

# Diseño y validación de Objetos de Aprendizaje realizados en GeoGebra para el aprendizaje de funciones reales en Matemáticas

## Design and validation of learning objects made in GeoGebra for learning real math functions

Oscar Mauricio Mora Arroyo<sup>1\*</sup>, Boris Alejandro Villamil Ramírez<sup>†</sup>

<sup>1</sup> Universidad Nacional de Colombia - Sede Palmira, Facultad de Ingeniería y Administración, Departamento de Diseño, Carrera 32 N° 12-00, Palmira, Valle, Colombia, Suramérica.

\* [ommoraa@unal.edu.co](mailto:ommoraa@unal.edu.co) / † [bavillamilr@unal.edu.co](mailto:bavillamilr@unal.edu.co)

Fecha de recepción del artículo: 16/03/2012 Fecha de aceptación del artículo: 30/08/2012

### Resumen

Este artículo presenta el desarrollo y resultados de la investigación sobre el diseño y validación de Objetos de Aprendizaje realizados en GeoGebra para el desarrollo de unidades de aprendizaje integrado en matemáticas, cuyo objetivo y propósito es facilitar la enseñanza de las particularidades de las gráficas de algunas funciones reales (logarítmica, exponencial, raíz cuadrada, cuadrática, valor absoluto), mejorando la comprensión y utilización del conocimiento matemático en los estudiantes. Esta investigación fue de tipo exploratorio-descriptivo, analizando el impacto de Objetos de Aprendizaje administrados a través de un LMS. Además de identificar la importancia de la implementación de los recursos pedagógicos en el aprendizaje de los estudiantes, los resultados de esta investigación muestran el desempeño de la prueba de los estudiantes que evaluó las gráficas de funciones reales extra clase.

### Palabras clave

Objetos de aprendizaje, constructivismo, matemáticas, GeoGebra.

### Abstract

This article presents the development and results of research on the design and validation of

Learning Objects GeoGebra made to develop integrated units of learning in mathematics, whose goal and purpose is to facilitate the teaching of the features of the graphs of some functions real (logarithmic, exponential, square root, quadratic, absolute value), improving the understanding and use of mathematical knowledge in students. This research was exploratory and descriptive, analyzing the impact of Learning Objects managed through an LMS. In addition to identifying the importance of implementing educational resources on student learning, the results of this research show the test performance of students evaluated the graphs of real functions extra class.

### Key words

Learning objects, constructionism, maths, GeoGebra.

### 1. Introducción

El propósito fundamental del presente trabajo es ofrecer a consideración de docentes de matemáticas, docentes interesados en la aplicación didáctica de Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y comunidad académica en general, los métodos de diseño de Objetos de Aprendizaje (OA), métodos de implementación, la evaluación y

los resultados de una serie de ayudas didácticas, que apoyadas con el uso de herramientas tecnológicas de programas en informática y computación, permiten una mejor aprehensión y, en algunos casos, la construcción de conocimientos matemáticos en temáticas consideradas tradicionalmente como de difícil comprensión por parte de los estudiantes.

Este es un trabajo didáctico que va a servir a los profesores de matemáticas y como consecuencia a sus estudiantes en el avance en sus estudios. También busca generar reflexiones sobre los verdaderos alcances y retos que la implementación de herramientas TIC y los OA tienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje en matemáticas, para identificar posibilidades de mejora y evolucionar, evitando caer en falsas idealizaciones.

Se espera que esta investigación sea el comienzo de una serie de trabajos similares y paralelos en diferentes temas de matemáticas e incluso en disciplinas distintas. De este modo se contribuye con el mejoramiento de la calidad de la educación en nuestra región.

