Knowledge, teaching competences of mathematics teachers and becoming a teacher trainer

Salvador Llinares, University of Alicante (Spain)

The AIEM Special Issue entitled *Knowledge, teaching competences of mathematics teachers and becoming a teacher trainer* offers continuity with other recent special issues in international journals focused on topics regarding mathematics teachers, their practices, learning and professional development. In the *Journal of Mathematics Teacher Education*, for example, with the special issues *Video as a catalyst for mathematics teacher' professional growth*, 2017, 20(5) and *Mathematics teachers as partners in task design*, 2016, 19(2-3). In *ZDM*, there are *Impact of university teacher education programs on teacher change and mathematics teaching practice*, 2017, 49(2) and *Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers*, 2013, 45(4). This series of special issues indicates focuses and perspectives on mathematics teachers with the central interest of researchers and teacher trainers on questions on and about mathematics teachers, their practices and training processes.

Research into mathematics teachers is linked to the clear need in different areas for a better understanding of the role of the teacher in mathematics teaching and learning situations and in professional development. Approaches to these problems and the foci proposed by the researchers indicate a conceptual and methodological diversity that points to the complexity of the phenomena under study. The current special issue deals with international initiatives that reflect some of the conceptual approaches being developed in relation to knowledge, practice and learning of the teacher of mathematics.

The issue contains six articles, of which three are from Colombia/Italy, Singapore and the UK, and another three research groups in Spain (Barcelona/Granada/in collaboration with Chile, Alicante/Seville and Huelva). These articles present three important topics in research on and about teachers of mathematics: specialist knowledge for the teaching of mathematics, conceptualisation and development of teaching competences through use of knowledge and generation of theoretical perspectives for explaining and understanding the process of becoming a teacher trainer for mathematics teachers.

The articles by M. Á. Montes, L. C. Contreras and J. Carrillo (University of Huelva) and by B. H. Choy and J. Dindyal (NIE-Nanyang Technological University, Singapore) study the practice of the teacher of mathematics and the indication of the knowledge mobilised in teaching and learning situations, with special attention on the specialist knowledge of the teaching linked to the practice of teaching mathematics.

M. Á. Montes and colleagues underline the potential of the *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) model for explaining the characteristics of the teacher's knowledge as it is mobilised in teaching situations. The role that can be played by certain mathematical concepts (the concept of infinity in the article) as articulators of the specialised knowledge of the mathematics teacher is particularly highlighted. In their article, B. H. Choy and J. Dindyal underline the use made by the teacher of their knowledge for modifying examples and problems in the teaching process and thereby maximising learning opportunities for their students *(bianshi*) as an aspect of their mathematics teaching practice. The teacher's competence in recognising and making use of variations in the standard problems that arise as a demonstration of the use of specialised knowledge in teaching is highlighted. These two articles emphasise two features of the specialised knowledge of the mathematics teacher: the organisational role for the teacher's knowledge of concepts ("big ideas") and the knowledge that allows for variation on standard problems (*bianshi*).

The articles by C. Fernández, G. Sánchez-Matamoros, J. Valls and M. L. Callejo (Universities of Alicante and Seville); J. D. Godino, B. Giacomone (University of Granada), V. Font (University of Barcelona) and L. Pino-Fan (University of Los Lagos, Chile); and Á. Bohórquez (Distrital University, Colombia) and B. D'Amore (University of Bologna, Italy) address knowledge acquisition and development of competences of the mathematics teacher in the context of the initial stage of training. These three articles highlight the characteristics of the use of the teacher's knowledge taking into account the role played by theoretical tools (knowledge and schemes of analysis) in the development of teaching competences by mathematics teachers.

The article by C. Fernández and colleagues have summarised the results of research carried out in recent years by his group on the conceptualisation of the ability for "professional noticing" in situations of teaching and learning of mathematics. In this article the authors underline the role of indicators for the development of "professional noticing" skills in the definition of learning contexts. The article by J. D. Godino and colleagues deals with the importance of the teacher's analysis of the teaching-learning situations as a teaching competence. The article presents the tools derived from the *Mathematical-Teaching Knowledge and Competences* model as a scheme for analysis that trainee teachers can use when they are learnt to describe and assess learning situations in mathematics. In the third article, A. Bohórquez and B. D'Amore focus on trainee teachers and the conditions that may explain changes in conceptions of management of the teaching and learning process. Aspects such as group work, mathematics activity in the classroom and objectivation theory are considered.

These three articles underline the need for initial teacher training programmes to offer trainee teachers contexts that allow them to look more closely into the nature of class interactions, and theoretical tools (schemes of analysis and specific knowledge) which will enable them to give meaning to teaching and learning processes in mathematics in order to assess and act on them. The results of the research highlight the *professional learner profile of the teacher* (learning to use specialised knowledge to give meaning to teaching and learning situations in which teachers need to act).

L. Brown, T. Helliwell and A. Coles from the University of Bristol (UK) are the authors of the final article of the special issue. It deals with the transition of mathematics teachers when they become teacher trainers. The authors adopt a vital historical perspective to describe the transitions, which are explained from an enactive approach and the characteristics of meta-communication. The theoretical approach to understanding the process of becoming a teacher trainer in mathematics underlines the interaction between the individual and the environment.

