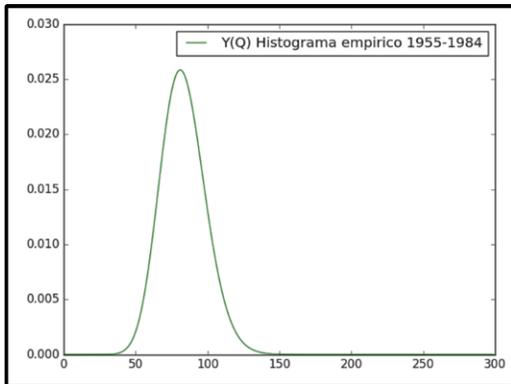
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left[ -(C - 0.5G_\alpha) Q - 0.5G_{\alpha\beta} + N \right] \frac{\partial y}{\partial Q} +$$

$$\frac{1}{2} \left[ G_\alpha Q^2 - 2G_{\alpha\beta} Q + G_\beta \right] \frac{\partial^2 y}{\partial Q^2}$$

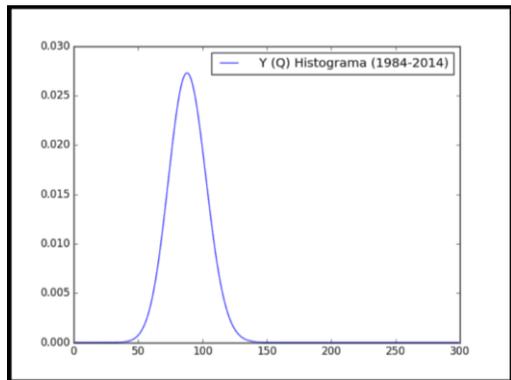
El modelo FPK al ser una ecuación diferencial en derivadas parciales de tipo parábola, se puede solucionar mediante métodos analíticos o numéricos. En este caso, se aplica el método numérico desarrollado por Domínguez Calle E. et al (2010), el cual es explícito. Recordemos que la FPK brinda como resultado un histograma de frecuencias teóricas de Q o un conjunto de momentos estadísticos del comportamiento futuro de Q, entre otros valores estadísticos.

Como toda ecuación diferencial en derivadas parciales, la solución numérica de la FPK requiere conocer: a) la condición inicial, que en este caso es el histograma empírico de frecuencias de Q en el periodo 1955-1984, o su ley de distribución de probabilidades; b) las condiciones de frontera en el rango de los posibles valores de Q, que en este caso se fijan para el valor 0 m<sup>3</sup>/s y 300 m<sup>3</sup>/s, es decir, se asume que es imposible que el río Fonce llegue a tener unos valores medios de caudales iguales a 0 m<sup>3</sup>/s y 300 m<sup>3</sup>/s; c) el criterio de estabilidad del método

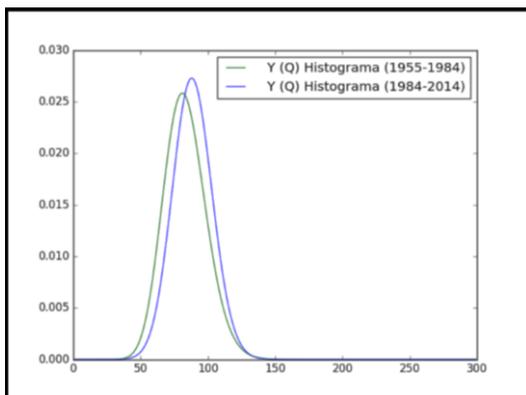
numérico a emplear, el cual para este caso se puede consultar en Domínguez Calle E. et al (2010). En este caso se aplica el código de programación del método numérico desarrollado por Domínguez Calle E.



