Construcción de un proceso estocástico para simular el movimiento de caudales medios en el rio Fonce (San Gil - Santander)

Construction of a continous stochastic process to simulate motion media flow in Fonce river (San Gil - Santander)

María Esther Rivera[1], Javier Adrian Correa Herrera [2], Albert Avendaño Barrera[3], Hebert Gonzalo Rivera[4], Jorge Brandon Fuentes Bacca[5]

[1] *Ph.D. Facultad de Ingeniería, Universidad de Pamplona, maes@unipamplona.edu.co*
[2] *Auxiliar de Investigación, Ingeniería Civil, Universidad Militar Nueva Granada, u1101339@unimilitar.edu.co*
[3] *Auxiliar de Investigación, Ingeniería Civil, Universidad Militar Nueva Granada, u1101695@unimilitar.edu.co*
[4] *Ph.D. Ingeniero Hidrólogo, Ingeniería Civil, Universidad Militar Nueva Granada, hebert.rivera@unimilitar.edu.co*
[5] *Auxiliar de Investigación, Ingeniería Civil, Universidad Militar Nueva Granada, u1101464@unimilitar.edu.co*

Fecha de recepción: 05/05/2015 Fecha de aceptación del artículo 13/10/2015

Resumen

Con la presente investigación se pretende construir un proceso estocástico en los términos de la axiomática de Kolmogorov. Para ello se toman los valores medios mensuales multianuales de caudales del río Fonce en la estación hidrológica del IDEAM con sede en San Gil (Santander). Inicialmente se compilaron los datos de los valores medios mensuales de caudales del río, posteriormente se definen los espacios muestrales, los eventos, las sigmas álgebras, las variables aleatorias (en total 12, una en cada mes), los espacios de probabilidad. y finalmente el proceso estocástico como tal.
Este trabajo permite concluir que es posible y viable construir un proceso estocástico continuo en los valores medios mensuales del río Fonce. Esto conllevará a plantear nuevas interpretaciones estocásticas para modelar la dinámica de los caudales medios del río Fonce, en las cuales se podrán aplicar la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas y la ecuación Fokker-Planck o ecuación prospectiva de Kolmogorov.

Este trabajo es resultado del proyecto de investigación UMNG 1770 de 2015, con auspicio económico de la vicerrectoría de Investigaciones de la UMNG y se desarrolló en conjunto con la Universidad de Pamplona.

Palabras claves

Espacio muestral, evento, sigma algebra, proceso estocástico.

Abstract

This research aims to construct a stochastic process in terms of the axiomatic of Kolmogorov. For this purpose, this work uses multiyear monthly average values of flow of river Fonce, which were taken in the IDEAM hydrological station located in San Gil (Santander).

Initially the data of monthly mean values of river flows were compiled, then the sample spaces, events, sigma algebras, random variables (total 12, one per month), the probability spaces were defined, and finally the stochastic process.

This work leads to the conclusion that it is possible and feasible to build a continuous stochastic process in the monthly average values of Fonce River. This will lead to raise new stochastic interpretations to model the dynamics of the average flow of the river Fonce, in which it could be possible to apply the theory of stochastic differential equations and Fokker-Planck equation or forward Kolmogorov equation.

The work was developed under the research project 1770 ING UMNG 2015, with funding of the

Investigation´s office and together with the University of Pamplona.

Keywords

Random space, event, sigma algebra, random function, stochastic process.

1. Introducción

En hidrología estocástica se suelen crear procesos estocásticos a partir de los espacios muéstrales (discretos o continuos) que toman como exactos o ciertos los valores de las variables hidrológicas (niveles del agua, velocidades del agua, caudales, carga o concentración de sedimentos, etc.). Sin embargo, para el caso de los valores de caudales en Colombia se utilizan procedimientos e instrumentos que no permiten garantizar la plena exactitud en los resultados de las mediciones [1]. Tal es el caso del aforo de caudales, en el cual se utilizan en la gran mayoría de los casos el instrumento conocido como molinete o correntómetro [2].

Este trabajo resuelve el problema expresado con el interrogante: ¿es posible construir un proceso estocástico en los valores de caudales medios del río Fonce?