## 2. Referentes

Tomando como punto de partida, que si bien las matemáticas son una ciencia exacta, muchas veces estas carecen de sentido sin la parte experimental, siendo necesario actividades estructuradas, y dirigidas hacia la construcción de significados de los objetos matemáticos, recreando tal vez, de ser posible, un laboratorio de matemáticas (Chapman y Robutti 2008) que debe responder a las necesidades y particularidades de los directamente implicados, a saber: estudiantes, docentes y conceptos matemáticos, entre otros. Ahora bien, si las matemáticas se formalizan, enriquecen y evolucionan con la ayuda del ordenador y las herramientas computacionales, también es posible que las mismas (herramientas) coadyuven en su enseñanza.

Es claro que un enfoque cognitivo contemporáneo, como la simulación por computadora, conduce a nuevas conceptualizaciones acerca de la representación y naturaleza del conocimiento y

de fenómenos como la memoria (Aguilar, 1982; Hernández, 1991), motivo por el cual al inicio de la investigación, fue relevante seleccionar la herramienta adecuada que mediara el concepto matemático, analizando la eficacia del uso del computador como auxiliar en el desarrollo de construcciones mentales (Moreno, Armella y Trigo, 2001).

Al nombrar al computador u ordenador, la intención está en el *software* de aplicación, que a través de este (el computador) resalta sus especialidades. La selección del *software*, de entre tantos que se analizaron, estuvo enormemente influenciada por Losada (2006), específicamente por una serie de preguntas que él plantea: “¿Desea usted crear una serie de aplicaciones didácticas personalizadas que sirvan de recurso para la comprensión profunda de axiomas, propiedades y teoremas geométricos en la educación secundaria? ¿Que puedan usarse vía internet? ¿Operativas en cualquier sistema? ¿Que incluyan capacidades de cálculo numérico y simbólico? ¿Dónde se pueda trabajar con ecuaciones? ¿Desea usted, también, que permitan el estudio de las funciones elementales, el uso de parámetros y la representación de derivadas e integrales? ¿Y, ya puestos, dotadas de un entorno amigable que permita una interacción inmediata con ellas? ¿Con una estética depurada? ¿Sin problemas de accesibilidad, pues hay que pensar en todos? No lo dude: estudie a fondo algún lenguaje de programación orientada a objetos como Java o ActionScript, algo de XHTML para su implantación en la web, condímelo con un poco de JavaScript y XML si es preciso, y... dedíquele miles de horas. Le deseamos mucha suerte...”.

Los programas (*software*) para matemáticas pueden catalogarse en dos: 1) los Sistemas de Álgebra Computacional (CAS, en inglés) y 2) los Sistemas de Geometría Dinámica (DGS); GeoGebra rescata lo mejor de ambos, en un entorno amigable y, claro está, sin los inconvenientes que plantea de manera satírica Losada (2006) en el texto anterior. Definido el *software* a utilizar, y todos los complementos que este requiere, se inició la construcción de los Objetos de Aprendizaje.

El desarrollo de la investigación mostró una corriente de pensamiento psicológico que, en buena medida subyace el espíritu de este trabajo: la

concepción constructivista del aprendizaje escolar, y los problemas a los que es posible aproximarse, desde la psicología, en relación con el desarrollo de los individuos (Hernández y Díaz, 1999): 1. *“La búsqueda de alternativas novedosas para la selección, organización y distribución del conocimiento escolar, asociadas al diseño y promoción de estrategias de aprendizaje e instrucción cognitivas. 2. La importancia de promover la interacción entre el docente y sus alumnos, así como entre los alumnos mismos, a través del manejo del grupo mediante el empleo de estrategias de aprendizaje cooperativo”.*

Al tratar de dar explicación a la génesis del comportamiento y el aprendizaje, dando prioridad a los mecanismos de influencia sociocultural, se tiene un referente inevitable en Vygotsky, si tal prioridad la tienen los socio-afectivos un referente sería, Wallon o si fundamentalmente los intelectuales o endógenos, Piaget. Lo que impulsó a desarrollar este trabajo, en buena medida fue compulsar esas propuestas y reflexiones teóricas que se intentó llevarlas a su materialización en el quehacer docente.

### 3. Método

Existe la oportunidad de utilizar el LMS Blackboard con los estudiantes de matemáticas básicas de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Palmira, creando en el currículo de Matemáticas Básicas la necesidad de diseñar herramientas de mediación tecnológica.