**Gráfico 4.** Histograma de frecuencias de los valores medios de caudales del río Fonce en el periodo 1955-1984



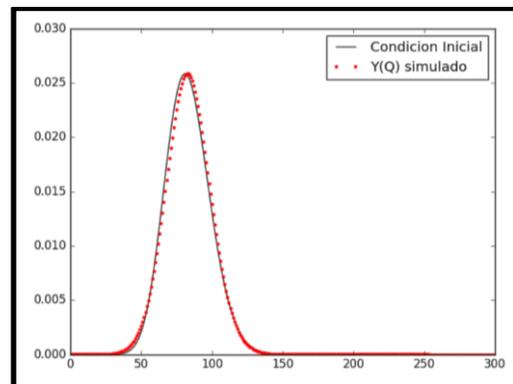
**Gráfico 5.** Histograma de frecuencias de los valores medios de caudales del río Fonce en el periodo 1985-2014



**Gráfico 6.** Diferencias entre el histograma de frecuencias del periodo 1955-1984 y 1985-2014 en valores medios de caudales del río Fonce.

Para calibrar el modelo FPK se procedió de la manera siguiente en tres etapas.

La primera etapa consistió en: a) para el periodo primero (1955-1984) se transformó el valor de precipitación ( $P=2370\text{mm}$ ) en la estación meteorológica Charalá, a caudal, lo cual arrojó  $P=180\text{ m}^3/\text{s}$ ; b) a partir de la función de autocorrelación para los valores de caudales se estimó el valor del coeficiente  $\tau=1$ ; c) en la relación  $(Q/P)=(83\text{m}^3/\text{s})/(180\text{ m}^3/\text{s})$  se halló el valor  $k=0,46$ ; Con el valor de  $\tau$  y  $k$ , se estimó el valor  $C=1/(\tau k)=2.17$  aproximado; d) con las condiciones iniciales y de frontera antes señaladas,  $N=180\text{ m}^3/\text{s}$ ,  $C=2.17$ , se corre el modelo FPK de tal manera que se hallen los valores de las intensidades de los ruidos. Los resultados del ajuste del modelo FPK al histograma empírico del periodo primero (gráfico 4) se ilustra en el gráfico 7.

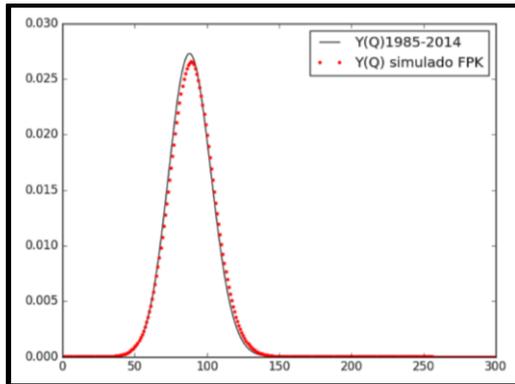


**Gráfico 7.** Diferencias entre el histograma empírico y el modelado con FPK en el periodo 1955-1984.

En este caso los valores encontrados para las intensidades de los ruidos blancos son:  $G\alpha=0.0165$ ,  $G\alpha\beta=0.100$  y  $G\beta=950$ .

En la segunda etapa se asume que se conoce el valor de  $N(\text{m}^3/\text{s})$  en el periodo segundo (1955-2014), el valor de  $C$  y de dos intensidades de los ruidos blancos permanecen constantes con respecto al periodo primero, procediéndose en los cálculos así: a) para el periodo segundo (1984-2014) se transformó el valor de precipitación ( $P=2550\text{mm}$ ) en la estación meteorológica Charalá, a caudal, lo cual arrojó  $P=195\text{m}^3/\text{s}$ ; b) como se desconoce el valor que tomará  $k$  y  $\tau$ , se asume que  $C=2.17$  aproximado; c) con las condiciones iniciales y de frontera antes señaladas,  $N=195\text{m}^3/\text{s}$ ,  $C=2.17$ , se corre el modelo FPK, asumiendo que la intensidad asociada al ruido blanco de  $N$  disminuye en el mismo porcentaje que aumenta  $N$  (del primer al segundo periodo, aprox. 7,5%). Los resultados del ajuste del modelo FPK al

histograma empírico del periodo segundo (gráfico 5) se ilustra en el gráfico 8.



