

Original

## LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN SU ESTRUCTURACIÓN DE UN SISTEMA DE HABILIDADES

Mathematical modeling in the structuring of a skills system

M. Sc. Salvador Fonseca-Nueva. Universidad de Granma. [sfonsecan@udg.co.cu](mailto:sfonsecan@udg.co.cu)

Dr. C. María Isabel Machado-Solano. Universidad de Granma. [mmachados@udg.co.cu](mailto:mmachados@udg.co.cu)

Dr. C. Guillermo Bello-Rodríguez. Universidad de Granma. [gbellor@udg.co.cu](mailto:gbellor@udg.co.cu)

Recibido: 3/7/2017    Aceptado: 7/12/2017

### RESUMEN

La modelación matemática es una de las herramientas fundamentales que le permite al ingeniero interpretar de forma correcta la realidad y transformarla en aras de perfeccionar los distintos procesos de la economía. El presente trabajo tiene como objetivo ofrecer una metodología para contribuir al perfeccionamiento de la enseñanza de la modelación matemática, vía ecuaciones diferenciales en las carreras de Ingeniería de la facultad de Ciencias Técnicas de la Universidad de Granma. Mediante un análisis minucioso de los planes y programas de estudio de estas carreras, de la preparación de los docentes y de los estudiantes se determinaron las principales insuficiencias en esta temática. La metodología propuesta se sustenta en la estructuración de las habilidades matemáticas básicas y su influencia para la formación y desarrollo de la habilidad modelar vía ecuaciones diferenciales y en la contextualización de los problemas docentes de manera que motiven a los estudiantes al estudio eficiente de este contenido.

**PALABRAS CLAVES:** Modelación; Matemática; ecuaciones diferenciales

### ABSTRACT

The mathematical modeling is one of the fundamental tools that it allows to the engineer to correctly interpret of the reality and transform it in order to perfect the different processes of the economy. The present paper aims to offer a methodology to improve the teaching of the mathematical modeling through differential equations in the Engineering careers of the Faculty of Technical Sciences of Granma's University. A thorough analysis of the curricula of these careers and the preparation of teachers and students identified the main inadequacies in this subject. The proposed methodology is based in the structuring of the mathematical basic abilities and its influence for the formation and develops of the ability to model through

differential equations and in the contextualization of the teaching problems so that they motivate the students to the efficient study of this content.

**KEY WORDS:** Modeling; Mathematical; differential equations

## **INTRODUCCIÓN**

La disminución de los recursos naturales, las crisis económicas, la proliferación de enfermedades, el cambio climático y posibles viajes al espacio son los principales problemas que matizan el mundo de hoy, aunque se vive un espectacular desarrollo científico técnico, muchas de estas cuestiones constituyen desafíos para el hombre, pues aún resulta difícil realizar un estudio detallado del comportamiento de muchos de los fenómenos que acontecen para poder tomar la decisión más acertada.

La ciencia a lo largo de la historia, para el estudio de estos fenómenos, se apoya en dos pilares fundamentales: la observación y la experimentación, por lo que se hace necesario evitar la reducción de la modelación matemática a una simple resolución de un problema e indagar frente a la realidad como se desarrolla la modelación matemática de estos fenómenos para su mejor estudio, (Villa-Ochoa, 2015).

Hoy, en el mundo moderno, se necesitan soluciones más precisas, se intensifica así la búsqueda de nuevas herramientas para mejorar el entendimiento de su complejidad, de ahí que las tendencias actuales de la enseñanza de la Matemática, sean: la Matemática Discreta, las Probabilidades y Estadística así como la Geometría, todo ello como base para el desarrollo de la modelación matemática, principal herramienta para el estudio del comportamiento de los fenómenos naturales.

Para Cuba, que ha vivido más de medio siglo de bloqueo exacerbado, le resulta de vital importancia el desarrollo de la ciencia y la técnica como principal vía para su desarrollo económico, es por ello que el perfeccionamiento constante de la Educación Superior en cuanto a sus planes y programas de estudio, ha sido una prioridad.

El Ingeniero tiene su propio modo de actuación expresado en los campos de acción de la ciencia y la técnica, siendo el objetivo principal la explotación de los sistemas de ingeniería. Para alcanzar este desarrollo precisa de una formación básica matemática, que le permita aplicar los conocimientos adquiridos en asignaturas básicas y en otras con carácter más específico dentro de la carrera.