The three areas covered in this special issue (teacher knowledge, teaching competences and becoming a teacher trainer in mathematics) offer theoretical references and ways of explaining aspects of the practice of mathematics teaching, and knowledge acquisition by the mathematics teacher and by the teacher trainer. Seen together, these articles show how the different lines of research lead to knowledge that allows us to increase our understanding of mathematics teacher training as an area of scientific research, opening up new paths to promote the relationship between theory and practice, and between research and teacher training.

Conocimiento, competencia docente del profesor de matemáticas y llegar a ser un formador de profesores

Salvador Llinares, Universidad de Alicante (España)

El número monográfico *Conocimiento, competencia docente del profesor de matemáticas y llegar a ser un formador de profesores*, da continuidad a monográficos recientes en revistas internacionales del área centrados en la temática del profesor de matemáticas, su práctica, aprendizaje y desarrollo profesional. En *Journal of Mathematics Teacher Education*, por ejemplo, tenemos *Video as a catalyst for mathematics teacher' professional growth*, 2017, 20(5) y *Mathematics teachers as partners in task design*, 2016, 19(2-3). En *ZDM*, tenemos *Impact of university teacher education programs on teacher change and mathematics teaching practice*, 2017, 49(2) y *Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers*, 2013, 45(4). Esta serie de monográficos señala focos y perspectivas sobre el profesor de matemáticas que centran la atención de investigadores y formadores de profesores en cuestiones centradas en y sobre el profesor de matemáticas, su práctica y sobre los procesos formativos.

Las investigaciones sobre el profesor de matemáticas están vinculadas a la necesidad reconocida en diferentes ámbitos por comprender mejor el papel del profesor en las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y sus procesos de aprendizaje y desarrollo profesional. Las aproximaciones a esta problemática y los focos de atención que los investigadores hemos planteado muestran una diversidad conceptual y metodológica que hace entrever la complejidad de los fenómenos estudiados. El actual número monográfico recoge iniciativas internacionales que reflejan parte de las aproximaciones conceptuales que se están desarrollando en relación al conocimiento, práctica y aprendizaje del profesor de matemáticas.

Este número monográfico está formado por seis artículos, de los cuales tres proceden de Colombia/Italia, Singapur y Reino Unido, y otros tres de grupos de investigación en España (Barcelona/Granada/con colaboración de Chile, Alicante/Sevilla y Huelva). Estos artículos presentan tres temáticas relevantes en estos momentos en las investigaciones en y sobre el profesor de matemáticas: conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas, conceptualización y desarrollo de competencias docentes mediante la instrumentalización del conocimiento y la generación de perspectivas teóricas para explicar y comprender el proceso de llegar a ser formador de profesores de matemáticas.

Los artículos de M. Á. Montes, L. C. Contreras y J. Carrillo (Universidad de Huelva, España) y de B. H. Choy y J. Dindyal (NIE-Nanyang Technological University, Singapur) estudian la práctica del profesor de matemáticas y los rasgos del conocimiento movilizado en las situaciones de enseñanza-aprendizaje, con atención al conocimiento especializado del profesor de matemáticas vinculado a la práctica de enseñar matemáticas.

M. Á. Montes y sus colegas subrayan el potencial del modelo *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK) para dar cuenta de las características del conocimiento del profesor movilizado en las situaciones de enseñanza. Destaca la relevancia del papel que pueden desempeñar algunos conceptos matemáticos (en el artículo el concepto de infinito) como articuladores del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. El artículo de B. H. Choy y J. Dindyal subraya el uso que el profesor hace de su conocimiento para modificar ejemplos y problemas en la enseñanza y así maximizar las oportunidades de aprendizaje de sus estudiantes *(bianshi)* como un aspecto de la práctica de enseñar matemáticas. Destaca la competencia del profesor en reconocer y aprovechar las variaciones de los problemas típicos como una manifestación del uso del conocimiento especializado en la enseñanza. Estos dos artículos ponen de relieve dos características del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: el papel organizador para el conocimiento del profesor de conceptos ("big ideas") y el conocimiento que permite variar problemas típicos ("bianshi").

Los artículos de C. Fernández, G. Sánchez-matamoros, J. Valls y M. L. Callejo (Universidad de Alicante y Sevilla, España); J. D. Godino, B. Giacomone (Universidad de Granada), V. Font (Universidad de Barcelona) y L. Pino-Fan (Universidad de los Lagos, Chile) y el de Á. Bohórquez (Universidad Distrital, Colombia) y B. D'Amore (Universidad de Bolonia, Italia) se centran en el aprendizaje del conocimiento y desarrollo de competencias docentes del profesor de matemáticas y se sitúan en el contexto de la formación inicial. Estos tres artículos subrayan las características de la instrumentalización del conocimiento del profesor teniendo en cuenta el papel desempeñado por las herramientas teóricas (conocimiento y esquemas de análisis) en el desarrollo de las competencias docentes del profesor de matemáticas.

El artículo de C. Fernández y sus colegas sintetiza resultados de investigaciones realizadas en los últimos años en su grupo, sobre la conceptualización de la destreza "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este artículo se subraya el papel de los indicadores del desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" en la definición de los contextos de formación. El artículo de J. D. Godino y sus colegas incide en la relevancia de la competencia docente de análisis de las situaciones de enseñanza del profesor. Su artículo presenta herramientas derivadas del modelo del *Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas* (CCDM) como un esquema de análisis que los estudiantes para profesor pueden usar para aprender a describir y valorar situaciones de enseñanza de las matemáticas. Á. Bohórquez y B. D'Amore en el tercer artículo, centrado en el aprendizaje de los estudiantes para profesor, identifican condiciones que pueden explicar el cambio en las concepciones sobre la gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje. Se consideran el significado del trabajo en grupo, el de la actividad matemática en el aula y la teoría de la objetivación.

