La representación gráfica de la multiplicación aritmética: una experiencia de aprendizaje

Carmen Gómez-Granell *

I.M.I.P.A.E., Barcelona

Infancia y Aprendizaje, 1985, *31-32*, 229-249

La creciente necesidad de transformar la llamada Escuela Tradicional en una escuela más activa ha llevado a maestros y pedagogos en los últimos años a aproximarse a la teoría de Piaget y a intentar aplicarla en la Escuela. Parece lógico que una teoría que intenta dar una explicación al funcionamiento y desarrollo de la inteligencia tenga mucho que aportar a la Educación.

Sin embargo, el hecho de que Piaget se haya ocupado fundamentalmente de describir unas categorías básicas de pensamiento —estructuras lógicas—, así como un modelo general de funcionamiento —asimilación, acomodación, equilibración— más que de estudiar las formas de actualización de los conocimientos ligados a la representación de contenidos concretos, hace muy difícil su aplicación en el aula.

En demasiadas ocasiones la aplicación de la teoría de Piaget a la Escuela se reduce a la introducción en el aula de algunas de las famosas tareas piagetianas (conservaciones, clasificaciones..., etc.) como si de nuevos contenidos se tratara. El objetivo de la Escuela no puede ser el de enseñar estructuras operatorias, sino el de enseñar contenidos concretos, que tienen una funcionalidad social y que, con toda seguridad, se apoyan en dichas estructuras, pero con los que no se deben confundir.

En efecto, las estructuras operatorias funcionan como formas lógicas, abstracción hecha de los diferentes contenidos a los que se pueden aplicar. Una misma estructura operatoria caracteriza la conservación de las cantidades discretas y continuas, de la sustancia, peso y volumen; sin embargo, sabemos que todas estas nociones no son adquiridas a la vez (desfases horizontales). La razón de estos desfases hay que buscarla en el hecho de que una estructura no puede ser construida por el pensamiento más que ligada a los contenidos concretos de cuyos sistemas de relación es expresión formal.

El niño construye sus operaciones —su inteligencia— en la medida que adquiere los conocimientos que le son necesarios para comprender y dominar la realidad.

La idea —radicalmente opuesta a las concepciones asociacionistas en que se apoya la enseñanza tradicional— de que el conocimiento constituye siempre un proceso en el que el sujeto construye sus propias estructuras de pensamiento, hace necesario un replanteamiento radical de las formas de enseñanza; pero para llevarlo a término es necesario no sólo conocer las estructuras lógicas descritas por Piaget, sino profundizar en el análisis de las formas de adquisición de los contenidos concretos a los que van indisociablemente unidas dichas estructuras.

En los últimos años, algunos trabajos de la Escuela de Ginebra se han decantado hacia el estudio de las «estrategias» que utiliza el sujeto en la solución de problemas concretos; los contenidos de las tareas —y no sólo su estructura lógica— y las diferentes significaciones que el sujeto les atribuye, cobran una especial preponderancia, porque permiten observar mejor cómo se estructura la inteligencia a través de su funcionamiento.

* *Dirección de la autora:* I.M.I.P.A.E., Marqués de Fuenflorida, s/n. 28004 Barcelona.

El estudio de las estrategias y procedimientos utilizados por los alumnos para abordar los problemas que presenta el aprendizaje de los diferentes contenidos escolares se hace necesario para emprender cualquier transformación de la práctica pedagógica. Así, por ejemplo, no basta con conocer las operaciones lógicas —seriación, inclusión— en que se apoya la comprensión de la multiplicación aritmética; es necesario conocer las diferentes significaciones —suma de sumandos iguales, número de veces que se repite un conjunto, relación de proporcionalidad, función, etc.— que el alumno atribuye a dicha noción a lo largo de su desarrollo.

Creemos, pues, que un método extraordinariamente útil para abordar los aspectos funcionales del conocimiento es el del aprendizaje operatorio, ya que nos permite observar la evolución de uno o varios sujetos a lo largo de varias sesiones en las que intenta solucionar y comprender algún problema. Por otra parte, el aprendizaje operatorio de los contenidos escolares nos ofrece una información valiosísima a la hora de modificar la enseñanza de los mismos.

Desde un punto de vista constructivista, «la comprensión real de una noción o una teoría supone su reinvención por parte del sujeto..., la verdadera comprensión, aquélla que se manifiesta por medio de nuevas explicaciones espontáneas o, dicho de otro modo, por una generalización activa, supone que el sujeto haya sido capaz por sí mismo de encontrar las razones de la verdad que intenta comprender y, por tanto, que la haya reinventado él mismo, al menos parcialmente» (Piaget, 1973). Así pues, en un aprendizaje operatorio, presentamos a los alumnos una determinada situación cuya comprensión o resolución conlleva el o los problemas que nos interesa abordar; la observación de las estrategias que utilizan nos permite analizar la representación que el sujeto tiene del problema en cuestión y proponerle otras situaciones que le permitan modificar o mejorar dicha representación. Nuestra forma de intervención consiste, pues, no en corregir la respuesta errónea o menos evolucionada, sino en organizar situaciones que permitan al alumno la toma de conciencia de la mayor o menor eficacia de sus propias soluciones y de la necesidad de buscar otras más eficaces.