**Gráfico 8.** Diferencias entre el histograma empírico y el modelado con FPK en el periodo 1985-2014.

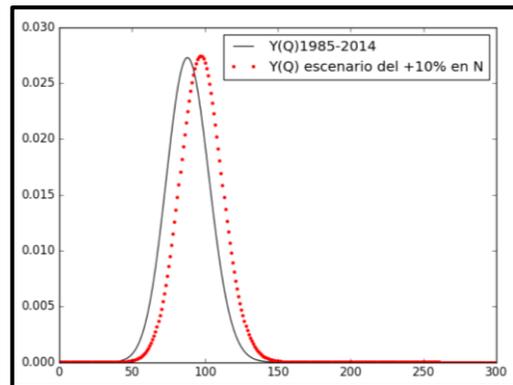
Así las cosas, se puede afirmar que el modelo FPK está calibrado en forma adecuada con los valores de los parámetros:  $C=2.17$ ,  $G\alpha=0.0165$ ,  $G\alpha\beta=0.100$  y  $G\beta=878$ . Está claro que estos valores obedecen a las condiciones de cada río y están sujetos a la experticia del modelador.

De ahora en adelante para aplicar el modelo FPK, se utilizarán esos valores y lo único que se requerirá es conocer el valor futuro de la precipitación, representada en el modelo por  $N$ . Por supuesto que cuando se tenga información adicional se podrá variar los valores de los parámetros  $k$ ,  $\tau$ ,  $C$ , y también los valores de las intensidades de los ruidos blancos. Este es un ejemplo con información insuficiente y por lo tanto se asumieron las consideraciones antes explicadas.

El modelo FPK está calibrado y ahora se puede aplicar para resolver las siguientes situaciones. Si por ejemplo se desea dar respuesta al interrogante ¿cuál será el impacto del aumento de las precipitaciones por cambio climático a futuro en el comportamiento de los valores medios de caudales del río Fonce?, o se desea responder a la pregunta ¿Cuál es la probabilidad (amenaza), de que se presente un caudal promedio multianual superior o igual a  $150 \text{ m}^3/\text{s}$  con aumento de las precipitaciones a largo plazo por cambio climático?, entonces la respuesta se podría dar en los siguientes términos. Se toma el escenario de cambio climático de las precipitaciones para el periodo que brinda el estudio del instituto IDEAM en la Comunicación Nacional de Cambio Climático (u otra

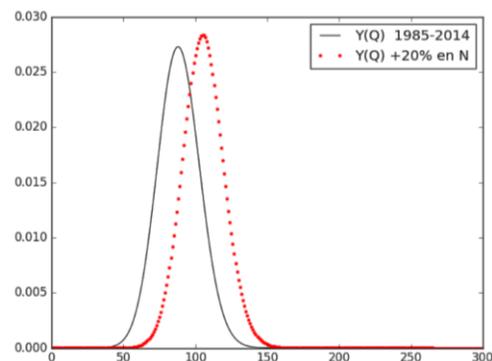
fente que se tome de referencia), que en este caso se asume del 10% y 20 % de aumento en la precipitación.

El comportamiento del histograma de frecuencias de los valores medios de caudales del río Fonce bajo escenario de cambio climático con un aumento del 10% en precipitación se ilustra en el gráfico 9, bajo las premisas antes señaladas. En este modelado tenemos que los valores de los parámetros son:  $N=214.5 \text{ m}^3/\text{s}$  (la precipitación aumentó un 10% respecto a su valor de  $195 \text{ m}^3/\text{s}$ ),  $C=2.17$ ,  $G\alpha=0.0165$ ,  $G\alpha\beta=0.100$  y  $G\beta=790$  (recordemos que se disminuye su valor en un 10% respecto al valor calibrado de 878).



**Gráfico 9.** Impacto del aumento del 10% en precipitación por escenario de cambio climático en el histograma de frecuencias de los valores medios de caudales del río Fonce.

Para el caso del aumento de un 20% en la precipitación, el modelado se realiza con los valores siguientes de los parámetros:  $N=234 \text{ m}^3/\text{s}$  (la precipitación aumentó un 20% respecto a su valor de  $195 \text{ m}^3/\text{s}$ ),  $C=2.17$ ,  $G\alpha=0.0165$ ,  $G\alpha\beta=0.100$  y  $G\beta=702$  (recordemos que se disminuye su valor en un 20% respecto al valor calibrado de 878).