Estos tres artículos subrayan la necesidad de que los programas de formación inicial de profesores proporcionen a los estudiantes para profesor contextos que permitan incidir en las concepciones sobre la naturaleza de las interacciones en clase, y herramientas teóricas (esquemas de análisis y conocimiento específico) que permitan dotar de significado a las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para valorarlas y actuar. Los resultados de las investigaciones presentadas subrayan el carácter *profesional del aprendizaje del profesor* (aprender a usar conocimiento especializado para dotar de sentido a las situaciones de enseñanza y aprendizaje donde el profesor debe actuar).

L. Brown, T. Helliwell y A. Coles de la Universidad de Bristol (Reino Unido) firman el último artículo. Se tratan las transiciones del profesor de matemáticas cuando se convierte en formador de profesores de matemáticas. Los autores adoptan una perspectiva de historia vital para describir las transiciones que son explicadas desde el enactivismo y las características de la meta-comunicación (comunicación sobre la comunicación). La aproximación teórica para comprender el proceso de llegar a ser formador de profesores de matemáticas subraya la interacción entre individuo y entorno.

Los tres temas que abordan los artículos en este número monográfico (conocimiento del profesor, competencia docente y llegar a ser un formador de profesores de matemáticas) proporcionan referencias teóricas y formas de explicar aspectos de la práctica de enseñar matemáticas y del aprendizaje del profesor y del formador de profesores. Mirados globalmente, estos artículos muestran cómo las distintas líneas de investigación proporcionan conocimiento que nos permite avanzar en nuestra comprensión de la formación de profesores de matemáticas como un ámbito de investigación científica, abriendo cauces que potencian la comunicación entre teoría y práctica, y entre investigación y formación de profesores.

Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor

Miguel Montes, Universidad de Huelva (España)

Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva (España)

José Carrillo, Universidad de Huelva (España)

Recibido el 5 de diciembre de 2017; aceptado el 21 de marzo de 2018

***Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe?* Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor**

Resumen

Este artículo muestra una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en situaciones relacionadas con contextos escolares de Primaria y Secundaria en la que la propia situación exige movilizar conocimiento relativo a elementos no presentes en el currículo de la etapa, en particular, relativo al concepto de infinito. Para ello, a través del potencial analítico que brinda el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, se ponen de relieve la complejidad, coherencia y multidimensionalidad del conocimiento de dos profesores gestionando situaciones en las que este concepto adopta un papel relevante.

Palabras clave: Conocimiento profesional; infinito; MTSK; currículo.

***Teacher, which is the biggest number?* Transcending school curriculum in the exploration of teachers' specialized knowledge**

Abstract

This paper shows an approach to the professional knowledge of mathematics teachers in school-related situations in the context of Primary and Secondary school. In these situations, the use of knowledge of some mathematical elements that are not present in the syllabus is required, in particular, the notion of infinity. Through the analytical potential of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge Model, we highlight the complexity, coherence and multidimensionality of the knowledge of two teachers when dealing with situations in which infinity has a relevant role.

Keywords: Professional knowledge; infinity; MTSK; curriculum.

Professeur, quel est le plus grand nombre qui existe? Transcender le curriculum dans l'exploration des connaissances spécialisées de l'enseignant

Resumé

Cet article montre une approche de la connaissance professionnelle de l'enseignant de mathématiques dans des situations liées aux contextes primaires et secondaires où la situation elle-même nécessite de mobiliser des connaissances liées à des éléments non présents dans le programme de la scène, en particulier l'infini. Pour cela, à travers le potentiel analytique du Modèle de Connaissances Spécialisées du Professeur de Mathématiques, la complexité, cohérence et

Para citar: Montes, M. A.; Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2018). Maestro, ¿Cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor. *Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 13, 5 - 20.*

multidimensionnalité des connaissances de deux professeurs sont mises en évidence en gérant situations dans lesquelles ce concept adopte un rôle pertinent.

Paroles clés: Connaissance professionnelle; infini; MTSK; curriculum.

***Professor*, qual é o maior número que existe? Transcendendo o currículo na exploração do conhecimento especializado do professor**

Resumo

Este texto mostra uma aproximação ao conhecimento do professor de matemática em situações relacionadas com contextos escolares da Educação Básica e do Ensino Secundário em que a própria situação exige mobilizar conhecimentos relativos a elementos que não fazem parte do currículo da etapa específica, em particular o conceito de infinito. Com esse intuito, através do potencial analítico que nos oferece o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, salientam-se a complexidade, coerência e multidimensionalidade do conhecimento do professor na gestão de situações em que este conceito assume um papel central.

Palavras chave: Conhecimento profissional, infinito, MTSK, currículo.

1. Introducción

Una pregunta que puede encontrarse habitualmente en un aula de Educación Primaria es: “Maestro/a, ¿cuál es el número más grande que existe?”. Esa pregunta, que algunos niños formulan de forma ingenua, plantea al profesor el reto de abordar la infinitud de los números naturales, sin que el concepto de infinito esté presente en el currículum de Educación Primaria (RD 126/2014), al menos de forma explícita. En la Educación Secundaria Obligatoria, el concepto de infinito tampoco es explícito, si bien se hace referencia a él en conceptos que aparecen en el currículum español, como el límite *infinito* en un punto, o las expresiones decimales *infinitas* periódicas.