La investigación se dividió en cuatro etapas: 1. Etapa de análisis inicial, 2. Etapa de diseño de los Objetos de Aprendizaje, 3. Etapa de aplicación de los Objetos de Aprendizaje y, 4. Etapa de toma de datos para análisis de resultados.

Por norma de la universidad, todos los estudiantes que ingresan a los programas de pregrado deben presentar un examen de admisión desarrollado exclusivamente para este fin. Los estudiantes que tengan un bajo rendimiento en el área de matemáticas deben hacer por una sola vez el curso de nivelación Matemáticas Básicas aunque la reprobren. Por estas razones todos los estudiantes que cursan la asignatura son de primer semestre

y toman la asignatura por primera vez (no hay estudiantes que estén repitiendo la asignatura).

En la sede Palmira se presentan estudiantes para carreras de diversas áreas del conocimiento: administración de empresas, agronomía, diseño industrial, ingeniería agrícola, ingeniería agroindustrial, ingeniería ambiental, y zootecnia; por lo que los intereses y habilidades en cada área del conocimiento cambian notablemente entre los estudiantes de cada área. Los grupos de las asignaturas se crean de manera homogénea, razón por la cual en cada uno se encuentran estudiantes de las diversas carreras.

### 3.1 Etapa de análisis inicial

En esta etapa se determinaron las características de los usuarios de las aplicaciones a desarrollar (los estudiantes), sus necesidades en términos cognitivos y los requerimientos para el proceso de formación. Para estas tareas se organizó un grupo de trabajo conformado por 4 profesores del área de matemáticas, con la asesoría de un profesor de estadística (para el diseño de los experimentos) y uno de diseño (para el desarrollo de los OA). De esta manera se desarrolló un mismo programa, cronograma y modelo de evaluación de la asignatura Matemáticas Básicas para los 7 grupos ofrecidos en la sede. De estos, 4 grupos son la base de la presente comparación. Uno de los grupos tendría un acompañamiento a lo largo de todo el curso con herramientas virtuales, y otro de ellos no contaría con ninguna. Los otros dos alternarían su utilización tal como se muestra en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Mediación de Herramientas Virtuales en los 4 grupos de observación.

Temas	Grupo			
	A	B	C	D
1. Conjuntos y álgebra	NO	SI	NO	SI
2. Sistemas numéricos, ecuaciones y desigualdades	NO	NO	SI	SI
3. Plano cartesiano y funciones reales	NO	SI	NO	SI
4. Geometría elemental y trigonometría	NO	NO	SI	SI

Teniendo claro que el objetivo general del curso es nivelar a los estudiantes admitidos a los programas de pregrado que tienen en su plan curricular cursos de cálculo en los contenidos y habilidades básicas en matemáticas que requiere un estudiante universitario para comenzar dichos cursos, en términos cognitivos se estableció que los estudiantes evidencian falta de significación conceptual, carencia de habilidades operativas y falta de estructura en los conocimientos de Matemáticas Básicas.

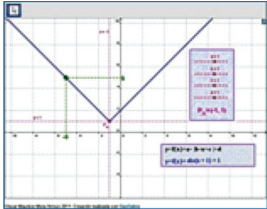
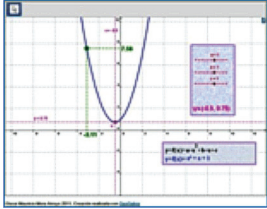
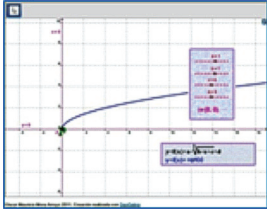
### 3.2 Etapa de diseño de los objetos de aprendizaje

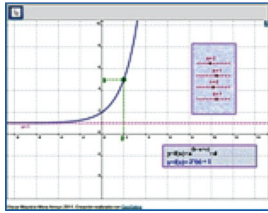
Los Objetos de Aprendizaje (OA) fueron diseñados con el *software* de Geometría Dinámica GeoGebra

3.2. La característica principal en estos objetos, a diferencia de otros encontrados en los referentes, es la utilización de deslizadores que habilita al estudiante a identificar el recurso de interacción igual para todos los aplicativos permitiéndole observar la gráfica con gran cantidad de opciones de variables numéricas y sus resultados gráficos. La Tabla 2 muestra el nombre, la imagen y una breve descripción de la aplicación.