**Gráfico 9.** Impacto del aumento del 20% en precipitación por escenario de cambio climático en el histograma de frecuencias de los valores medios de caudales del río Fonce.

En cuanto a la amenaza de un caudal medio multianual igual o superior a 150 m<sup>3</sup>/s, el modelo FPK arroja para el aumento del 10% de precipitación una probabilidad baja, mientras que para un aumento de precipitación del 20% una amenaza alta. Así las cosas, el modelo FPK permite modelar las amenazas de eventos hidrológicos que requiere la Gestión del Riesgo en nuestro país.

Una de las diferencias del modelado con la FPK en comparación con el estadístico tradicional (tipo series de tiempo, Sistema de Pearson, lógica difusa y redes neuronales o neuro-difusas) es que el resultado de la FPK obedece a condiciones físicas reales que se presentan en una cuenca hidrográfica y no simplemente a un ejercicio de optimización de parámetros mediante ecuaciones de regresión.

## 2 Conclusiones

Este trabajo permite ilustrar el desarrollo que ha tenido la aplicación de la FPK en diversos ámbitos de la ciencia (física, física cuántica, finanzas e hidrología) y sus ventajas frente al modelado estadístico tradicional.

El modelo FPK cuenta ya con varias décadas de aplicación en hidrología y su uso principal se ofrece en los estudios de las aguas superficiales y subterráneas, así como también en el ámbito de los pronósticos hidrológicos.

El ejercicio de modelado demuestra que es viable aplicar el modelo FPK en la estimación de la probabilidad de ocurrencia de eventos hidrológicos ante situaciones con información hidrológica insuficiente partiendo de los principios del balance hídrico en una cuenca hidrográfica. Además, los resultados obtenidos permiten conocer el comportamiento futuro de la función de probabilidad de los valores medios del río Fonce ante escenarios hipotéticos de cambio climático.

En la medida en que se tenga mejor información respecto al suelo, vegetación y actividad humana, el modelo ofrecerá resultado más detallados y versátiles.

## 3 Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento a las directivas de la Escuela de Ingenieros Militares ESING, Universidad Nacional de Colombia, al Instituto IDEAM, Corporación CAS, Empresa ACUASAN.

## 4 Referencias

1. UNESCO (1981). Métodos de cálculo del balance hídrico, guía internacional de investigación y métodos. Madrid.
2. United States Department of Agriculture (1972). Soil Conservation Service Hydrology, SCS National Engineering Hand Book.
3. MMM Group 2015, Floodplain Mapping in Applewood and Dundas / Dixie Special Policy Area, Little Etobicoke Creek, Prepared by MMM Group for Toronto Region Conservation Authority.
4. Chapra, S.C., Pelletier, G.J. and Tao, H. 2012. QUAL2K: A Modeling Framework for Simulating River and Stream Water Quality, Version 2.12: Documentation and Users Manual. Civil and Environmental Engineering Dept., Tufts University, Medford.
5. V. T. Chow, D. R. Maidment, L. W. Mays. 1964. Handbook of applied Hydrology. McGraw-Hill, San Francisco.
6. Strutt John William y Rayleigh Baron (929). The Theory of sound. Dover publications. New York.
7. Fuentes Bacca J., Palacio Gómez D., Hoyos Ortiz L., Rivera H. Oportunidades entre la tecnología militar y la ingeniería civil. Caso de estudio: Aplicación del Sistema Estadístico de Pearson en la modelación de los caudales medios mensuales del río Fonce –Santander. En: Revista de Investigación ESING, 2015, Vol 10, Bogotá.
8. Einstein A. (1905). "Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden

- Flüssigkeiten suspendierten Teilchen." *Ann. Phys.* 17, 549. Leipzig.
9. Bachelier L. (1900). *Théorie de la spéculation*. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* 3 (17), pp. 21–86, Paris.
  10. Fokker A. (1914). Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld, *Ann. Phys.*, 7, Leipzig.
  11. Planck M. (1917). Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Leipzig.
  12. Kolmogorov A. (1931) Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig.
  13. De la Rosa E. Blázquez R. (2003). *Procesos estocásticos en ingeniería civil*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid.
  14. Barbosa R. Llinas H. (2015) *Procesos estocásticos con aplicaciones*. Universidad del Norte, Barranquilla.
  15. García Álvarez M. A. (2005). *Introducción a la teoría de probabilidad*. Fondo de Cultura Económica, México.
  16. Risken H. (1989) *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag, London.
  17. Kovalenko V. (1992) *Modelirovanie gidrologicheskikh protsesos*. Gidrometizdat, Leningrado.
  18. Pearson K. (1895) *Contributions to the Mathematical Theory of Evolution*. II. Skew Variation in Homogeneous Material. *Philosophical Transaction of the Royal Society A*, London.
  19. Silva Medina G. (1998) *Hidrología Básica*. Universidad Nacional de Colombia, facultad de ingeniería, Bogotá.
  20. Benjamin J. (1970). *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*. San Francisco, McGraw-Hill, San Francisco.
  21. N. R. Rich, L. Greene, R. C. Graham. The Pearson's System of frequency curves digital computer program. US Army Missile Command Restone Arsenal, Alabama, Report RD-TR 7114, June 1971.
  22. Aparicio L. (2009) *Fundamentos de Hidrología de Superficie*. Limusa, México.
  23. Poveda Jaramillo G. (2012) El colapso de la hipótesis de estacionariedad por cambio climático y variabilidad climática: implicaciones para el diseño hidrológico en ingeniería. *Revista de Ingeniería*, Universidad de los Andes, No. 36, Bogotá.
  24. Matheron Georges .1965: *cours II de probabilités les procesos stochastiques*. B.R.G.M. Departamento Geostatistique, Paris.
  25. Phillip J. (1970) Flow in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 2, 177-204. Camberra.
  26. Кляцкин В. А. (1975) *Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами*. Moscú.
  27. Кляцкин В. А., Татарский В. (1973). *ТМФ* 17. Moscú.
  28. Bodo B., Thompson M., Unny T. (1987) A review on stochastic differential equations for applications in hydrology. *Stochastic Hydrology and Hydraulic*, vol. 1, 81-100.
  29. Rodríguez-Iturbe I. (2004) *Ecohydrology of water-controlled ecosystems*. Cambridge University press, Estados Unidos.
  30. Mesa O.
  31. Gupta V., Rodríguez-Iturbe I.
  32. Salazar Velásquez J., Mesa O. (1994). *Aplicación de dos modelos no lineales a la simulación de*

series hidrológicas. Revista Avances Hidráulicos, vol. 2. Medellín.

33. Rivera H. (2001) Desarrollo metodológico de pronóstico mensual de caudales de ríos de la República de Colombia basado en modelos dinámicos y estocásticos: El caso del río Catatumbo. Universidad Hidrometeorológica de Rusia.
34. Rivera M. E. (2003) Metodología de pronóstico de caudales mensuales de ríos de la República de Colombia con el uso de modelos dinámicos y estocásticos. Universidad Hidrometeorológica de Rusia.
35. Domínguez Calle E. (2004) Pronóstico estocástico de caudales de ríos de la República de Colombia. Universidad Hidrometeorológica de Rusia.
36. Domínguez Calle E. (2004) Aplicación de la ecuación Fokker-Planck-Kolmogorov para el pronóstico de las afluencias a embalses hidroeléctricos. Meteorología Colombiana, vol. 8. Bogotá.
37. Ivanova Y., Corredor Rivera J. (2006). Evaluación de la sensibilidad de los caudales máximos de diseño ante la influencia del cambio climático. Revista Avances Hidráulicos. Medellín.
38. Domínguez Calle E., Rivera H. (2010). A Fokker-Planck-Kolmogorov equation approach for the monthly affluence forecast of Betania hydropower. Journal of Hydroinformatics.reservoir
39. H. G. Rivera, D. C. Palacio Gómez, F. M. Rangel Guerrero. 2013. Impacto de los escenarios de cambio climático en los recursos naturales renovables en jurisdicción de la Corporación Autónoma Regional de Santander. Otero Impresos – Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
40. Pardo E. (2012) Geomatemáticas. Catarata, Madrid.