Esta situación, en la que la idea de infinito está presente en el currículum relacionada con el desarrollo decimal de los números racionales, se comienza a trabajar en el tercer ciclo de la Educación Primaria, y se continúa en la Educación Secundaria. En esta etapa los estudiantes abordan la relación entre las expresiones de los números como ratio y como decimal. Así, comprueban cómo algunas divisiones entre números enteros (entendiendo la fracción en su contexto de división) no tienen una expresión entera y abordan la obtención del cociente con los “números con coma”, extendiendo su comprensión del sistema de numeración decimal con expresiones que permiten mostrar una cantidad menor que la unidad. Esta cuestión puede abordarse desde la comprensión de los elementos del sistema decimal, siempre y cuando las expresiones sean finitas. La primera solución que se suele aportar con la expresión periódica de 1/3 resuelve aparentemente el problema, pues permite expresar una cantidad que se comprende y maneja con frecuencia y que se diferencia de 0,3. Tampoco 2/3 suele ser un conflicto, y los estudiantes admiten la identidad 2/3 = $0,\widehat{6}$. Sin embargo, el conflicto emerge cuando el profesor intenta hacer comprender que, por las mismas razones empíricas y racionales anteriores, $0,\widehat{9}$ = 1. La igualdad aquí se torna una aproximación para los estudiantes, cambiando su sentido de operacional a relacional (Filloy, Rojano & Solares, 2003). Nos referimos no solo a los estudiantes de Primaria, donde el profesor podría abordar algebraicamente esta cuestión justificando la respuesta a través de los algoritmos que transforman la expresión decimal de un número decimal en su expresión como fracción; también muchos estudiantes de Secundaria y Bachillerato afirman que es casi uno, pero no llega, sin justificar su argumentación (Yopp, Burroughs & Lindaman, 2011). Además, las estrategias que el profesor puede emplear para convencer a sus estudiantes de la identidad son las mismas que sirven de soporte para justificar el algoritmo transformador mencionado más arriba. Estas son adecuadas para los estudiantes de Secundaria y Bachillerato por el uso de herramientas algebraicas, pero no suelen ser suficientes a pesar de su poder argumental y transparencia.

Todo lo anterior nos lleva a reflexionar sobre las características del conocimiento de un profesor (de Primaria, Secundaria o Bachillerato, dependiendo de la profundidad y extensión con que abordemos la situación planteada). Este conocimiento, ligado intrínsecamente a la profesionalización docente, trasciende el conocimiento matemático y adopta un carácter especializado. Dicho carácter se lo otorga la confluencia del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático, confluencia que se da en contextos de enseñanza y aprendizaje. Se trata de un conocimiento que permite al profesor adoptar con sentido decisiones curriculares (qué es esperable poder abordar y qué no sobre la noción de infinito en una determinada etapa educativa), así como decisiones sobre su gestión en el aula (dadas las dificultades esperables en los estudiantes, qué estrategias o herramientas matemáticas pueden/deben utilizarse, qué recursos didácticos tienen un potencial específico para ello).

Por otro lado, la noción de infinito ha centrado la atención de diversos investigadores en Educación Matemática, que han perseguido explorar y profundizar el aprendizaje del concepto, centrándose en los procesos cognitivos asociados a su construcción por parte de los alumnos. El papel del profesor ha tendido a ser el de informante con un nivel de conocimiento esperado más avanzado (e.g. Yopp et al., 2011), si bien en los últimos años se ha propuesto estudiar el conocimiento que el profesor puede/debe poseer para gestionar la enseñanza de conceptos que pueden involucrar al infinito (Montes & Carrillo, 2017; Zazkis & Mamolo, 2016).

En este artículo abordamos el hecho de que el conocimiento profesional de la matemática escolar debe trascender los elementos curriculares explícitos en el currículo de la etapa, abarcando también los elementos matemáticos estructuradores de la misma. Mostramos cómo esta comprensión profesional, desarrollada desde la base de un conocimiento especializado, incluye dimensiones de índole matemático y didáctico del contenido a abordar. Para ello, nos basamos en la modelización propuesta desde el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas –MTSK (Carrillo, Montes, Contreras & Climent, 2017). Planteamos el objetivo de mostrar cómo el conocimiento de un concepto como el infinito, que no es explícito en los currículos de Primaria ni Secundaria, se necesita para que el profesor gestione situaciones de aula. Recurrimos a cuatro episodios significativamente distintos. El primero surge en un aula de Primaria donde un maestro gestiona la pregunta que da inicio al artículo. El segundo y el tercero son extractos de una discusión en una entrevista con un profesor de Secundaria, sobre la naturaleza matemática de la igualdad $5.\widehat{9}=6$ y de la suma de series, en cuanto a aproximaciones metodológicas útiles para un aula. El cuarto es un extracto de una discusión de la definición de infinito con el mismo profesor.

2. Referentes teóricos

Tomamos dos ejes vertebradores: el conocimiento del profesor de matemáticas, modelizado desde la perspectiva de Carrillo et al. (2017) y los trabajos sobre el concepto de infinito. Haremos un recorrido por elementos de conocimiento del profesor, centrándonos en el modelo analítico MTSK, de utilidad para discutir el conocimiento involucrado en la gestión de una situación en la que el infinito esté inmerso. Se verá cómo este concepto está implícito en los currículos de Primaria y

Secundaria y se revisará la investigación en el conocimiento del profesor sobre el infinito.