La experiencia que expondremos a continuación versa sobre el aprendizaje operatorio de la multiplicación aritmética. Fue realizada con un grupo de siete alumnos de tercero de EGB que asistían a una escuela de nivel socioeconómico medio-alto en Barcelona. En dicho aprendizaje se trabajó a dos niveles —el manipulativo y verbal y el de la representación gráfica— de los cuales describiremos aquí los datos correspondientes al segundo, el de la representación gráfica, puesto que nos referimos al primero en un artículo anterior publicado en esta misma Revista (Gómez-Granell, 1981).

LA MULTIPLICACION ARITMETICA

Uno de los principales problemas que presenta el aprendizaje de la multiplicación aritmética es el descubrimiento del operador multiplicativo, es decir, del número de veces que se repite un determinado conjunto, o lo que es lo mismo, del número de acciones u operaciones realizadas. La diferencia entre las operaciones $3+3+3+3$ y 3×4 ó 4×3 es que mientras en la primera adicionamos un conjunto sobre otro sin tener en cuenta para nada el número de conjuntos adicionados, este dato es decisivo para la segunda.

Durante la realización del aprendizaje a nivel manipulativo habíamos observado que la abstracción del número de grupos o número de operaciones y la consideración simultánea de dos variables de diferente rango (número de elementos de cada grupo y número de grupos) constituía un verdadero problema cognitivo para nuestros alumnos, que recurrían siempre en un principio a procedimientos de resolución aditivos. Por ejemplo, una de las situaciones de aprendizaje consistía en simular una tienda en la que se podían comprar diversos objetos comestibles cuyo precio oscilaba desde una hasta nueve pesetas. A los niños, que disponían de pesetas, se les pedía que averiguaran cuántas pesetas necesitarían para comprar una determinada cantidad de alguna clase de objetos (por ejemplo, cuatro caramelos, cada uno de los cuales valía tres pesetas).

Ante esta situación encontramos (entre otros) dos tipos de procedimientos de resolución:

a) El niño separa un caramelo y pone junto a él las pesetas que cuesta, luego otro caramelo con sus correspondientes pesetas, luego otro, luego otro..., y así con todos los caramelos que debe comprar. Posteriormente, cuenta las pesetas que hay junto a cada caramelo y nos da el número total de pesetas. Si a continuación tapamos los caramelos y le preguntamos cuántos caramelos ha comprado o cuántos grupos de pesetas ha hecho, no lo sabe.

b) El niño de entrada cuenta el número de caramelos que le proponemos para comprar; a continuación, coge tantos grupos de «x» pesetas (siendo «x» el precio de cada caramelo) y cuenta después el número total de pesetas. Cuando le preguntamos qué ha hecho, nos dice: he puesto «cuatro grupos de tres pesetas porque había cuatro caramelos y cada uno valía tres pesetas».

La diferencia entre el procedimiento *a)* y *b)* es clara: mientras que en el primero actúa de una forma aditiva ($3+3+3+3=12$) sin que en ningún momento tome conciencia del número de grupos, en el segundo, al anticipar y conservar el número de grupos, nos muestra que ha construido un nuevo factor, un operador multiplicativo, y que maneja simultáneamente dos variables de diferente rango (número de elementos de cada grupo y número de grupos).

LA REPRESENTACION GRAFICA DE LAS OPERACIONES ARITMETICAS. ALGUNAS REFLEXIONES HISTORICAS

Durante siglos, antes de que aparecieran las primeras numeraciones escritas, el hombre sabía contar e incluso operar, bien mediante sistemas concretos (piedrecitas, palitos, bastones, etc.), bien mediante numeraciones orales. Saber sumar dos cantidades de objetos pertenece a un plano conceptual diferente que saber representar gráficamente dicha operación mediante un sistema de signos. La representación gráfica, por ejemplo, de la multiplicación constituye un significante que nos remite a un determinado significado (el concepto de la operación de multiplicación), pero con el cual no se debe confundir ni identificar. Si la adquisición del concepto (significado) es fruto de una construcción cognitiva, nos podemos preguntar si su representación gráfica (significante) constituye una mera copia, una mera transposición que no exige ninguna nueva elaboración o, por el contrario, como parece lógico, el significante escrito también es producto de una nueva construcción.

La Escuela tiende a identificar ambos planos. O bien se enseña directamente la representación de la operación y se da por supuesto que el niño entiende simultáneamente el significado de la misma, o bien, en los casos en que se intenta hacer una matemática más intuitiva, se llevan las operaciones al plano de lo real (se hacen sumas con manzanas, caramelos, etcétera) y se incide más sobre la comprensión de la operación, pero para inmediatamente, una vez que se cree que aquélla está entendida, darle al niño el algoritmo gráfico correspondiente.

Sin embargo, un concepto, una noción, construida en un determinado contexto, no siempre se conserva de la misma manera si debe ser aplicada en un nuevo contexto. Así, por ejemplo, un alumno de tercero de EGB puede utilizar una multiplicación para resolver un problema típico (por ejemplo: una vendedora lleva cuatro cestos al mercado. En cada cesta hay doce huevos. ¿Cuántos huevos lleva en total para vender?), y, sin embargo, utilizar una suma, procedimientos figurativos o incluso fracasar, en la resolución de un problema en el que la operación es la misma, una multiplicación, pero aplicada en un contexto diferente. (Por ejemplo: desde su casa al colegio Juan anda cada día tres kilómetros. ¿Cuánto habrá andado en una semana si va cada día al colegio de lunes a viernes?). Y es que una operación sólo se construye en conexión con los contenidos, los contextos, las relaciones particulares en las que aparece, de forma que el niño puede atribuir a una misma operación significaciones diferentes en función del contexto en que se encuentre. La operación deberá, pues, ser reconstruida en los nuevos contextos para alcanzar cada vez un mayor nivel de generalización y abstracción (Moreno, 1980).