Son muchas las razones que justifican la necesidad del empleo de la modelación matemática, sin embargo aunque el tema se ha abordado ampliamente por diferentes autores, aún se manifiestan insuficiencias en este sentido; entre las que se pueden citar:

- Insuficiencias en el tratamiento didáctico, en la enseñanza de la modelación matemática.
- Ausencia de un enfoque didáctico en el tratamiento a los problemas de modelación matemática con ecuaciones diferenciales.
- Desactualización y falta de contextualización de los contenidos que abordan la modelación matemática con ecuaciones diferenciales en la bibliografía básica.

Las estrategias propuestas (Colectivo de autores, CUJAE, 2015), por citar un ejemplo, posee un enfoque didáctico al tratamiento de la modelación matemática pero aún resulta insuficiente pues de lo que se trata es de la formación y desarrollo de esta habilidad.

En el libro de texto básico (Zill, D, G, 1997). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado, los ejercicios que se proponen sólo se limitan a disoluciones de sustancias y mezclas y circuitos eléctricos, no están contextualizado de acuerdo con la actualización del contenido en el contexto actual y cubano, así como al perfil del profesional de las ingenierías.

Lo anteriormente planteado pone de manifiesto las insuficiencias que poseen los estudiantes de ingeniería agrícola en el desarrollo de la habilidad de modelación de fenómenos de la realidad con ecuaciones diferenciales, lo que constituye el problema científico.

La modelación matemática constituye una de las habilidades matemáticas más importante para la resolución de problemas, puesto que conecta al estudiante con la realidad objetiva.

El objetivo de la presente investigación está dado en la elaboración de una metodología sustentada en un modelo didáctico de dirección del proceso de formación de las habilidades matemáticas, con enfoque sistémico, basado en el proceso de modelación matemática de problemas de la profesión mediante ecuaciones diferenciales.

## **POBLACIÓN Y MUESTRA**

El Ingeniero Agrícola tiene su propio modo de actuación expresado en los campos de acción en la administración y el mantenimiento de los sistemas de ingeniería agrícola, en los eslabones de base, siendo el objetivo principal su eficiente y optima explotación. Para ello la dimensión de la Matemática es lo científico – tecnológico. En este sentido en el segundo año de la carrera, los estudiantes reciben conocimientos relacionados con la modelación matemática vía ecuaciones diferenciales, para que puedan resolver problemas relacionados con su perfil.

La mayor deficiencia de los estudiantes para la modelación matemática es, que no identifican una situación real que pueda conducir a la definición de un problema de modelación matemática vía ecuaciones diferenciales. El presente trabajo se desarrolla con 32 estudiantes del segundo año de Ingeniería Agrícola, de un total de 50 para un 64 %.

#### I-. Estructuración del sistema de habilidades

Habilidad a trabajar: Modelación matemática a través de ecuaciones diferenciales.

#### MODELAR.

Definición: MODELAR, es asociar a un objeto no matemático un objeto matemático, que represente determinados comportamientos, relaciones o características suyas.

Importancia de su formación: Posibilita el estudio del mundo objetivo que rodea al hombre a través de la simulación y procesamiento matemático de los comportamientos y características de los objetos. Esta habilidad se manifiesta en tres niveles fundamentales: de selección, cuando es conocido el objeto matemático que se utiliza para modelar; de adaptación, cuando no se conoce de antemano el modelo matemático y se adapta o usa en condiciones nuevas y de creación, cuando no existe un modelo matemático ni es posible adaptar alguno existente debido a las exigencias del objeto a modelar.

En la actualidad, la formación de esta habilidad es fundamental, tanto en los matemáticos como en los profesionales que usan la Matemática, más aún cuando al influjo de la computación se han podido “atacar” fenómenos hasta ahora imposibles de estudiar, se han vuelto obsoletos muchos modelos del Análisis Clásico, siendo sustituidos por modelos discretos, entre otros. Esta habilidad debe trabajarse en pregrado en los tres tipos fundamentales de modelos: analíticos, numéricos y probabilísticos, en tanto cada uno aporta una forma diferente de interpretar la realidad para su estudio.

Todas las habilidades tienen sus invariantes bien definidas, en el caso de la habilidad MODELAR, muchos autores definen una invariante: caracterizar por medio gráfico o matemático un proceso cualquiera. En el caso que se estudia, se refiere a un proceso de modelación, el cual consta de varias etapas, según el tipo de proceso, por ejemplo en el artículo “Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros” del colectivo de autores de universidades latinoamericanas, 2014 se sintetiza el siguiente esquema (ver figura 1)