Todos los OA se comprobaron funcionalmente y en su uso, comparando las actividades desarrolladas por usuarios tipo que estaban en el proceso de aprendizaje ajenos a los grupos de la investigación.

**Tabla 2.** Objetos de aprendizaje diseñados en el proyecto.

Gráfico Ejemplo	Función y Descripción
	<p><b>1. Función Valor Absoluto.</b>            La aplicación tiene cuatro deslizadores, a, b, c y d, con incrementos de 0,1.            La estructura de la expresión de entrada es: <math>y = a \cdot  b \cdot x + c  + d</math>            Al manipular los deslizadores el programa representa la gráfica en el plano, indicando un punto móvil sobre la curva y el punto angular.</p>
	<p><b>2. Función Cuadrática.</b>            La aplicación tiene tres deslizadores, a, b, y c, con incrementos de 0,1.            La estructura de la expresión de entrada es: <math>y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c</math>            Al manipular los deslizadores el programa representa la gráfica en el plano, indicando un punto móvil sobre la curva, el vértice y el eje de simetría.</p>
	<p><b>3. Función Raíz Cuadrada.</b>            La aplicación tiene cuatro deslizadores, a, b, c y d, con incrementos de 0,1.            La estructura de la expresión de entrada es: <math>y = a \cdot \sqrt{b \cdot x + c} + d</math>            Al manipular los deslizadores el programa representa la gráfica en el plano, indicando un punto móvil sobre la curva y el punto inicial.</p>

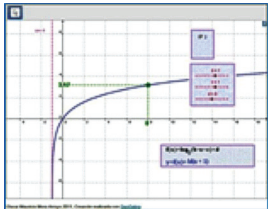


#### 4. Función Exponencial.

La aplicación tiene cuatro deslizadores, a, b, c y d, con incrementos de 0,1.

La estructura de la expresión de entrada es:  $y = a^{b \cdot x + c} + d$

Al manipular los deslizadores el programa representa la gráfica en el plano, indicando un punto móvil sobre la curva.



#### 5. Función Logarítmica.

La aplicación tiene tres deslizadores, b, c y d, con incrementos de 0,1.

El valor de a (la base) puede ser 2, e (Euler) o 10.

La estructura de la expresión de entrada es:  $y = \log_a(b \cdot x + c) + d$

Al manipular los deslizadores y el valor de a, el programa representa la gráfica en el plano, indicando un punto móvil sobre la curva.

### 3.3 Etapa de aplicación de los objetos de aprendizaje

Los Objetos de Aprendizaje (OA) diseñados se administran a través del Sistema de Administración de Enseñanza (LMS) que para este caso fue Blackboard, con el objetivo de registrar y monitorear el acceso de cada uno de los Objetos por parte de los estudiantes. Los OA son utilizados de la siguiente manera: 1) El docente manipula en clase cada uno de los OA en pro de recrear un laboratorio de matemáticas, en donde se producen las gráficas de infinidad de funciones, analizando cada una de las posibilidades, particularidades y comparándolas con las gráficas que realizan los estudiantes en sus apuntes, antes y después de la utilización de los OA. 2) Cada uno de los estudiantes puede acceder desde en LMS a los OA, seguir las instrucciones de operatividad del mismo y utilizarlos según sus necesidades. 3) A través de un foro en el LMS, cada estudiante puede solicitar ayuda, presentar inquietudes o comentarios de su trabajo con los OA.