La representación gráfica de una operación constituye un nuevo contexto, con sus características propias, en interacción con el cual deberá reconstruirse de nuevo la operación.

Los trabajos realizados en el IMIPAE

sobre este tema han demostrado la especifidad de la representación gráfica como producto de una construcción propia con características diferenciadas de la construcción de la operación a nivel manipulativo y verbal. La representación gráfica de una operación expresa las relaciones que están implícitas en esa operación respetando simultáneamente las características —arbitrariedad, convencionalidad, etc.— del lenguaje en el que las expresa, lo que hace que no se pueda hablar de mera transposición (Sastre, 1983).

Por otra parte, la numeración y las operaciones matemáticas se representan en un sistema de signos y siguiendo unas determinadas reglas, es decir, en un determinado código fruto de una construcción social. La representación gráfica de los sistemas de numeración y operaciones ha tenido, a lo largo de la historia, una clara función social de comunicación. Las cantidades y las operaciones eran anotadas con la doble función de servir de registro y de que, lógicamente, este registro pudiera ser interpretado por un posible receptor.

Se sabe hoy, por ejemplo, que la escritura, el más importante vehículo de comunicación humana a lo largo de la historia fue, como explica Amiet, «una invención de contables que necesitaban fijar las operaciones económicas demasiado numerosas y diversas para ser confiadas a la memoria en las sociedades en plena expansión de Sumeria y Elam».

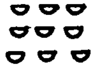
En efecto, recientes descubrimientos hechos en Susa (Irán) han mostrado la evolución de un sistema arcaico de contabilidad de los antiguos elamitas (3500-3300 a. de C.) hasta las primeras apariciones conocidas de la escritura correspondiente: los números eran simbolizados por «calculi» (objetos de barro de tamaños y formas diferentes) asociados a los diferentes órdenes de unidades de un sistema de numeración. Estos «calculi» eran encerrados en una esfera de arcilla que se cerraba y en cuya superficie se marcaban los diferentes «calculi» encerrados en la misma: una especie de resumen del contenido que podía ser «leído» por el receptor de la mercancia, ya que el objetivo de este sistema era el de servir de registro, de garantía que acompañaba a las mercancías con las que se comerciaba, de forma que el receptor supiera exactamente el origen, cantidad y autenticidad de la mercancía enviada, excluyendo toda posibilidad de falsificación. Progresivamente, el uso de los «calculi» se reveló superfluo y su uso, así como el de los recipientes esféricos que los contenían, se sustituyó por tablillas de arcilla en las que simbolizaban los «calculi», hasta que posteriormente se hizo necesario precisar la naturaleza de los objetos implicados en la operación económica apareciendo los primeros signos de la escritura conocida.

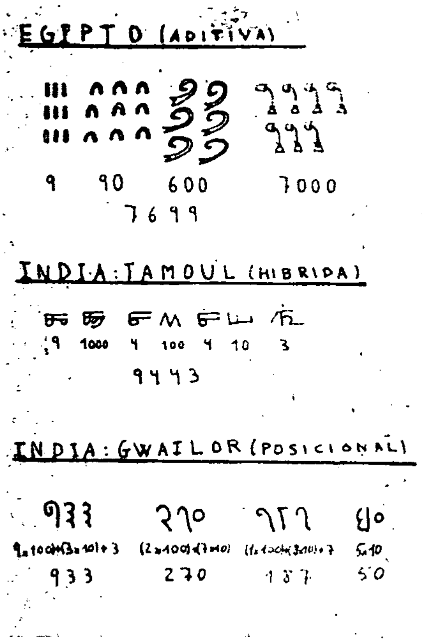
De un somero análisis de estos hechos dos cosas se desprenden como evidentes: la función social de comunicación que rige todo el proceso (1) y la progresiva construcción de un código desde el uso de sistemas tridimensionales («calculi») pasando por representaciones simbólicas y figurativas hasta la consecución de un código convencional.

También la historia de la numeración escrita venía a reforzar nuestra hipótesis de la especifidad de lo gráfico, ya que nos mostró interesantes ejemplos de cómo el paso de la utilización de procedimientos aditivos a procedimientos multiplicativos, en la representación de las numeraciones y operaciones aritméticas, había constituido un verdadero problema para muchos pueblos de la antigüedad.

En efecto, si damos un breve repaso a los diferentes sistemas de numeración atestados a lo largo de la historia, nos encontramos con tres tipos fundamentales claramente diferenciados:

a) Un sistema aditivo, utilizado por la mayoría de los pueblos en la Antigüedad (egipcios, romanos, etcétera) que se caracteriza por atribuir signos especiales a la unidad y a cada potencia de la base elegida, repitiendo cada uno de estos

(1) Que esta preocupación está presente en la elaboración de todas las notaciones numéricas puede verse también en el hecho de que éstas son organizadas siempre siguiendo una configuración espacial que sea fácilmente visualizable. Por ejemplo: «9» se dispondrá en esta forma 
pero nunca de ésta: 
porque de esta forma se puede discernir su valor más rápidamente.