La construcción de un proceso estocástico requiere en primera instancia saber operar los conceptos de la teoría moderna de probabilidad (espacio muestral, evento, sigma álgebra, espacio medible, variable aleatoria en un espacio medible, espacio de probabilidad, etc.) y determinar parcialmente los márgenes de errores que se cometen cuando se afora un río [3]. Esta construcción se diferencia de la aplicación de la teoría clásica de probabilidad, dado que en ella no tienen lugar los conceptos de la teoría moderna de probabilidad, excluyendo el concepto de variable aleatoria como una función medible y a la probabilidad como una medida en un espacio medible.

En este trabajo se presenta en forma detallada cada uno de los conceptos modernos de la hidrología estocástica, tales como espacio muestral, evento, sigma álgebra, espacio medible, variable aleatoria en un espacio medible y espacio de probabilidad [4,5,6,7,8], con la novedad de plantearlos en caudales medios mensuales.

Existe muy poca literatura respecto a la aplicación de estos acercamientos en los ámbitos de la hidrología estocástica y de allí la importancia de este esfuerzo científico en el marco del proyecto de investigación UMNG ING 1770 de 2015, el cual se desarrolla conjuntamente con la Universidad de Pamplona.

Entre otras ventajas de aplicar la teoría moderna de procesos estocásticos se citan las siguientes: a) permite aplicar los modelos tipo martingalas para simular el comportamientos de las variables hidrológicas según la disponibilidad de la información mediante el planteamiento de sigmas álgebras diversas; b) se amplía la modelación hidrológica a los procesos no estacionarios, en los cuales los momentos estadísticos varían en el tiempo y en el espacio (por ejemplo, por causa del fenómeno de cambio climático); c) facilita la aplicación del modelo Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK), el cual en Colombia ya cuenta con alguna experiencia (Domínguez Calle E. et al, 2004, 2010).

Respecto al modelo FPK, se afirma que goza de amplia experiencia en telemática, mecatrónica, sistemas, navegación marina y satelital; sin embargo, en el área de ingeniería civil e hidrología es muy precario su conocimiento. Por último, es importante reseñar que este modelo simula el comportamiento de los histogramas de frecuencias de las variables meteorológicas e hidrológicas y afronta con éxito el modelado de los comportamientos de las variables bajo régimen no estacionario.

2. Metodología

En la teoría moderna de probabilidad, un proceso estocástico se define en los siguientes términos [8]: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad, T un conjunto indexado y $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ un espacio medible. Un $\mathcal{F}$- proceso estocástico valorado en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es una familia (Xt) de variables aleatorias (Xt): $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$. Aquí se tiene que $t \in \mathrm{T}$. En esta definición $\bar{\Omega}$ es el espacio muestral inicial, Ω es un espacio muestral expresado en valores de los números reales, $\mathcal{F}$ es una sigma álgebra sobre el espacio Ω, $\bar{\mathcal{F}}$ es una sigma álgebra sobre el espacio $\bar{\Omega}$, T se expresa en una variable del espacio o del tiempo.

La metodología en este trabajo consiste en desarrollar con los valores medios mensuales multianuales de caudales cada uno de los conceptos antes citados. Los datos fueron obtenidos de la estación hidrológica ubicada en el Rio Fonce, San Gil, identificada por el código 2402701 del IDEAM. Inicialmente se compilan los valores medios de caudales mensuales en el periodo 1956-2012, posteriormente se construye su dinámica temporal mensual (figura 1) y con ello se procede a establecer los conceptos de espacio muestral, evento, sigma álgebra, espacio medible, variable aleatoria en un espacio medible y espacio de probabilidad.

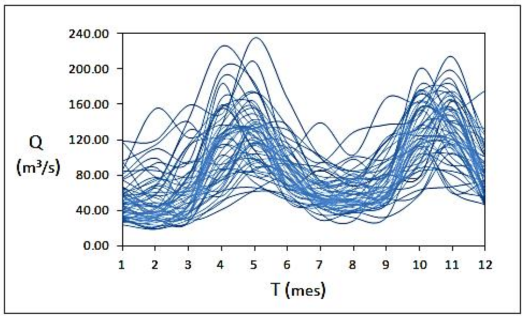


Figura 1. Dinámica temporal de caudales medios mensuales del río Fonce en San Gil.