De manera complementaria se diseñaron cartillas guía sobre el tema matemático a las que los estudiantes de todos los grupos tenían acceso por

medio impreso (para los estudiantes del grupo con actividades de tipo presencial) o digital en PDF a través del LMS (para todos los demás grupos).

### 3.4 Etapa de toma de datos

Los datos para el análisis de resultados tuvieron dos fuentes principales:

- *Primero.* Las calificaciones (entre 0.0 y 5.0) de la evaluación parcial (realizada 5 días después de haberse presentado en clase) obtenidas por los estudiantes de los 4 grupos analizados en la evaluación correspondiente al tema funciones (plano cartesiano y funciones reales) a los que se les aplicaron los mismos exámenes para todos los estudiantes. La evaluación fue una prueba cerrada de 8 preguntas, con la posibilidad de sustentar cada una de ellas. Los estudiantes se encontraban con las siguientes posibilidades (encabezado en la evaluación): *i*). Si marca dos respuestas a una misma pregunta, esta se tomará como incorrecta, *ii*). Si su respuesta es CORRECTA se revisará su sustentación, en caso contrario NO, *iii*). Cada pregunta tiene un valor de 0,625 si está bien sustentada, *iv*). Respuesta marcada correctamente pero sin sustentación

o mal sustentada tiene un valor de 0,250. Las calificaciones obtenidas se agruparon en cinco intervalos (0.0 a 0.9, 1.0 a 1.9, 2.0 a 2.9, 3.0 a 3.9, 4.0 a 5.0).

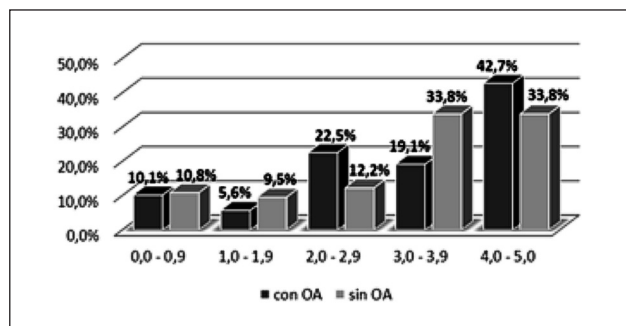
- *Segundo.* Los datos de acceso proveídos por el LMS para los estudiantes que recibieron los OA como materiales complementarios disponibles para su consulta desde el momento en que se presentaron en clase presencial. Estos datos se tomaron únicamente para los estudiantes que estuvieron a lo largo de todo el curso (no se tuvieron en cuenta estudiantes que desertaron durante el desarrollo del curso), aunque sólo se analizaron los días entre la publicación de los OA y los cuatro días posteriores a la aplicación de la evaluación. Estas observaciones permitieron comparar el acceso de cada aplicación y el número de estudiantes que la utilizaron.

### 3.5 Resultados

Los Objetos de Aprendizaje (OA) fueron aplicados a una población de 2 de los 7 grupos de matemáticas básicas de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Palmira, correspondiente al semestre 2011-1. Todos los grupos tienen en común el plan de estudio del curso, los módulos (Teoría - Ejercicios), talleres, evaluaciones parciales y finales, con el fin de homogenizar la intervención. La Tabla 3 relaciona la cantidad de estudiantes, el acceso al LMS y el acceso a los Objetos de Aprendizaje de los grupos intervenidos.

Para realizar el análisis de los datos obtenidos, se tiene en cuenta lo siguiente: 1) Confrontación de los resultados de una evaluación parcial de los grupos que tuvieron mediación con los objetos

de aprendizaje y los que no; 2) Confrontación de los registros de uso de cada uno de los OA y los estudiantes que tuvieron acceso a ellos a través del LMS; 3) Confrontación de los registros de uso de cada uno de los OA y los estudiantes que accedieron a ellos a través del LMS.