2.1 Conocimiento del profesor de Matemáticas

El conocimiento profesional del profesor de matemáticas, y la generación de marcos teóricos para investigar con y sobre los profesores ha sido uno de los intereses centrales de la investigación en educación matemática en los últimos años (Skott, Van Zoest & Gellert, 2013). En pos de generar un modelo que amplíe la perspectiva sobre la especialización desde una caracterización extrínseca a una intrínseca (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo & Pino-Fan, 2017), durante los últimos años, se ha avanzado en la conceptualización de un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), que considera que la especialización del conocimiento del profesor radica en su uso en contextos profesionales (Carrillo et al., 2017). Una primera implicación de este posicionamiento es que la aproximación al conocimiento especializado del profesor de matemáticas debe considerar no solo la actividad de aula, sino también cualquier actividad relacionada con su profesión, como la preparación de clases, discusión y reflexión sobre las mismas, procesos de evaluación, etc.

El modelo analítico de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas contempla la noción de Conocimiento Didáctico del Contenido -PCK (Shulman, 1986; Ball, Thames & Phelps, 2008), dominio que abarca conocimiento organizado en tres subdominios: el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), con el conocimiento sobre expectativas de aprendizaje, desarrollo conceptual o procedimental esperado en un nivel educativo y sobre secuenciación de contenidos (relativo a la organización y distribución de los diferentes temas); el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), con el conocimiento sobre fortalezas y dificultades de los estudiantes ante un contenido concreto, formas de interacción con un contenido matemático, teorías personales o formales acerca del aprendizaje y sobre intereses y expectativas de los estudiantes; y el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), con el conocimiento sobre teorías personales o formales de enseñanza, potencialidades y limitaciones de recursos materiales y virtuales para abordar un determinado contenido y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos susceptibles de ser utilizados en la enseñanza de un contenido concreto.

Este modelo, siguiendo la dicotomía propuesta por Shulman (1986), abarca también el conocimiento de la materia, concretado en conocimiento matemático (MK), como el conocimiento disciplinar que permite al profesor gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Este dominio de conocimiento matemático abarca la comprensión de la matemática que un profesor pueda tener: local, ligada a temas concretos; estructural, en el sentido de relaciones entre temas; y sintáctica (Schwab, 1978), ligada a formas de generar matemáticas. Con la mirada puesta en la situación planteada en la introducción, relativa a la igualdad $0,\widehat{9} = 1$, este dominio está compuesto por el Conocimiento de los Temas (KoT), ligado al conocimiento de tipo local, que en dicha situación permite identificar, entre otros, el conocimiento de: la división entera (no exacta, como uno de los contextos o fenómenos en los que emergen las fracciones), las fracciones, los decimales (como medio para expresar los cocientes de las divisiones anteriores y como ampliación del Sistema de Numeración Decimal para números no enteros y como registros de representación de estos números), los tipos de desarrollo decimal de un número racional, los algoritmos o procedimientos que permiten transformar la expresión decimal de un número en su expresión fraccionaria (y sus fundamentos), la existencia de números "decimales" que no pueden expresarse como fracciones, las justificaciones de ese hecho o densidad del conjunto Q en R (lo que supone una complejización de la situación matemática implicada). Dentro del dominio del conocimiento matemático hay también el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM), que se plasma en el establecimiento de conexiones (de simplificación, complejización, transversales o auxiliares) entre elementos matemáticos, permitiendo al profesor comprender una matemática avanzada desde una perspectiva elemental o viceversa, lo que genera la posibilidad de tomar la decisión de hacer explícitas al alumno, o no, dichas conexiones (Bass, 2017). Finalmente, ligado al conocimiento sintáctico, observamos la posibilidad de explorar el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM), en el sentido, por ejemplo, de los significados del signo matemático =, que en los procesos de construcción de conocimiento matemático puede tener diferentes acepciones (Vermeulen & Meyer, 2017), así como de elementos de la heurística ligada a la resolución de problemas, es decir, el conocimiento de los elementos propios de la construcción de conocimiento matemático.

El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas asume, en la línea de Ponte (1994), que el conocimiento del profesor es complejo y dinámico, lo cual implica que, si bien como modelo analítico MTSK permite una primera aproximación al conocimiento del profesor en términos de qué subdominios de conocimiento se movilizan, el análisis ulterior de los elementos de conocimiento movilizado será de forma integradora, buscando las relaciones entre los tipos de conocimiento. Este conocimiento también es tácito (Ponte, 1994), lo que implica que con la observación de la práctica de aula podemos obtener indicios (Flores, Escudero & Aguilar, 2013) que inviten a una exploración a través de aproximaciones metodológicas complementarias a dicha observación. En el caso del concepto de infinito, que no suele explicitarse en las aulas, estas aproximaciones metodológicas complementarias son fundamentales (Montes, 2015), por ejemplo, a través de la discusión de viñetas (Montes & Carrillo, 2017). El MTSK incluye también un dominio de creencias y concepciones sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje. Este dominio interactúa de forma bidireccional con los dominios ya mencionados, de modo que se influyen mutuamente. Asumimos que creencias y concepciones pueden dar explicación de elementos de conocimiento evidenciados por el profesor, y viceversa. El estudio del dominio de creencias y concepciones se realiza sobre la base de Carrillo y Conteras (1995), donde se diferencian las concepciones instrumentalista, platónica y dinámica o de resolución de problemas en relación con la matemática, y las tendencias tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.2 Infinito