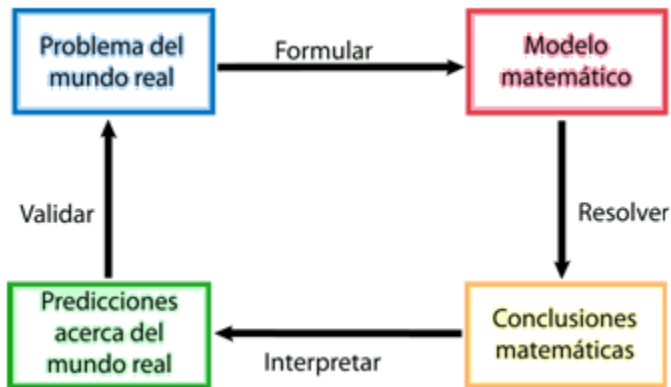


Fig. 1 Modelación Matemática

A partir de dicho esquema se declaran las siguientes etapas:

1. Definición del problema y sus objetivos
2. Definición de la teoría que gobierna el problema
3. Descripción de la situación física en términos matemáticos
4. Solución matemática del modelo.
5. Comparación del modelo con la situación real.
6. Estudio de las limitaciones del modelo.
7. Aplicación del modelo e interpretación de los resultados que ofrece.

Otras clasificaciones de las etapas de la modelación matemática (Ramón Abel Ortega Díaz, 2015). Optimización de los procesos agropecuarios) para un proceso económico se proponen las siguientes:

1. Estudio del proceso económico.
2. Estudio del objeto de modelación donde transcurre el proceso económico investigado y la extracción de sus características más importantes.
3. Planteamiento del problema económico matemático donde se determinan claramente los objetivos de la solución.
4. Elección del método matemático de solución del problema.
5. Construcción del modelo matemático del problema o la aplicación de uno estándar.
6. Solución del problema en la computadora, o sea la utilización de software o aplicaciones informáticas.
7. Análisis de los resultados y la corrección del modelo económico.

Teniendo en cuenta estas clasificaciones de las etapas del proceso de modelación matemática y que el mundo real del ingeniero es la empresa en la cual están definidos los objetivos y no todos los problemas porque estos van apareciendo de acuerdo con las condiciones de los medios de producción, preparación de las fuerzas productivas y otros factores se propone de forma sintetizada las etapas siguientes:

1. Definir el problema y sus objetivos.
2. Formulación matemática del problema.
3. Solución matemática y construcción del modelo.
4. Análisis de los resultados y corrección del .modelo.
5. Aplicación del modelo e interpretación de los resultados.

#### 1-. Definir el problema.

Es imprescindible señalar que a veces, pero no siempre, la solución de un problema comienza cuando un ingeniero se da cuenta de una necesidad y decide hacer algo al respecto. Identificar la necesidad y expresarla con determinado número de palabras es una actividad bastante creativa, pues la necesidad puede manifestarse simplemente como un vago descontento o bien por la intuición de una deficiencia o en la sensación de que algo no es correcto.

Con frecuencia, la necesidad no es del todo evidente; por lo general, se identifica de repente a partir de una circunstancia adversa o de una serie de circunstancias fortuitas que surgen casi al mismo tiempo. Por ejemplo, la necesidad de hacer algo acerca de una máquina empacadora de alimentos pudiera detectarse por el nivel del ruido, por la variación en el peso del paquete y por las ligeras, pero perceptibles, variaciones en la calidad del empaque ó la envoltura.

Es evidente que, si una persona es sensible y percibe fácilmente las cosas, entonces es más posible que identifique una necesidad, y también es más probable que haga algo al respecto. Por esta razón, las personas sensibles son las más creativas. Una necesidad se identifica con facilidad después de que alguien la ha planteado. Existe una diferencia bien clara entre el planteamiento de la necesidad y la definición del problema. En general no se conoce bien el problema ni su origen, tanto el que solicita un modelado como el que no lo solicita. Si lo conociera no solicitaría ayuda para resolverlo, y por tanto el problema no existiría, porque en muchas ocasiones ser capaz de explicitar el problema es hacer evidente una solución. (García Sabater, 2016).

Definir el problema presupone hacer una caracterización de la empresa en la cual se describan detalladamente los objetivos, condiciones y uso de los medios de producción, preparación del personal de la empresa, esto contribuirá a identificar de forma precisa el problema.

Para definir el problema el ingeniero debe tener desarrolladas habilidades generales y específicas (*Compendio Pedagogía, 2007*)

- Caracterizar.
- Describir.
- Graficar, esquematizar, representar.
- Elaboración de hipótesis.

Para esta etapa se propone realizar visitas a empresas con el objetivo de observar si existen situaciones reales que puedan conducir a una modelación mediante ecuaciones diferenciales tales como: problemas de variación de temperaturas, crecimiento de plantas, problemas de mezclas, entre otros.