A continuación de desarrolla la metodología antes descrita.

2.1 Construcción del espacio medible referente (cualitativo)

El experimento aleatorio es cualquier acción que conlleve a varios resultados, conocidos con anterioridad al experimento pero siendo imposible de predecir exactamente cuál de ellos se obtendrá una vez se realice el experimento. En nuestro caso se toma como experimento aleatorio a los movimientos repetitivos de traslación y rotación de la Tierra en interacción con las actividades humanas y las propiedades naturales en una cuenca. La complejidad de estas interacciones genera en los ríos movimientos diversos del agua, los cuales son estudiados en hidrología mediante las variables hidrológicas de niveles del agua y caudales.

Los niveles del agua y caudales son el resultado de diversas interacciones en los ámbitos naturales y humanos. En la práctica se suele afirmar que una persona nunca se baña dos veces en el mismo río: los constantes cambios en los valores del caudal junto con la imprecisión del conocimiento humano no permiten establecer un método científico que dé cuenta de ellos con exactitud.

Un espacio muestral referente, denotado por $\overline{\Omega}$ (asociado con un experimento aleatorio) es un conjunto de elementos, los cuales conforman el resultado del experimento. Inicialmente se plantean expresiones cualitativas para describir los resultados del experimento aleatorio. En este caso, se asume que los valores de caudales reflejan situaciones de caudales bajos (Cb), bajos medios (Cbm), medios (Cm), medios altos (Cma) y altos (Ca).

En el presente trabajo se establecieron cinco elementos muestrales $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)$, los cuales representan cinco tipos de caudales medios mensuales multianuales, a saber: los valores de caudales bajos (Cb), caudales medios bajos (Cmb), caudales medios (Cm), caudales medios altos (Cma) y caudales altos (Ca). Por lo tanto el espacio muestral es:

$$\overline{\Omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{4,} \omega_5]$$

en donde,

ω_1: Caudales bajos
ω_2: Caudales medios bajos
ω_3: Caudales medios
ω_4: Caudales medios altos
ω_5: Caudales altos

Se define al evento (con respecto a $\overline{\Omega}$) como elemento de una sigma álgebra, que comprende al menos a un elemento del espacio muestral o una colección de éstos.

Al conjunto vacío $\emptyset$ se le llama evento imposible (o nulo) y al espacio muestral $\overline{\Omega}$ se le conoce como el evento cierto (o seguro).

De acuerdo con el anterior criterio se formulan los siguientes cinco eventos en el espacio muestral referente:

$$A_1 = [Cb]$$
$$A_2 = [Cmb]$$
$$A_3 = [Cm]$$

$A_4 = [Cma]$
$A_5 = [Ca]$

Los complementos para cada evento son:

$$A_1^c = \Omega \backslash A_1 = [Cb, Cmb, Cm, Cma, Ca] - [Cb]$$
$$= [Cmb, Cm, Cma, Ca]$$
$$A_2^c = \Omega \backslash A_2 = [Cb, Cmb, Cm, Cma, Ca] - [Cmb]$$
$$= [Cb, Cm, Cma, Ca]$$
$$A_3^c = \Omega \backslash A_3 = [Cb, Cmb, Cm, Cma, Ca] - [Cm]$$
$$= [Cb, Cmb, Cma, Ca]$$
$$A_4^c = \Omega \backslash A_4 = [Cb, Cmb, Cm, Cma, Ca] - [Cma]$$
$$= [Ca, Cmb, Cm, Ca]$$
$$A_5^c = \Omega \backslash A_5 = [Cb, Cmb, Cm, Cma, Ca] - [Ca]$$
$$= [Cb, Cmb, Cm, Cma]$$

A continuación, se identifican las uniones de los eventos antes establecidos de la forma siguiente:

$A_1 \cup A_2 = [Cb, Cmb]$
$A_1 \cup A_3 = [Cb, Cm]$
$A_1 \cup A_4 = [Cb, Cma]$
$A_1 \cup A_5 = [Cb, Ca]$
$A_2 \cup A_1 = A_1 \cup A_2 = [Cmb, Cb]$
$A_2 \cup A_3 = [Cmb, Cm]$
$A_2 \cup A_4 = [Cmb, Cma]$
$A_2 \cup A_5 = [Cmb, Ca]$
$A_3 \cup A_1 = A_1 \cup A_3 = [Cm, Cb]$
$A_3 \cup A_2 = A_2 \cup A_3 = [Cm, Cmb]$
$A_3 \cup A_4 = A_2 \cup A_3 = [Cm, Cma]$
$A_3 \cup A_5 = [Cm, Cma]$
$A_4 \cup A_5 = [Ca, Cma]$

La intersección entre los eventos se formula como un conjunto vacío:

$A_1 \cap A_2 = [Cb] \cap [Cmb] = \emptyset$
$A_1 \cap A_3 = [Cb] \cap [Cm] = \emptyset$
$A_1 \cap A_4 = [Cb] \cap [Cma] = \emptyset$

Las demás intersecciones son vacías.
A partir de los eventos formulados, sus uniones e intersecciones se procede a construir una sigma álgebra. Una familia de subconjuntos de $\overline{\Omega}$, representada por $\bar{\mathcal{F}}$, es una σ-álgebra sobre a $\overline{\Omega}$ cuando se cumplen las siguientes propiedades:

-El conjunto vacío está en $\bar{\mathcal{F}}$:$\emptyset \in \bar{\mathcal{F}}$

-Si A está en $\bar{\mathcal{F}}$, también está su complemento.
-Si.A_1, A_2, A_3.. es una sucesión de elementos de $\bar{\mathcal{F}}$, entonces la unión de todos ellos también está en $\bar{\mathcal{F}}$ [8]. Se define la σ-álgebra así:

$$\bar{\mathcal{F}} = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \Omega, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_1^c, A_2^c, A_3^c, \\ A_4^c, A_5^c, A_1 U A_2, A_1 U A_3, A_1 U A_4, \\ A_1 U A_5, A_2 U A_3, A_2 U A_4, A_2 U A_5, \\ A_3 U A_4, A_3 U A_5, A_4 U A_5, A_1 \cap A_2, \\ A_1 \cap A_3, A_1 \cap A_4, A_1 \cap A_5, A_2 \cap A_3, \\ A_2 \cap A_4, A_2 \cap A_5, A_3 \cap A_4, \\ A_3 \cap A_5, A_4 \cap A_5, \end{array} \right\}$$

$$\bar{\mathcal{F}} = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \Omega, (\mathrm{Cb}), (Cbm), (Cm), (Cma), (Ca), \\ (Cb, Cmb), (Cb, Cm), (Cb, Cma), \\ (Cb, Ca), (Cbm, Cm), (Cbm, Cma), \\ (Cbm, Ca), (Cm, Cma), (Cm, Ca) \end{array} \right\}$$

A la dupla conformada por $(\overline{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ se le llama espacio medible referente.

2.2 Construcción del espacio medible en los reales

El espacio muestral Ω, contendrá los datos cuantificables de los parámetros importantes a estudiar, y fue considerado como:

$\Omega = [18,236]$

En este espacio muestral se toma el valor del caudal mínimo y máximo durante todo el periodo de registro en la estación. Se plantean cinco eventos cuantitativos en el espacio muestral Ω, así:

$E_1 = [18,61.74)$
$E_2 = [61.74,105.08)$
$E_3 = [105.08,148.41)$
$E_4 = [148.41, 191.75)$
$E_5 = [191.75, 236)$

Los complementos de los eventos son:

$$E_1^c = \Omega \backslash E_1 = (61.74,236]$$
$$E_2^c = \Omega \backslash E_2 = [18,236] - [61.74,105.08)$$
$$= \{[18,61.74])\mathrm{U}(105.08,236\}$$
$$E_3^c = \Omega \backslash E_3 = \{[18,105.08)\mathrm{U}(148.41,236]$$
$$E_4^c = \Omega \backslash E_4 = \{[18,148.41)\mathrm{U}(191.75,236]$$
$$E_5^c = \Omega \backslash E_5 = \{[18,191.75)$$

La unión de los eventos es así:

$E_1 \cup E_2 = [18{,}105.08)$
$E_1 \cup E_3 = \{[18{,}61.74) U [105.08{,}148.41)\}$
$E_1 \cup E_4 = \{[18{,}61.74) U [148.41{,}191.75]\}$
$E_1 \cup E_5 = \{[18{,}61.74) U [191.75{,}236]\}$
$E_2 \cup E_1 = E_1 \cup E_2$
$E_2 \cup E_3 = [61.74{,}148.41)$
$E_2 \cup E_4 = \{[61.74, 105.08) U [148.41{,}191.75)\}$
$E_2 \cup E_5 = \{[61.74, 105.08) U [191.75{,}236)\}$
$E_3 \cup E_1 = E_1 \cup E_3$
$E_3 \cup E_2 = E_2 \cup E_3$
$E_3 \cup E_4 = [105.08, 191.75)$
$E_3 \cup E_5 = [105.08, 148.41) U [191.75{,}236)$
$E_4 \cup E_1 = E_1 \cup E_4$
$E_4 \cup E_2 = E_2 \cup E_4$
$E_4 \cup E_3 = E_3 \cup E_4$
$E_4 \cup E_5 = [148.41{,}236)$

La intersección es vacía $\emptyset$.

Con los eventos disjuntos, se plantea la sigma-algebra total de la siguiente forma:

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \Omega, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_1^c, E_2^c, E_3^c, \\ E_4^c, E_5^c, E_1 U E_2, E_1 U E_3, E_1 U E_4, \\ E_1 U E_5, E_2 U E_3, E_2 U E_4, E_2 U E_5, \\ E_3 U E_4, E_3 U E_5, E_4 U E_5, E_1 \cap E_2, \\ E_1 \cap E_3, E_1 \cap E_4, E_1 \cap E_5, E_2 \cap E_3, \\ E_2 \cap E_4, E_2 \cap E_5, E_3 \cap E_4, \\ E_3 \cap E_5, E_4 \cap E_5 \end{array} \right\}$$

$$\bar{\mathcal{F}} = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, [18{,}236], [18{,}61.74), [61.74{,}105.08), \\ [105.08{,}148.41), [148.41, 191.75), \\ [191.75, 236), (61.74{,}236], \\ \{[18{,}61.74]) U (105.08{,}236\}, \\ \{[18{,}105.08) U (148.41{,}236], \\ \{[18{,}148.41) U (191.75{,}236], \\ \{[18{,}191.75), [18{,}105.08), \\ \{[18{,}61.74) U [105.08{,}148.41)\}, \\ \{[18{,}61.74) U [148.41{,}191.75]\}, \\ [61.74{,}148.41), \\ \{[61.74, 105.08) U [148.41{,}191.75)\}, \\ \{[61.74, 105.08) U [191.75{,}236)\}, \\ [105.08, 191.75), \\ [105.08, 148.41) U [191.75{,}236), \\ [148.41{,}236) \end{array} \right\}$$

De acuerdo con lo anterior, ahora tenemos al espacio medible cuantitativo conformado por la dupla $(\Omega, \mathcal{F})$. Ahora se pueden construir las variables aleatorias reales continuas. Una variable aleatoria X real es una función medible establecida en un espacio medible y se expresa en números reales. Las variables aleatorias se construyen de la siguiente manera: son 12 en total (i=12), cada una de ellas remite de la misma forma los eventos cualitativos del espacio de $\overline{\Omega}$ a los eventos cuantitativos del espacio Ω. De acuerdo con lo anterior, entonces las variables se definen así:

$$Sea\ Xi: \bar{\Omega} \rightarrow \Omega$$

Entonces

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{X}\text{: } \{Cb\} & \rightarrow [18, 61.74) \\ \{Cbm\} & \rightarrow [61.74{,}105.08) \\ \{Cm\} & \rightarrow [105.08, 148.41) \\ \{Cma\} & \rightarrow [148.41{,}191.75) \\ \{Ca\} & \rightarrow [191.75{,}236) \end{array}$$

Al considerar un espacio medible $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ y una aplicación $X: \bar{\Omega} \rightarrow R$, la variable aleatoria cumple con la exigencia para su imagen inversa en cada evento [8, 9, 10]:

$$X^{-1}(E) \in \mathcal{F}, \forall A \in \mathcal{F}$$

Dadas las condiciones anteriores se procede a demostrar si efectivamente nuestra variable aleatoria X en el caso anterior cumple con la exigencia sobre su imagen inversa para cada evento.