A pesar de que el infinito no aparece explícito en el currículo español, una lectura detallada muestra cómo este concepto subyace a diferentes conceptos matemáticos. En Educación Primaria (R.D. 126/2014), aparecen la equivalencia de fracciones, las posiciones relativas de rectas (especialmente el paralelismo), o la medida del tiempo (especialmente el ciclo de las estaciones, donde el proceso es periódico). En Educación Secundaria Obligatoria (R.D. 1105/2014), la diferenciación entre decimales finitos e infinitos, la diferenciación entre conjuntos numéricos, el trabajo con sucesiones numéricas y el estudio de funciones tienen como trasfondo la infinitud de los conjuntos (cifras decimales o elementos de la sucesión, respectivamente), o la densidad del conjunto en el que se trabaja.

El infinito, como objeto matemático, tiene una naturaleza transversal a la matemática escolar, apareciendo como idea que dota de sentido a diferentes conceptos. Kuntze et al. (2011) identifican al infinito como "gran idea", esto es, una noción que estructura la matemática y permite fomentar la dotación de sentido de las nociones escolares, así como los procesos de construcción de conocimiento matemático. Estas 'grandes ideas', en general, se asume que pueden fomentar en los profesores los procesos de reflexión que llevarán a diseñar y proponer tareas ricas que posibiliten la aparición y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje (Kuntze et al., 2011).

Las investigaciones que contemplan al infinito como concepto objeto de enseñanza y aprendizaje se han centrado en cómo el concepto ha sido aprendido a lo largo de la historia, por ejemplo, estudiando su génesis histórica en relación con los procesos de aprendizaje individuales (Moreno & Waldegg, 1991). Las investigaciones sobre el infinito focalizan recurrentemente los mismos temas: límites (Juter, 2008; Sierpinska, 1987), fracciones, especialmente la igualdad $0.\hat{9}=1$ (Yopp et al., 2011) y paradojas matemáticas con el potencial de generar discusiones profundas sobre la naturaleza del concepto (Manfreda-Kolar & Hodnik-Cadeç, 2012).

En los últimos años, se han desarrollado investigaciones que ponen de relieve la necesidad de estudiar conceptos subyacentes a los explícitos en la matemática escolar, entre ellos el infinito (Kattou et al., 2009; Kuntze et al., 2011; Montes & Carrillo, 2017; Zazkis & Mamolo, 2016;). En Liñán, Montes y Contreras (2015), se muestra cómo una maestra de 5º curso de Educación Primaria gestiona una sesión donde explica las posiciones relativas entre rectas. En esa sesión emerge la noción de infinitud de la recta, a través de la definición como línea de puntos sin curvas ni ángulos que no tiene principio ni fin, y la densidad de la recta, al comparar segmento y recta y discutir la definición de segmento y "los infinitos puntos que hay entre los dos extremos".

En el siguiente apartado analizaremos los cuatro ejemplos anteriormente indicados. Buscamos no solo mostrar la utilidad y necesidad del conocimiento del infinito para gestionar la construcción de conocimiento matemático, sino también las conexiones que entre diversas situaciones se establecen a través de la presencia del infinito.

3. El infinito y el profesor: cuatro ejemplos

Ciertas situaciones de enseñanza y aprendizaje en el aula llevan a reflexionar acerca de aspectos curriculares y sobre el conocimiento del profesor que las ha de gestionar. Los tres primeros ejemplos de esta sección ilustran situaciones de uso o reflexión en torno a conceptos matemáticos que aparecen en etapas distintas de la escolarización en España. El primer ejemplo es una discusión entre un niño de 10 años y su maestro a raíz de la inquietud por la existencia de un número mayor que cualquier otro. El segundo ejemplo es una entrevista de un profesor de Secundaria discutiendo sobre la igualdad de $5.\hat{9}$ y 6, tras haber tratado ese mismo día los números periódicos en una clase de segundo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). El tercero corresponde a otro momento de entrevista con el segundo profesor, donde se le pregunta cómo trata la convergencia de la progresión. Estos tres ejemplos permitirán evidenciar cómo la necesidad de un conocimiento profundo del contenido que es objeto explícito de enseñanza y aprendizaje requiere del conocimiento de un elemento implícito como es el infinito. El cuarto ejemplo indica cómo las concepciones del profesor acerca de las matemáticas y la percepción de su utilidad se relacionan de forma directa con su conocimiento y toma de decisiones.

3.1 Naturaleza infinita de los números

A: *Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe?*
P1: *¿Tú cuál crees que es?*
A: *¡Un millón!*
P1: *¿No hay ninguno más grande?*
A: *Creo que no…*
P1: *¿Y qué pasa si a ese número le sumas uno?*
A: *Un millón uno.*
P1: *¿Y puedes sumarle uno a ese?*
A: Sí. *Si sigo sumando, ¿los números no acaban?*

Este episodio muestra a un alumno (A) de cuarto de Primaria abordando elementos de la construcción de los conjuntos numéricos, en particular, de la comprensión de la naturaleza infinita del conjunto de números naturales. Para gestionar la cuestión del alumno, este profesor (P1), en diálogo con él, utiliza la mayéutica como estrategia de gestión de la construcción de conocimiento matemático (Monje, Gómez & Pérez-Tyteca, 2012). Esta estrategia revela un conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que permite inferir una concepción de la enseñanza ligada a un estilo investigativo. Al invitar al alumno a concretar un número, asumimos que P1 es consciente de que los alumnos en cuarto de Primaria deben ser capaces de comprender cualquier número natural. Dado el curso en que se encuentran (KMLS), el desarrollo que P1 promueve, buscando que el alumno desarrolle comprensión de la naturaleza infinita de los números naturales, puede ser consecuencia de que pretenda una comprensión conceptual profunda de un contenido curricular. En este caso, está haciendo una aproximación potencial a un contexto infinito (Moreno & Waldegg, 1991), permitiendo que el alumno pase de una concepción finitista de los conjuntos numéricos a una en la que el infinito tenga cabida (Sierpinska, 1987). Esto puede estar denotando un conocimiento (formal o informal) de características del aprendizaje de dichos contextos numéricos (KFLM).