IGURA I.

signos tantas veces como sea necesario sin que se combinen entre sí, según un código (ver fig. I, A). Es fácil imaginar cuan largos y laboriosos pueden hacerse los cálculos con este sistema.

b) Sistemas «híbridos» que combinan ya el sistema aditivo con uno multiplicativo, puesto que los coeficientes del sistema se multiplican por las potencias de la base. Así, por ejemplo, en una antigua numeración india se representaría el número 6.345 bajo la forma $6 \times 1.000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5$ (Ver fig. I, B.)

c) Sistemas posicionales, que conjugan con el principio de la base y la combinación de las operaciones aditivas y multiplicativas, la atribución de un carácter dinámico y variable a cada uno de los dígitos de la base, que se pueden combinar entre sí adoptando un valor u otro según la posición que ocupen. (Ver fig. I, C.)

El sistema de numeración posicional sólo puede construirse a partir de un sistema multiplicativo, no aditivo, ya que consiste simplemente en sustituir la explicitación de la multiplicación del coeficiente por la potencia de la base ($222 = 2 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$) por un código de orden o posición (el valor del 2 como 2 unidades, 2 decenas, 2 centenas, etcétera, depende del lugar que ocupe la cifra).

En la figura II podemos observar también algunos ejemplos de cómo dentro de un mismo sistema de numeración, las notaciones evolucionan, aunque muy lentamente, desde sistemas aditivos hacia sistemas multiplicativos, mucho más económicos. Así, por ejemplo, vemos cómo en la Antigua Grecia se utiliza un sistema

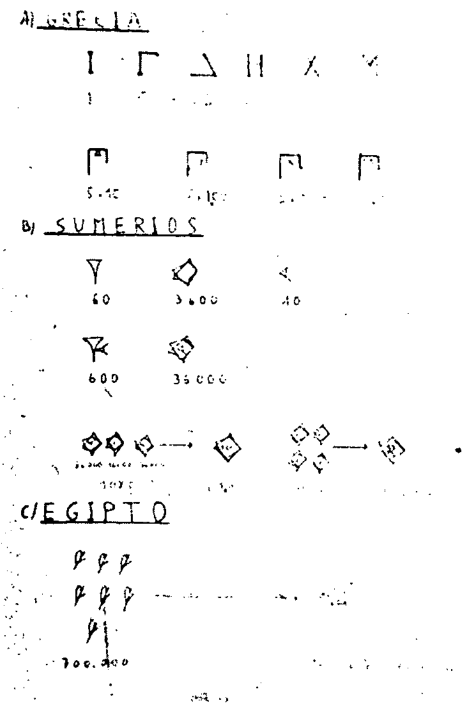


FIGURA II.

claramente aditivo (40= ▲▲▲▲, 4.000=XXXX), excepto para los signos asociados a los números 50, 500, 5.000 y 50.000, que son compuestos a partir del signo de 5 y los correspondientes de 10, 100, y 10.000, según el principio multiplicativo. (Fig. II, A.)

En los sumerios, que utilizaban un sistema de numeración aditivo que alterna la base 10 y la 60, también se observa una evolución desde sistemas de notaciones aditivas (10.8000= ◈◈◈ =36000+36000+36000) hacia sistemas multiplicativos (10.8000= ◈). (Fig. II, B.)

Y lo mismo podemos observar en los egipcios, que mientras en el Antiguo Imperio utilizaban un sistema claramente aditivo (repetían el coeficiente de la base tantas veces como indicaba la cifra que querían representar. Por ejemplo: para 700.000 repiten 7 veces el signo de 100.000), en el Imperio Medio han evolucionado hacia un sistema multiplicativo en el que sólo aparecen el número de grupos y el número de elementos de cada grupo (7 de 100.000). (Ver fig. II, C.)

De lo expuesto aquí se desprende que al iniciar el aprendizaje de la representación gráfica de la multiplicación, nos enfrentábamos a un doble problema: por un lado, el de ver si, una vez adquirida la comprensión de la operación a nivel manipulativo y verbal se daba una transposición inmediata al plano gráfico o, por el contrario, se reproducían en este nivel algunas de las dificultades que habían aparecido a nivel manipulativo; por otro, el de analizar las características del proceso de construcción de un código en el contexto de la operación de multiplicación.

En el caso de la representación gráfica, y dado que de lo que se trataba era de construir un código que es, socialmente hablando, el resultado de una necesidad de comunicación entre varios, la interacción social se utilizó específicamente como motor del aprendizaje. En efecto, lo que decidía la validez o no validez de una producción era el que pudiera ser interpretada o no por uno o varios sujetos que recibían el mensaje. Se promovía así como motor del aprendizaje un conflicto sociocognitivo, ya que era la interacción con el otro lo que hacía entrar en contradicción al alumno.

En concreto, la situación del aprendizaje se desarrollaba de la siguiente forma:

Una vez que los niños eran capaces de solucionar situaciones prácticas de multiplicación (por ejemplo, averiguar cuánto valen 8 caramelos si cada caramelo vale 5 pesetas) a nivel manipulativo, les pedíamos que representaran en un papel lo que habían hecho, de tal forma que si otros niños que no habían visto lo que habíamos hecho, miraban su papel, pudieran hacer lo mismo. Una vez hecha la representación se le daba, en efecto, a otros niños para que la interpretaran y dijeran lo que entendían y lo que no entendían. De esta forma se establecía un intercambio entre emisor y receptor que se mostró efectivo para hacer evolucionar las representaciones.