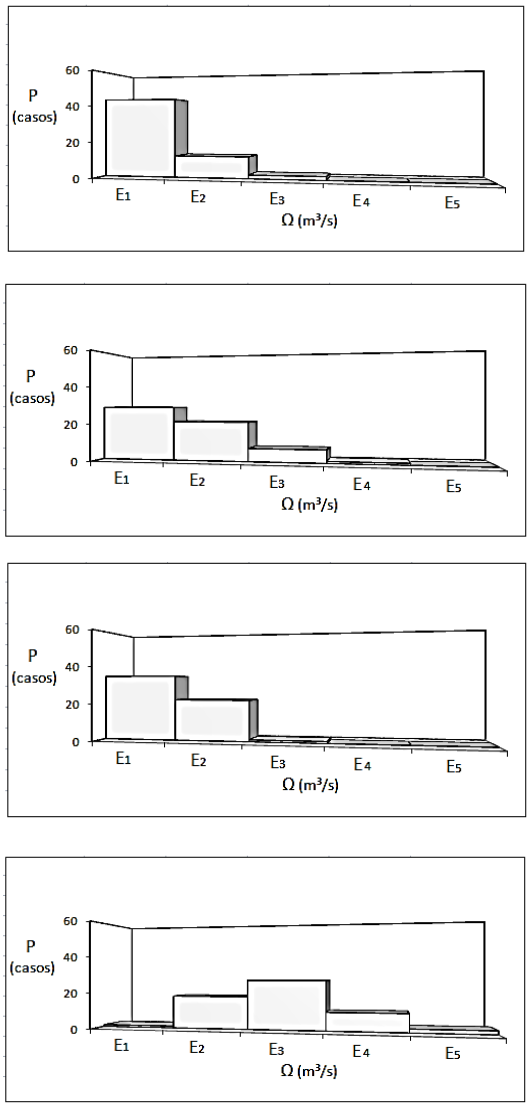
- ✓ $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}$
- ✓ $X^{-1}(\{18, 72\}) = \{w \in \mathcal{F}: X(w) \in \{18, 72\}\} = [Cmb] \in \mathcal{F}$
- ✓ $X^{-1}(72, 126) = [Cm] \in \mathcal{F}$
- ✓ $X^{-1}(126,\ 180) = [\mathrm{Cb}] \in \mathcal{F}$
- ✓ $X^{-1}(180,\ 235) = [\mathrm{Ca}] \in \mathcal{F}$

Con la anterior comprobación vemos que X es $\mathcal{F} - \bar{\mathcal{F}}$ medible, por lo tanto, X en nuestro ejemplo anterior es una variable aleatoria.

Cuando ya se tiene una variable aleatoria continua se puede construir un espacio de probabilidad. La terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ se denomina espacio de probabilidad y es una descripción del experimento que informa a cual conjunto pertenecen los posibles resultados del experimento y nos permite cuantificar la incertidumbre de que se produzcan los sucesos mediante la medida de probabilidad P [11, 12]. Para el ejemplo de la variable aleatoria continua X anterior se tiene que la medida de probabilidad $P: \bar{\mathcal{F}} \rightarrow [0,1]$ es la siguiente:

$$
\begin{array}{llcl}
 & \bar{\mathcal{F}} & & \mathbb{R} \\
\boldsymbol{P}: & [18,72) & \rightarrow & 0 \\
 & [72,126) & \rightarrow & 0.41 \\
 & [126,180) & \rightarrow & 0.25 \\
 & [180,235) & \rightarrow & 0.34
\end{array}
$$

A continuación, se presenta la medida de probabilidad en cada evento de la sigma álgebra total (figura 2 y tabla 1).