## 2-. Formulación matemática.

- Lo primero es identificar las leyes físicas, biológicas, químicas, económicas u otras que gobiernan al problema.
- Interpretación del problema definido
- Se emplear estrategias de aprendizaje como es la formulación de preguntas, dividir el todo en partes lógicas y establecer relaciones entre las partes y el todo.
- Traducir del lenguaje común al matemático la información que brinda cada parte lógica.
- Encontrar vías de solución (ecuaciones diferenciales)

## 3-. Solución matemática y construcción del modelo (conclusiones matemáticas)

En muy pocas ocasiones, la formulación da una respuesta directamente. De manera regular, se requiere de la realización de operaciones, para comprobar que la solución matemática de las ecuaciones que lo constituyen es verdaderamente factible, así como dejar bien establecidos los valores de los parámetros necesarios para lograr su solución y el método idóneo a utilizar para ello.

Habilidades: Resolver ecuaciones diferenciales, calcular derivadas e integrales.

## 4-. Análisis de los resultados y corrección del modelo.

## 5-. Aplicación del modelo e interpretación de los resultados que ofrece.

Ejemplos de aplicación de la propuesta.

### *Situación No 1*

En una empresa dedicada a la laminación del acero, producen láminas de acero para usos múltiples. La empresa logra como promedio tener listas para su comercialización a lo sumo una lámina por hora, lo cual no es suficiente para el cumplimiento de su plan económico.

Tratamiento metodológico.

1-. Definición del problema.

- Caracterización del proceso de producción.

El ingeniero realiza un estudio del proceso de laminación, desde su fundición hasta el molino de laminación. Se sabe que la temperatura de fundición es de 1200°C y que después los lingotes de acero pasan al molino de laminación para convertirlos en planchas, el laminado posterior debe realizarse en frío. En el estudio realizado sobre los medios de producción se pudo comprobar que los mismos se encuentran en buen estado técnico, por otro lado se pudo conocer que los operarios no conocen con exactitud el tiempo en que las láminas de metal están a una temperatura ideal para el próximo proceso, por lo que se decidió hacer un estudio sobre el tiempo dedicado a cada proceso.

- Identificación o localización del problema.

Inicialmente la lámina se encuentra a 1200°C, pasados 5 minutos, en un local cuya temperatura es 21°C, su temperatura llega a ser de 800°C. Se desea determinar el momento en que una lámina de metal estará a una temperatura ideal de 50°C para su almacenamiento definitivo.

Habilidades: caracterizar, describir e identificar.

2-. Formulación matemática.

- ¿De qué trata el problema?

En todo problema matemático lo primero es preguntar que se está pidiendo, en este caso, calcular el tiempo en que una lámina de metal estará a una temperatura ideal de 50°C.

Según las características del problema se trata de variación de temperatura, más específicamente de enfriamiento de un cuerpo de alta temperatura, por lo que se tiene que tener en cuenta la ley física que gobierna al problema, en este caso se refiere a la ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T - T_a)$$

- ¿Qué información se tiene?

Para ello se propone dividir el texto en partes lógicas y extraer de cada una de ellas la información que se brinda.

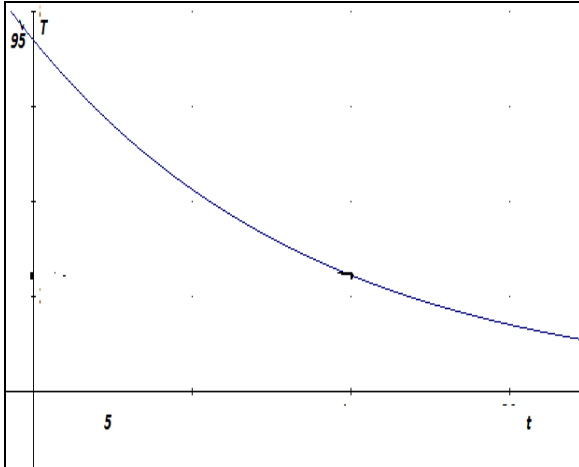
- Se trata de un lingote de acero sometido a 1200°C de temperatura. Temperatura inicial:  $T(0) = 1200^\circ\text{C}$



Pasados 5 minutos, en un local cuya temperatura es 21°C, su temperatura llega a ser de 800°C.  
 Temperatura ambiente ( $T_a$ ): 21°C y  $T(5) = 800°C$ .

- Representación gráfica: sus valores se aproximan a una función exponencial del tipo  $y =$

$$ae^{-bx}$$



• ¿Qué hace falta?