LOS RESULTADOS

El análisis cualitativo de las diferentes formas de representación que utilizaron nuestros alumnos a lo largo del aprendizaje nos ha llevado a establecer las siguientes categorías:

1. Dibujos globales de la situación con ausencia total de referencia a la operación realizada. Se trata de representaciones en las que lo que predomina es la descripción cualitativa, a nivel figurativo, de las características del contexto. Por ejemplo, si se trata de una situación de compra-venta, lo que se representa es la tienda o las personas que van a comprar o vender, etcétera. No se hace alusión a los aspectos cuantitativos ni siquiera a través del dibujo (si dibujan, por ejemplo, los caramelos que compran o las pesetas, no necesariamente se respeta el número exacto). (Ver figs. 1 y 2.)

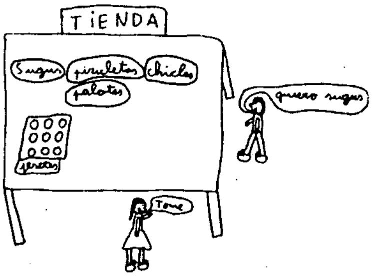


FIGURA 1.—*Operación realizada: 3 caramelos × 5 ptas. = 15 ptas.*

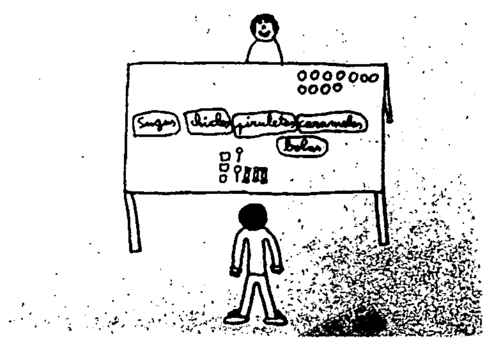


FIGURA 2.—*Operación realizada: 3 caramelos × 5 ptas. = 15 ptas.*

2. Representaciones de alguna o todas las secuencias del proceso con ausencia total de alguna relación que pueda indicar operación entre ellas. Se trata de representaciones en que, bien mediante números o bien mediante dibujos, bien de forma aislada o bien incluyendo alu-

siones figurativas al contexto, se expresan algunos datos de la operación. (Ver figuras 3 y 4.)

FIGURA 3.—*Operación realizada: 3 caramelos × 6 ptas. = 18 ptas.*

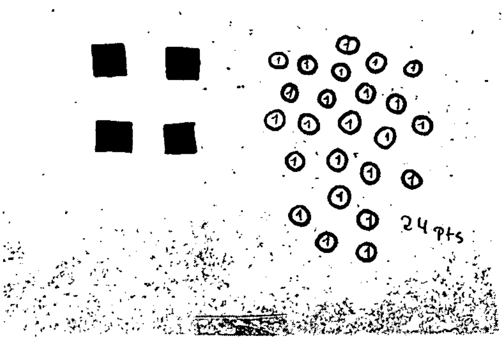


FIGURA 4.—*Operación realizada: 4 caramelos × 6 ptas. = 24 ptas.*

3. Representaciones de carácter aditivo; se caracterizan porque las secuencias del proceso aparecen relacionadas entre sí bajo formas aditivas: cada uno de los conjuntos de «n» elemento se repite tantas veces como sea necesario.

Dentro de este tipo de conductas, encontramos diferentes estrategias que hacen referencia al tipo de grafismo utilizado (figurativo o no figurativo) y a la forma de expresión de la operación (con signo o sin él). En cuanto al primer aspecto (tipo de grafismo) encontramos tres tipos de conductas:

a) Representaciones icónicas. Se caracterizan por el uso únicamente del dibujo; en estas representaciones el número de conjuntos nunca aparece de forma explícita, sino de forma sincrética con la representación de todos y cada uno de los conjuntos. (Ver fig. 5.)

b) Representaciones icónicas acompañadas de número o representaciones en

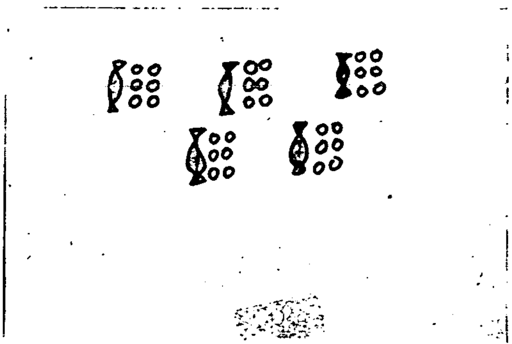


FIGURA 5.—*Operación realizada: 5 caramelos × 6 ptas. = 30 ptas.*

que unos factores aparecen en forma de dibujo y otros en forma de número. En éstos, el número de conjuntos puede explicitarse en ocasiones y el número puede aparecer en su forma inclusiva (5) o en forma ordinal (12345). (Ver fig. 6.)

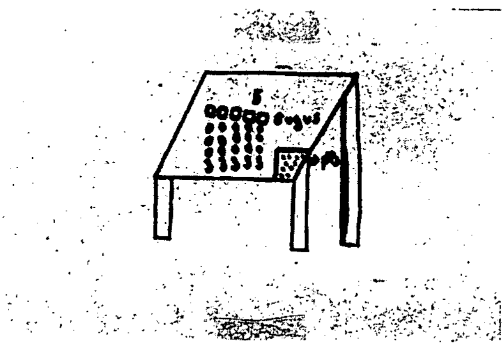


FIGURA 6.—*Operación realizada: 5 caramelos × 3 ptas. = 15 ptas.*

c) Representaciones mediante números. Este puede aparecer en forma inclusiva o de enumeración. (Ver fig. 7.)