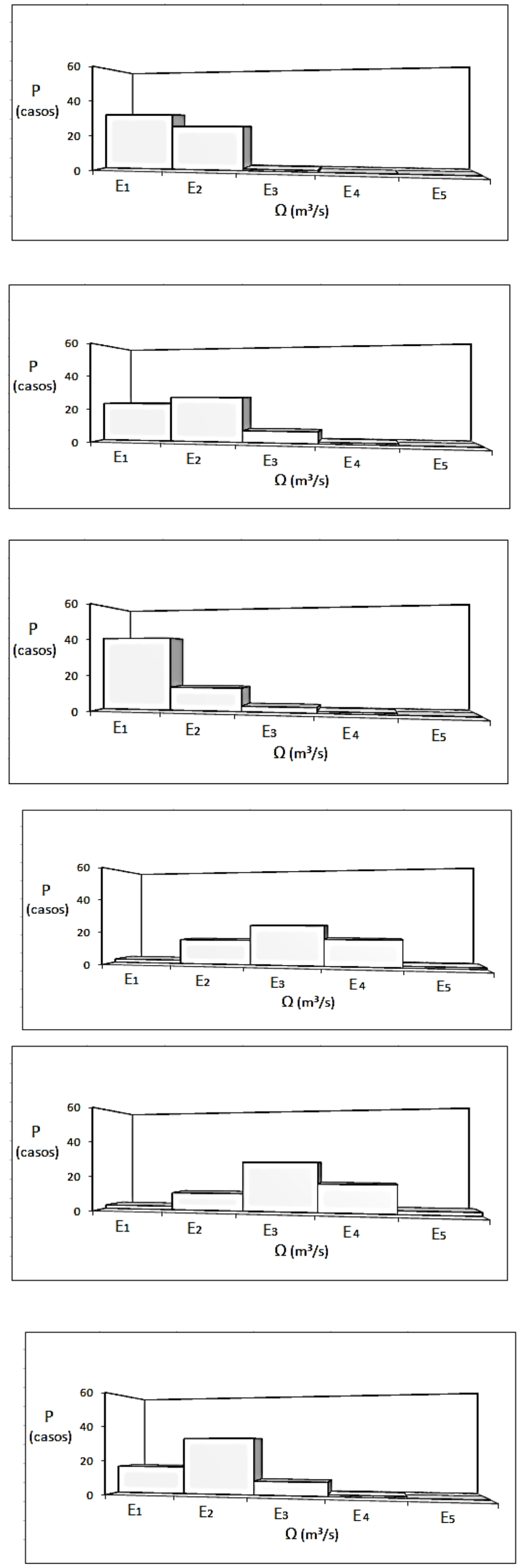


Figura 2. Estimación de la probabilidad en cada evento para cada una de las 12 variables aleatorias según datos de caudales medios del río Fonce.

Tabla 1. Valores de las frecuencias.

Variable aleatoria	Valor de P (%) en cada intervalo				
	E1	E2	E3	E4	E5
X1	0.76	0.21	0.03	0	0
X2	0.71	0.22	0.05	0.02	0
X3	0.5	0.36	0.12	0.02	0
X4	0.1	0.34	0.36	0.16	0.03
X5	0.02	0.31	0.47	0.17	0.03
X6	0.1	0.71	0.17	0.02	0
X7	0.6	0.38	0.02	0	0
X8	0.55	0.43	0.02	0	0
X9	0.4	0.47	0.12	0.02	0
X10	0.03	0.26	0.41	0.28	0.02
X11	0.03	0.17	0.48	0.28	0.03
X12	0.28	0.57	0.14	0.02	0

De esta manera, nuestra figura 1 ahora se puede reemplazar por una presentación nueva en términos del espacio muestral y de las variables aleatorias (figura 3).

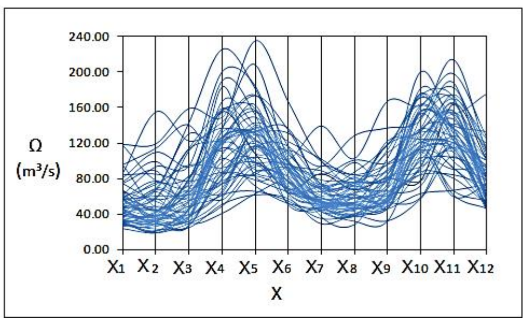


Figura 3. Diagrama términos del espacio muestral y de las variables aleatorias.