Encontrar una expresión matemática que permita medir el tiempo de variación de la temperatura de la lámina.

Habilidades: Interpretar, traducir del lenguaje común al lenguaje matemático, representar gráficamente, relacionar gráfico con sus propiedades.

3-. Solución matemática y construcción del modelo (conclusiones matemáticas)

Aplicando la ley de enfriamiento de Newton se obtiene la ecuación:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T - T_a) \text{ es una ecuación diferencial de primer orden y de variable separable.}$$

$$\int \frac{dT}{T - T_a} = \int k dt$$

Como  $T(0) = 1200$  tenemos

$$\ln(T - T_a) = kt + C$$

$$Ce^{k0} = 1179$$

$$\frac{779}{1179} = e^{5k}$$

$$e^{kt+C} = T - T_a$$

$$C = 1179$$

$$\ln 0,6607 = 5k$$

$$T(t) = e^{kt+C} + T_a$$

$$T(5) = 1179Ce^{k5} + 21 \quad K = \frac{-0,4144}{5}$$

$$T(t) = Ce^{kt} + 21$$

$$800 - 21 = 1179e^{k5}$$

$$K = -0,0828$$

$$779 = 1179e^{k5}$$

El modelo sería

$$T(t) = 1179e^{-0,0828t} + T_a$$

4 -. Análisis de los resultados y corrección del modelo.

Utilizando los datos del problema tenemos:

$$1179e^{-0,0828t} + 21 = 50$$

$$1179e^{-0,0828t} = 29$$

$$e^{-0,0828t} = 0,0245 \quad \ln(0,0245) = -0,0828t \quad t = \frac{-3,7090}{-0,0828} = 44,70 \approx 45 \text{ min}$$

Quiere esto decir que la decisión a tomar es buscar un local donde la temperatura sea inferior a 21°C o aplicar, si es conveniente, enfriamiento con agua.

Si probamos para 0°C el tiempo se reduzca a 38 min, lo cual sigue resultando insuficiente.

5-. Validación del modelo

## ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Después de aplicada la metodología para contribuir al desarrollo de la habilidad de modelación matemática vía ecuaciones diferenciales en los estudiantes de segundo año de Ingeniería Agrícola se obtienen los siguientes resultados:

- 1.- Se ha logrado que los estudiantes puedan definir un problema de modelación matemática a partir de una situación real dentro de su perfil.
- 2.- Los estudiantes han desarrollado habilidades específicas y generales en la formulación matemática del problema y en la identificación de las leyes físicas y biológicas que se involucran en los contextos tratados.

## CONCLUSIONES

- La contextualización de los problemas de modelación matemática mediante ecuaciones diferenciales contribuye a la motivación de los estudiantes hacia el estudio.
- Determinar las habilidades intrínseca de la habilidad MODELAR mediante ecuaciones diferenciales y desarrollarlas en los estudiantes contribuye a la formación y desarrollo de esta habilidad en los estudiantes de ingeniería.
- La metodología propuesta contribuye al perfeccionamiento de la enseñanza de la modelación matemática mediante ecuaciones diferenciales.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Villa, Ochoa, A., (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de*

*Investigación en Educación*, vol. 8, núm. 16, julio-diciembre, pp. 133-148 Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colombia.

Colectivo de autores, CUJAE, 2015. El papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. La Habana.

ZIL, D. (1997). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones del modelado ISBN 968-7529-21-0. Sexta Edición.

Murray R, S., (1994). Ecuaciones Diferenciales, Aplicadas. *PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA*, S.A. ISBN 968 880- 063-8. Naucalpan de Juárez. Edo. de México.

Programas y Planes de Estudio de Matemática III. Ingeniería Agrícola e Ingeniería Mecánica, 2007.

Colectivo de autores. 2007. Compendio de Pedagogía. La Habana. Cuba.

García Sabater, J., Maheut, J. (2016). Modelado y Resolución de Problemas de Organización Industrial mediante Programación Matemática Lineal. Grupo de investigación ROGLE. Departamento de Organización de Empresas. Curso 2015/2016.

Werle De Almeida, L., Fogaça De Oliveira, C. (2015). Modelos de crecimiento populacional: um olhar à luz de uma socioepistemologia. ISSN: 1815-0640 Número 41. Marzo, pp 107 - 133

Gallardo, B.; Almerich, G.; Suárez Rodríguez, J. & García Félix, E., (2012). Estrategias de aprendizaje en estudiantes universitarios excelentes y medios. Su evolución a lo largo del primer año de carrera. *Relieve*, v. 18, n. 2, art. 1. DOI: 10.7203/relieve.18.2.2000".