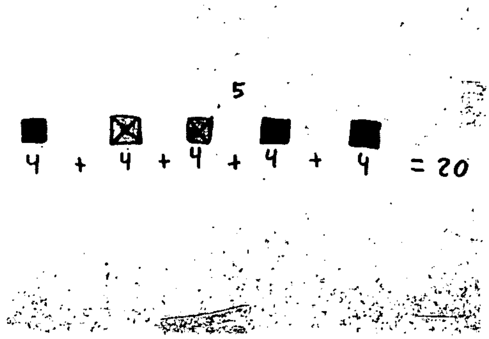


FIGURA 7.—*Operación realizada: 5 caramelos × 4 ptas. = 20 ptas.*

En cuanto al segundo aspecto (la forma de expresión de la operación) encontramos también tres tipos de conducta:

a) La operación viene expresada por la organización espacial de las secuencias. Se trata normalmente de representaciones en las que se hace corresponder a cada término de un factor los que le corresponden del otro. (Ver fig. 5: a cada caramelo le corresponden 6 pesetas).

b) La operación viene expresada por un signo individual. (Ver fig. 8.)

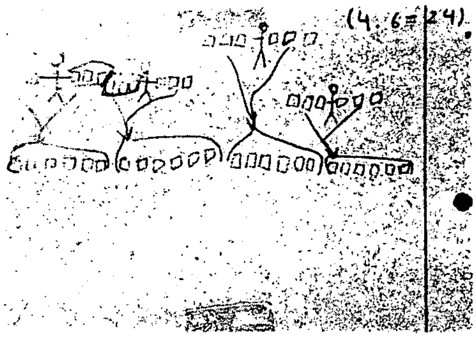


FIGURA 8.—*Operación realizada: 4 niños × 6 caramelos = 24 caramelos.*

c) La operación viene expresada por el signo universal de adición (+). (Ver fig. 7.)

4. Representaciones de carácter multiplicativo. Hemos incluido aquí todas aquellas conductas en que aparece una relación claramente multiplicativa entre los factores porque uno de ellos expresa el número de veces que se debe repetir el otro, sin necesidad de que se repita efectivamente como ocurre en las conductas aditivas.

Al igual que las aditivas, encontramos diferentes tipos según que atendamos al tipo de grafismo utilizado o la forma de expresar la operación.

En cuanto al tipo de grafismo utilizado encontramos igualmente tres tipos de procedimientos:

a) Representaciones predominantemente icónicas. (Ver fig. 9.)

b) Representaciones icónicas acompañadas o alternadas con el uso del grafismo numérico. (Ver fig. 10.)

c) Uso del grafismo numérico. (Ver fig. 11.)

En cuanto a la forma de expresar la operación encontramos los siguientes procedimientos:

a) Expresan una relación ternaria

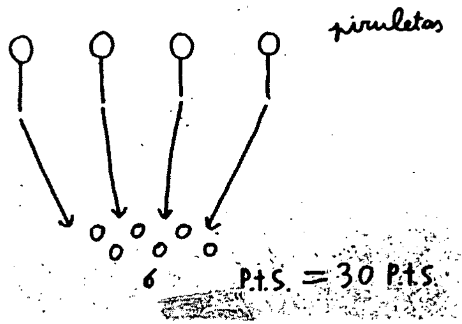


FIGURA 9.—*Operación realizada: 4 piruletas × 6 ptas. = 24 ptas.*

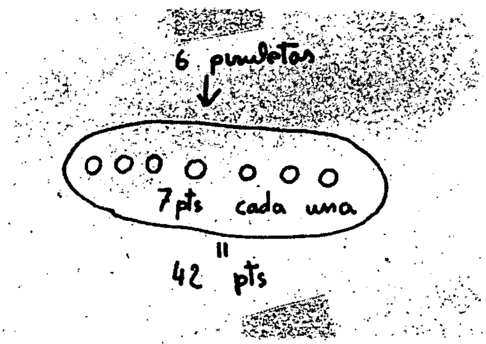


FIGURA 10.—*Operación realizada: 6 piruletas × 7 ptas. = 42 ptas.*

FIGURA 11.—*Operación realizada: 5 piruletas × 6 ptas. = 30 ptas.*

(tres factores) mediante signos individuales. (Figs. 9, 10 y 11.)

b) Expresan una relación ternaria mediante el signo universal de multiplicación (varios de los niños conocían el signo de multiplicar antes de iniciar el aprendizaje, aunque no lo utilizaron espontáneamente hasta el final en que se dio una especie de reconocimiento de que «aquello» que habíamos hecho era lo mismo que «multiplicar»).

Si efectuamos un breve resumen de la

evolución seguida por nuestros sujetos a lo largo del aprendizaje, vemos que en un primer momento los aspectos cuantitativos no aparecen en absoluto, totalmente eclipsados por la necesidad de representar todo el contexto en el que se desarrolla la operación, hasta tal punto que ésta pierde toda su importancia en favor de lo que podríamos llamar la «narración cualitativa de la historia».