**Figura 1.** Porcentaje de estudiantes en intervalos por rendimiento en evaluación.

En la Figura 1 se puede observar la diferencia en las calificaciones de los estudiantes que tienen OA como complemento a su formación y los que no. Aunque podría afirmarse que existe un aumento en las calificaciones cuando se presentan OA (los estudiantes aprobados en su mayoría obtuvieron notas iguales o superiores a 4.0), se encontró un mayor porcentaje de estudiantes aprobados cuando no se presentan OA (67.6%) que cuando sí los hay (61.8%). Habría que revisar con mayor detalle los datos para establecer si existen variables no identificadas en el estudio que originen esta tendencia.

En la Figura 2 se revisan, al interior de los estudiantes que tuvieron acceso a los OA, qué porcentaje de consultas realizaron a cada uno de

**Tabla 3.** Grupos de observación.

Grupo	Nº de estudiantes	Acceso a LMS Blackboard	Acceso a los Objetos de Aprendizaje
A	28	NO	NO
B	46	SI	NO
C	39	SI	SI
D	50	SI	SI

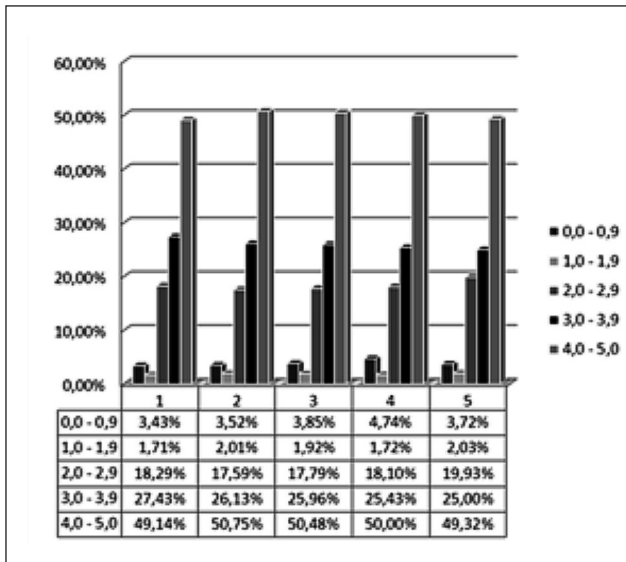


Figura 2. Porcentaje de accesos por intervalos en evaluación.

los cinco aplicativos diseñados e implementados en la asignatura. La suma de cada uno de los rangos en cada aplicativo equivale al 100% de las consultas. Se puede identificar de esta manera que aproximadamente la mitad de las consultas se hicieron por parte de estudiantes que obtuvieron las mejores calificaciones.

En la Figura 3 se identifican, dentro del total de estudiantes que pertenecen a cada rango de evaluación, qué porcentaje de ellos consultaron cada uno de los cinco aplicativos. Se observa que en ninguno de los rangos de evaluación de los estudiantes hubo una consulta absoluta (con tendencia al 100%) de los OA, aunque sí se observa una tendencia de revisión mayor entre los que aprobaron la evaluación (con notas superiores a 3.0) que entre los que no la aprobaron. Un dato que no es esperado es el de los estudiantes que obtuvieron notas inferiores a 1.0 que realizaron en proporción más consultas que los que obtuvieron notas entre 1.0 y 1.9.

En la Figura 4 se observan los promedios de revisión, hallados de dividir el número de consultas entre el número de estudiantes que llevaron a cabo consultas para cada OA (del 1 al 5) y en el total de los aplicativos (6), organizados en los rangos de