3. Resultados

En este trabajo se construye un proceso estocástico con 12 variables aleatorias y un mismo espacio de probabilidad en todas ellas. Se formaliza en términos de la teoría moderna de probabilidad la definición de proceso estocástico, para lo cual se comprueba que las 12 variables aleatorias creadas cumplen con la propiedad de imagen inversa; además, cada variable aleatoria fue planteada en un espacio medible y éstos a su vez fueron formalizados en sus respectivas sigmas álgebras.

Los resultados demuestran que los valores medios mensuales multianuales de caudales del río Fonce pueden someterse, a pesar de las dificultades matemáticas, a la interpretación estocástica. Para ello, inicialmente se genera el espacio muestral, posteriormente se plantean cinco eventos en el espacio muestral; con ellos se crea la sigma álgebra total que cumple con todas las propiedades topológicas formales y así se constituye el espacio medible o de estado. En los espacios de estado se crean las variables aleatorias y a partir de los espacios de probabilidad se construyen los 12 histogramas de frecuencias correspondientes a las 12 variables aleatorias.

Una vez formalizado en forma rigurosa el proceso estocástico, se puede interpretar cada espacio de probabilidad con el Sistema de Pearson [9,10], el cual comprende trece modelos estadísticos y en general cubre cualquier forma de los histogramas obtenidos.

Para modelar el cambio del histograma de una variable aleatoria a otra, se recomienda aplicar el modelo FPK [4,11]. Este modelo al enlazarse al Sistema de Pearson, permite simular procesos no estacionarios, en los cuales cambia la forma del histograma en el tiempo [12].

En cuanto al cambio de la forma del histograma, es importante resaltar que el concepto de sigma álgebra permite determinar a juicio del investigador la cantidad de intervalos del histograma: una sigma álgebra creada a partir de tres intervalos, por ejemplo, pueda estar contenida en una de cuatro, cinco, seis, etc., lo cual permite acercarnos a la teoría de las filtraciones, que a su vez dan nacimiento a las martingalas; pero ello, es un nuevo tema de investigación en la teoría de los procesos estocásticos.

Conclusiones

En este trabajo se concluye que, muy a pesar de las dificultades matemáticas, es viable aplicar la axiomática de Kolmogorov para construir un proceso estocástico en caudales medios mensuales multianuales del río Fonce en la estación hidrológica ubicada en San Gil (Santander).

Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento a la UMNG, Universidad de Pamplona, Instituto IDEAM, Corporación CAS, Empresa ACUASAN, Instituto IGAC, Universidad USTA y Universidad Libre, ambas con sede en San Gil.

Referencias

1. Rivera, H. G., Palacio, G. D. C., Rangel G. F. M. (2013). *Impacto de los escenarios de cambio climático en los recursos naturales renovables en jurisdicción de la Corporación Autónoma Regional de Santander*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá: Otero Impresos.

2. Chow, V. T., Maidment, D. R., Mays, L. W. (1964). *Handbook of applied Hydrology*. San Francisco: McGraw-Hill.

3. Organización Meteorológica Mundial – OMM. (1992). *Guía de Prácticas Hidrológicas*. OMM, Ginebra.
4. Risken, H. (1996). *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag, London.

5. De la Rosa, E., Blázquez, R. (2003). *Procesos estocásticos en ingeniería civil*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

6. García, A. M. A. (2005). *Introducción a la teoría de probabilidad*. Fondo de Cultura Económica, México.

7. Grigoriu, M. (2002). *Stochastic calculus*. Birkhauser, Berlin.

8. Blanco, C. L. (2003). *Probabilidad*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

9. Benjamin, J. (1970). *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*. San Francisco: McGraw-Hill, pp. 685.

10. Rich, N. R., Greene, L., Graham, R. C. (1971). "The Pearson´s System of frequency curves digital computer program". US Army Missile Command Restone Arsenal, Alabama, Report RD-TR 7114, June.

11. Oksendal, B. (2003). *Stochastic differential equations*. Springer, Berlin.

12. Fuentes, B. J., Palacio, G. D. C., Hoyos, O. L., Rivera, H. G. (2015). Oportunidades entre la tecnología militar y la ingeniería civil. Caso de estudio: Aplicación del Sistema Estadístico de Pearson en la modelación de los caudales medios mensuales del río Fonce –Santander. *Rev. Ingenieros Militares*, vol 10, pp. 73-84.