Cuando estas representaciones son entregadas al sujeto receptor, éste no puede adivinar, lógicamente, ningún dato de la operación realizada; se establece entonces un diálogo entre emisor y receptor a través del cual tanto uno como otro empiezan a tomar conciencia de la necesidad de representar algunos datos cuantitativos.

Estos datos empiezan a aparecer en un principio de forma incompleta e inconexa, muy ligados al contexto cualitativo y sin que los sujetos consigan relacionarlos mediante la representación de la acción u operación, lo que también genera conflictos entre emisores y receptores que aluden a la falta de algunos datos para poder reproducir toda la secuencia.

La necesidad de hacer cada vez más inteligibles sus representaciones les lleva a representar fielmente todos y cada uno de los datos de la operación tal y como se organizaron en la situación manipulativa, y aparecen así las primeras representaciones que logran transmitir la información correctamente, si bien de forma aditiva; son copias exactas de la situación real y en un principio predomina en ellos el recurso a lo figurativo, incluso con numerosas alusiones al contexto cualitativo que rodea la operación (ver figs. 5 y 6) hasta que progresivamente se va incorporando el número, primero acompañando el dibujo y finalmente sustituyéndolo a veces por completo. (Figs. 6 y 7.)

La necesidad de ir hacia representaciones cada vez más económicas junto con la progresiva toma de conciencia de que uno de los factores indica el número de veces que se ha de repetir el otro (ante la representación de la fig. 7, un niño dice: no hace falta poner, 4, 4, 4, 4, 4, porque éste —señala el 5— ya quiere decir que se repite 5 veces), hace aparecer las primeras representaciones que consideramos como multiplicativas (ver fig. 9). Cuando éstas aparecen es bastante frecuente que se vuelva a recurrir parcial o incluso a veces totalmente a sistemas de representación figurativos que progresivamente van siendo sustituidos por los no figurativos. (Ver fig. 11.)

ALGUNAS CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados expuestos, quisiéramos resaltar algunas consideraciones finales.

En primer lugar, pudimos observar que la misma dificultad que habían encontrado nuestros sujetos a nivel manipulativo para pasar de un procedimiento aditivo a uno multiplicativo, se reproducía a nivel gráfico. Aunque resolvían las situaciones prácticas mediante procedimientos multiplicativos, todos realizaban representaciones gráficas aditivas. Creemos que este desfase era debido a la dificultad suplementaria que aportaba el hecho de tener que organizar la operación en un contexto gráfico con sus peculiares características; en efecto, no se trataba de traspasar al plano gráfico una operación ya construida, sino de construir de nuevo jugando ahora con otros elementos que no intervenían en la situación manipulativa. Una vez más vemos cómo las operaciones y nociones van tan ligadas a los contextos en los que se producen que cobran diferentes significaciones en función de su interacción con dichos contextos. Los pasos, los errores, por los que ha discurrido la construcción de una noción en un determinado contexto, se reproducen al menos parcialmente cuando la misma noción aparece en un nuevo contexto. Las formas de actualización de los conocimientos aparecen, pues, estrechamente vinculadas a los contextos en los que aparecen, lo que hace necesario estudiarlos en relación con los mismos y nos muestra hasta qué punto es inútil y absurdo el enseñar nociones y operaciones totalmente descontextualizadas, como hace la Escuela.

Otro de los aspectos a resaltar es la dificultad existente en disociar los aspectos cuantitativos de los cualitativos, hasta el punto de que en un principio sólo estos últimos están presentes. En efecto, la abstracción de lo cuantitativo es totalmente inexistente en las primeras representaciones y cuando empieza a ser tenido en cuenta, lo es mediante procedimientos figurativos; tal y como hemos podido observar en las figs. 5 y 6, tanto los caramelos como su precio son representados mediante dibujo, apareciendo el número, en el mejor de los casos, acompañando al dibujo.

Lo cuantitativo no es una propiedad de los objetos (los objetos son pesados o ligeros, grandes o pequeños...), sino que es fruto de la abstracción de las acciones (juntar, separar, ordenar...) que realizamos con ellos; las mismas acciones se pueden realizar con objetos y en situaciones muy diversas, de ahí que sea necesario abstraer acciones comunes de situaciones cualitativas muy diversas, lo que hace que esta abstracción de lo cuantitativo recurra constantemente al apoyo de lo cualitativo y lo haga, sobre todo, siempre que aparece una nueva dificultad.

En efecto, a través de la evolución seguida por nuestros sujetos pudimos observar que hubo una recurrencia masiva a procedimientos figurativos durante todo el proceso que les llevó a conseguir una forma de representación de la operación clara e inteligible (la aditiva). Este momento de estabilidad, en cuanto a la representación de la operación, les permitió ir incorporando progresivamente el grafismo numérico y los signos convencionales (fig. 7) hasta hacer desaparecer en algunos casos los aspectos figurativos. Posteriormente, el paso a una representación de la operación en forma multiplicativa fue acompañado, en algunas producciones, por una vuelta a la utilización de procedimientos figurativos (ver fig. 9) que, de nuevo, fueron dejando paso progresivamente a las formas no figurativas.

Por supuesto, todos los niños que participaron en esta experiencia de aprendizaje utilizaban, normalmente, en las actividades de clase tanto el grafismo numérico como los signos convencionales de suma, (+), resta (−), e igualdad (=).