Desde la perspectiva del conocimiento matemático de este profesor, al hacer uso del axioma de Peano que se basa en el principio de inducción, podemos inferir que posee conocimiento del tema ‘números’, en particular de propiedades y fundamentos de los números naturales. No sabemos cuán profundo o formal es su conocimiento acerca de las pruebas por inducción, pero parece claro que usa y conoce dicho esquema de prueba. Este conocimiento es de tipo sintáctico (KPM), ligado a la construcción de tipos de razonamiento matemático, concretado en la construcción de los números naturales.

Si bien el contenido explícito en este episodio es el relativo a números naturales, su gestión exige al profesor la movilización y uso de conocimiento relativo a un contenido matemático ausente del currículo de la etapa en la que enseña, como es el principio de inducción matemática, y en particular, del proceso infinito que éste sustenta.

3.2 Igualdad de números de periodo puro 9 y entero

E: *¿El* $5.\hat{9}$ *es igual a 6?*

P2: *Casi igual a 6.*
E: *Pero, ¿es igual?*
P2: *Sí.*
E: *Porque las fracciones son…*
P2: *Son iguales.*
E: *¿Y cuál es la distancia entre los dos, olvidando lo de las fracciones?*
P2: *¿La distancia? La distancia es tan pequeña, tan pequeña, ¿no?*
E: *Tan pequeña que…*
P2: *Que sí.*
E: *Que sí. Pero es pequeña, o sea, no es 0.*
P2: *Ínfima.*
E: *Y los alumnos, ¿crees que ellos serían capaces de entender la relación entre ambos?*
P2: *No. Son números que se escriben diferente, aunque la fracción generatriz les lleve a que los dos números son equivalentes. Les generaría mucho conflicto, por eso creo que no lo trabajaré en la próxima clase.*

(Extraído de Montes, 2015, p.164)

P2, el profesor de este episodio, es incitado por el entrevistador (E) a reflexionar sobre un ejemplo que emergió en una clase suya la semana anterior, donde trató la cuestión de la fracción generatriz de un número periódico, dejando abierta la discusión de la igualdad $5,\hat{9}= 6$. Entendemos que, al ser un contenido previamente tratado en clase, este profesor es consciente de la presencia en el currículo tanto de las fracciones como de las relaciones entre fracción y número decimal (KMLS). P2, asimismo, posee conocimiento acerca de las características del aprendizaje matemático (KFLM), asociado a la situación concreta. Parece ser un conocimiento informalmente construido, que le lleva a pensar que dicha igualdad generaría conflicto y a tomar una decisión sobre no abordar la situación en siguientes clases. Resulta llamativa la articulación entre el conocimiento de las características de aprendizaje (KFLM) de este profesor y su conocimiento acerca del tema (KoT) que trata. P2 afirma que a los alumnos "les generaría mucho conflicto" la "equivalencia" entre ambos números. Es interesante el uso de la palabra equivalencia, frente al más común de la palabra igualdad. Dicho uso se explica posiblemente por el conflicto que P2 parece experimentar al tratar la relación entre $5.\hat{9}$ y 6. En un primer momento, P2 establece la igualdad entre ambos números, posiblemente basándose en el uso de la fracción generatriz y denotando un conocimiento de procedimientos asociados a las fracciones. Sin embargo, al ser invitado a tratar la igualdad entre dos números como la distancia entre ambos, este profesor rehúye afirmar que la distancia es cero, usando la palabra "ínfima", como una forma de expresar que la diferencia tiene un carácter no nulo, pero denotando una naturaleza infinitesimal. Esto induce a pensar que P2 comprende de manera potencial (Moreno & Waldegg, 1991) la naturaleza infinita de las cifras decimales periódicas de $5.\hat{9}$. Así, el conocimiento del profesor de un elemento matemático que no se trata de forma explícita en la formación inicial, el infinito, tiene un reflejo en su comprensión de los elementos curriculares que debe abordar en su aula.

La posibilidad de plantear la ordenación de fracciones y números a través de su distancia en la recta numérica es una opción metodológica respecto de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que el profesor conoce y parece descartar, independientemente de su potencial de cara a la comprensión de la situación (Rothery & Flores-Peñafiel, 2014), ya que explicita la conexión entre contenidos matemáticos de aritmética y de medida. Dicha conexión interconceptual entre aritmética de fracciones y medida, que el profesor parece establecer (aunque sería coherente tratar la igualdad como tal en ambos contextos), denota un conocimiento de la estructura matemática (KSM), en la que la naturaleza infinita de las cifras decimales del desarrollo de la fracción genera un conflicto para el profesor. El conflicto se genera al dotar el profesor de diferentes significados a la idea de igualdad, tratándola de forma dual: aproximación e identidad. Este conocimiento es una plasmación, sobre el contenido matemático, de un elemento sintáctico y transversal al quehacer matemático como es la idea de igualdad y su polisemia (Vermeulen & Meyer, 2017), denotando conocimiento sobre la práctica matemática (KPM).