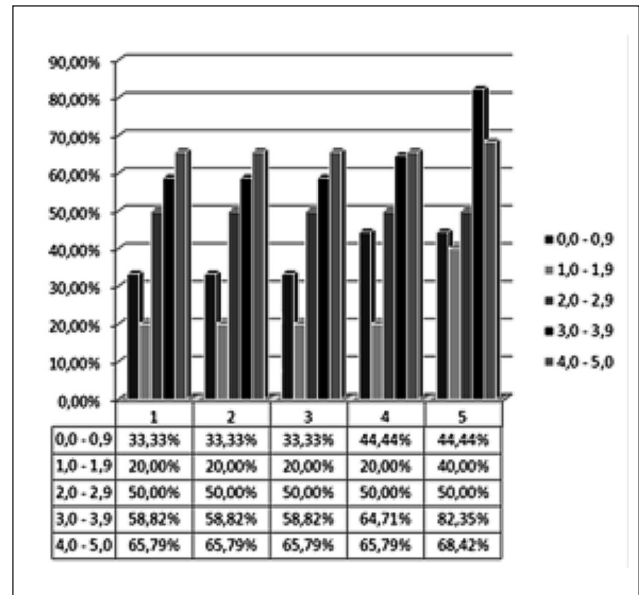


Figura 3. Porcentaje de estudiantes que accedieron en cada intervalo de evaluación.

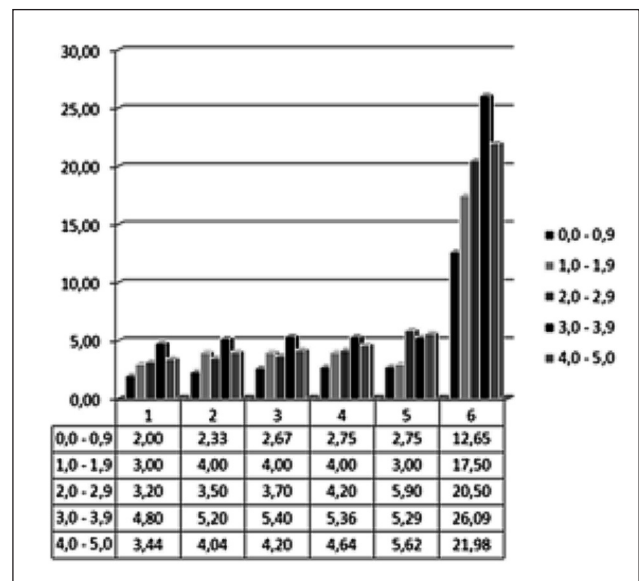


Figura 4. Porcentaje de accesos por estudiante

calificaciones. En los indicadores aquí obtenidos, puede notarse un claro aumento: entre mayor fue la nota obtenida, mayor fue la consulta promedio por los estudiantes. Sin embargo, nuevamente fueron mayores las consultas promedio de los estudiantes del rango entre 3.0 y 3.9 que los del rango que obtuvieron las máximas calificaciones

(4.0 o superior).

Finalmente, se buscó identificar las fechas de mayor consulta, ya que los aplicativos estuvieron disponibles durante 30 días (desde el día que se presentó en clase y hasta el día del examen final), y se encontró que en los 9 primeros días se presentaron la mayor cantidad de consultas (Figura 5). Como se mencionó anteriormente, fue en el día 5 que se realizó la prueba sobre la que se elaboraron los rangos que han servido de base para las figuras presentadas en este estudio.

Aunque la Figura 5 no es muy clara al respecto, la suma del número de consultas en los días observados (del 1 al 9) sí ofrece una clara coherencia entre el acceso a los OA y los rendimientos en las evaluaciones (Figura 6), lo que permite inferir que aunque en el total del tiempo fueron más los estudiantes y las consultas de los aplicativos por parte del rango entre 3.0 y 3.9, los estudiantes del rango con mejores calificaciones lo hicieron de manera más oportuna.

## Conclusiones

Los resultados obtenidos muestran que los OA potencializan una mejor apropiación del concepto matemático de funciones reales, en específico su gráfica cartesiana. La utilización de los objetos de aprendizaje facilitó en gran medida el acceso a los estudiantes a un gran número de ejemplos, donde son ellos quienes los proponen.