El hecho de que recurrieran a procedimientos figurativos en el momento de intentar una representación espontánea de la multiplicación, que los volvieran a utilizar cuando consiguieron crear una forma de representación estable, aunque aditiva y que volvieran a lo figurativo en el momento de construir una nueva forma —multiplicativa y, por tanto, más evolucionada— de representación de la operación, refuerza la hipótesis de la reconstrucción de las nociones en contextos más complejos y de que éstas se construyen en estrecha interacción con los contextos en los que aparecen. No tiene mucho sentido hablar de que un niño sabe sumar o conoce el número 6. ¿Qué número 6? ¿El que es el resultado de enumerar una serie de seis elementos? ¿El que interviene en la suma $6+4$? ¿El que es el resultado de $36:6$, o el de $\sqrt{36}$? No cabe duda de que el mismo número seis va cobrando significaciones diferentes, cada vez más ricas y complejas en la medida en que se reconstruye una y otra vez en relación con las operaciones en que interviene.

La escuela, todos lo sabemos, tiende a enseñar conocimientos y nociones totalmente descontextualizados y este hecho aparece de forma muy acuciante en la enseñanza de las Matemáticas. Por su carácter abstracto, su alto nivel de formalización y su autonomía respecto a lo real se tiende a enseñarla totalmente desligada de las situaciones reales y necesidades sociales a las que se puede aplicar y que en muchas ocasiones la hicieron aparecer. Pero del hecho de que las matemáticas posean, como ciencia constituida, todas esas características a las que hemos aludido, no se puede desprender que haya que empezar enseñando formalismos. En primer lugar, porque los mismos conceptos matemáticos son el resultado de un largo proceso que ha partido la mayoría de las veces de evidencias intuitivas y atravesando innumerables obstáculos hasta llegar a la claridad lógica con que hoy se nos presentan. Y, en segundo lugar, porque es ignorar el proceso de construcción de la inteligencia, en el cual las operaciones sólo se pueden construir, como hemos visto, en estrecha relación con los contenidos y los contextos particulares en los que aparecen. Sólo a través de un proceso continuo de reflexión y abstracción de acciones similares sobre contextos muy diversos puede el niño construir y reconstruir una misma operación que va cobrando cada vez significaciones más amplias y complejas. La realidad debe entrar en la escuela, pero no sólo la realidad, sino también y sobre todo, la forma que tiene el niño de relacionarse con esa realidad.

Resumen

La teoría de Piaget abre grandes posibilidades a la educación, pero su aplicación en el aula requiere una investigación rigurosa que nos muestre las significaciones que el alumno atribuye a los contenidos concretos que debe aprender. En esta línea se presenta una experiencia de aprendizaje de la representación gráfica de la multiplicación aritmética con un grupo reducido de alumnos de 3.º de EGB. Se analizan los procesos de generalización que se producen al cambiar de un contexto (manipulativo) a otro (gráfico), así como las características del proceso de construcción de un código en su doble vertiente cognitiva y social.

Summary

The Piaget's theory opens many possibilities to education, but its use into schools requieres rigorous researchs that point out the meanings that students ascribe to the concrete contents they have to learn. With a view to contribute to this purpose, a learning design of arithmetic multiplication graphic representation is presented. The experimental subject was a primary school 3rd year small group. Generalisation process that take place when context is changed —from manipulative to graphic one— are anlyzed. The development process features of mathematicals codes are discussed from a social and cognitive perspective.

Resumé

La théorie de Piaget apporte des importants possibilités pour l'education, mais son applicabilité à la classe comporte une recherche rigoureuse laquelle nous montre les significations que l'élève confère aux contenus concrets qu'il doit apprendre. On présente una expérience d'apprentissage sur la représentation graphique de la multiplication aritmétique avec un petit group d'élèves de 3éme niveau de l'école primaire. On fait l'analyse des processus de généralisation que se presenten dans le passage d'un context manipulative à un autre graphique, ainsi que l'analyse des caractéristiques du processus de construction d'un code du point de vue cognitive et social.

Referencias

GUITEL, G.: *Histoire comparée des numerations écrites*. París, Ed. Flammarion, 1975.

GÓMEZ-GRANELL, C.: «Procesos cognitivos en el aprendizaje de la multiplicación». *Infancia y Aprendizaje*, 1981, *15*.

IFRAH, G.: *Histoire universelle des chiffres*. Sephers. París, 1981.

MORENO, M.; SASTRE, G.: *Aprendizaje y desarrollo intelectual*. Barcelona, Gedisa, 1980.

PIAGET, J.: *Introducción a la epistemología genética: El pensamiento matemático*. Buenos Aires, Paidós, 1975.

PIAGET, J.; CHOQUET, G., y otros: *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid, Alianza, 1973.

SASTRE, G.: «Aprendizaje de los signos aritméticos y su generalización». *Actes de les Primeres Jornades sobre Noves Perspectives sobre la representació escrita en el nen»*. Publicacions de l'Institut Municipal d'Educacio de l'Ajuntament de Barcelona. Barcelona, 1985.

VERGNAUD, G.: *L'enfant, la mathématique et la realité*. Berna, Peter Lang, 1981.

VERGNAUD, G.: «Didactics and acquisition of multiplicative structures in secondary schools», in Archenbold, Driver, Orton, Wood-Robinson (EDS) *Cognitive development. Research in Science and Mathematics*. University of Leeds Press, 1980. (190-201).