Es evidente que se debe ser muy cuidadoso en la manera como se filtran los datos. La Figura 1 y Figura 4 muestran tendencias con datos contradictorios, pero cuando se revisan los datos con filtros de fecha (Figura 5) se aclaran dichas tendencias. También se deben refinar los mecanismos de obtención de información. Para el estudio presentado se conservó la información de la evaluación global de las funciones, pero no se detalló el rendimiento por tipo de función, que hubiera ofrecido información detallada del rendimiento de cada uno de los OA diseñados e implementados. De igual forma, hubiese sido pertinente mostrar un análisis más minucioso, logrando identificar tal vez si existe una relación

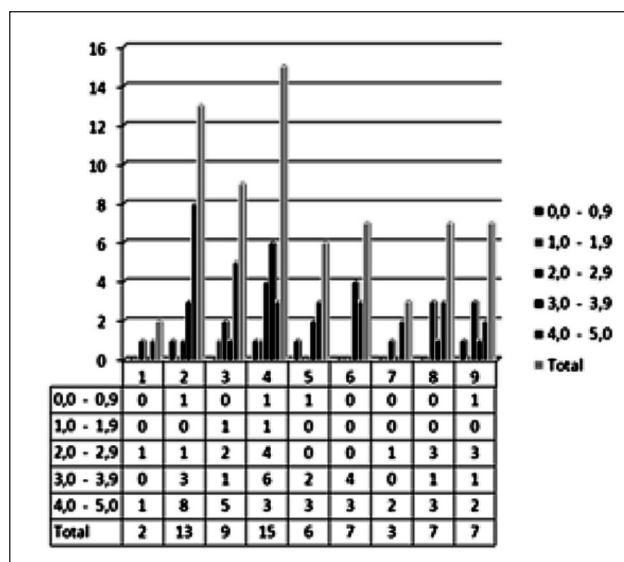


Figura 5. Número de estudiantes que accedieron a los OA en los primeros 9 días.

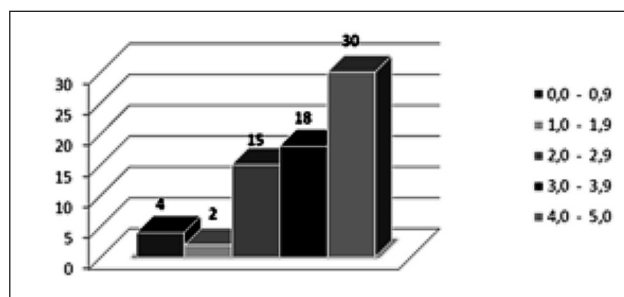


Figura 6. Porcentajes de estudiantes en intervalos por rendimientos en evaluación.

entre el estilo de aprendizaje y el desempeño de los estudiantes que utilizaron los OA.

La investigación parte con la hipótesis que los implicados en ella (profesores-estudiantes), cuentan con un nivel aceptable en el manejo y acceso de las herramientas informáticas. Durante el transcurso de la investigación se hizo evidente que en los grupos de estudiantes intervenidos, en muchos casos, ese nivel no era el adecuado. El anterior resultado, tal vez inesperado, pone en preaviso a los investigadores y a la institución; ya sea para futuras investigaciones o para dar continuidad a la que en este artículo se describe.



## Referencias

1. Barriga, Frida (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. Consultado el 27 de enero de 2010, En: <http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/biblioteca/articulos/pdf/strate.pdf>.
2. Cantoral, Ricardo y Farfán, Rosa María (2003). *Matemática educativa: una visión de su evolución*. Consultado el 17 de agosto de 2010, En: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33560102.pdf>.
3. Duque, N. (2011). *Objetos de Aprendizaje, Repositorios y Federaciones de Repositorios de OA*. Ponencia U. Nacional, Manizales.
4. Losada, Rafael (2006). *GeoGebra: la eficiencia de la intuición*. Consultado el 20 de octubre de 2010, En: [http://www.iespraviva.com/mates/software/2005/geogebra/\\_ayuda\\_para\\_Geogebra/geogebra.pdf](http://www.iespraviva.com/mates/software/2005/geogebra/_ayuda_para_Geogebra/geogebra.pdf).
5. IEEE - Learning Technology Standards Committee (2002). "Draft Standard for Learning Object Metadata". *IEEE Standard 1484.12.1*, New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers (PDF).