La percepción de P2 de la naturaleza infinita de los decimales de un número periódico puro, en particular en el caso del $0.\hat{9}$, condiciona todo su conocimiento acerca de la situación, y, por ende, su gestión como profesor de la misma. De nuevo, observamos que la forma en que un profesor conoce un contenido no presente en el currículo, como es el infinito, condiciona el aprendizaje de sus estudiantes.

3.3 Aproximación metodológica a la suma de series

E: *¿Cómo explicarías que la suma de sucesivas potencias de 1/2 es finita?*
P2: *Con trocitos de papel.*
E: *¿Trocitos de papel?*
P2: *O una lupa. Con un aumento que nunca puede pasar uno.*
E: *¿Cómo? Explícame más el ejemplo, porque no lo veo claro.*
P2: *Por ejemplo, dices que empezamos en 1/2, ¿no? Por ejemplo, medio metro.*
E: *El principio, el primer paso es de medio metro, vale.*
P2: *Vale. De medio metro, coger un metro, coger un metro y coger medio metro de papel y ponerlo, y después otro medio, y otro cuarto, y otro medio* [del cuarto], *otro medio* [del anterior], *otro medio* [ídem]*... Y hacerles ver que ampliando eso ¿vale? Que ampliando ese trozo que queda, te lo puedes llevar también a un metro. ¿Vale? Haces la comparativa de que el trozo que queda vuelve a ser un metro. La mitad, la mitad, así una y otra vez, vuelve a ser un metro, un metro y que nunca pasa de ahí. ¿Vale?* [recrea el proceso con sucesivas mitades de trozos de papel]
E: *¿Y cuánto da la suma entonces?*
P2: *Si usas la fórmula para las progresiones, es 1.*
E: *Y de la forma que tú lo haces, ¿con los trocitos de papel?*
P2: *Pues vemos que vamos acercándonos a 1, y si nos imaginamos que seguimos infinitas veces, pues llegamos casi casi a dos.*
E: *Casi, casi, pero no llega, ¿no?*
P2: *No, no llega a llegar, pero está infinitamente cerca.*

(Extraído de Montes, 2015, p.146)

Este episodio es parte de la entrevista a P2 sobre aproximaciones metodológicas a la suma de las infinitas potencias de 1/2. Resulta interesante cómo, en un contexto matemáticamente diferente al anterior, si bien relacionados por la aparición del infinito en ambos, P2 interactúa con el problema de una manera similar a la anterior. Encontramos dos partes diferenciadas, la primera, ligada a cómo abordar la suma de la progresión, y la segunda relativa al resultado de la misma.

Si observamos esta segunda parte, podemos ver que P2 conoce un procedimiento (‘la fórmula’) para calcular la suma de una progresión, mostrando conocimiento del tema (KoT). Asimismo, es coherente con la convergencia de la sucesión que plantea arriba en un registro de representación gráfico recreado a través del cortado de papel. Es interesante cómo, a través del uso de múltiples representaciones (Dreher & Kuntze, 2015), podemos profundizar en la coherencia del conocimiento del profesor respecto a la situación. Vemos que, en un registro algebraico, el profesor acepta como válido el resultado de la suma como 1, mientras que cuando el registro pasa al gráfico, donde se pone en juego la comprensión del proceso infinito, P2 moviliza una visión potencial del infinito en dicho proceso. Al explicitar P2 ambas sumas, llega a resultados que hacen pensar en cierta contradicción: en el registro algebraico la suma es 1, y en el gráfico 'no llega a serlo'. Si bien P2 conoce ambos registros, ergo muestra conocimiento del tema (KoT), o bien no conecta ambas representaciones, o bien asume que la misma serie puede tener dos comportamientos dependiendo del registro en que se trabaje. El conocimiento, o desconocimiento en este caso, de este tipo de conexión interconceptual, también responde a un (des)conocimiento ligado al tema (KoT). P2 demuestra coherencia con el episodio anterior en el tratamiento de la convergencia (cuando el entrevistador le invita a trabajar desde la perspectiva de la medida), al expresarse en este caso en términos de distancia (e.g. 'llegamos casi casi a dos'), de forma que, en el caso de haber explorado dicha conexión, posiblemente se hubieran podido obtener indicios de conocimiento de una conexión interconceptual a través del conocimiento del infinito, denotando conocimiento de la estructura matemática (KSM). De nuevo, el uso que hace de la idea de igualdad denota conocimiento de la práctica matemática (KPM).

Primero el profesor explicita una aproximación metodológica, basada en el cortado de papel, que le permitiría abordar la suma de series, mostrando conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), intrínsecamente relacionado con la situación a discutir. Es interesante la estrecha relación de la estrategia del profesor ante la suma de series, estableciendo con cada corte la comparación de la suma parcial con el total de la suma, induciendo la idea de convergencia hacia ese punto del que "nunca pasa". Al describir la estrategia, el profesor se expresa en términos de "hacerles ver", recreando en su argumentación la imagen del concepto (Tall & Vinner, 1981) que desea construir en sus estudiantes, evidenciando conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), intrínsecamente ligado a la generación de imágenes mentales sobre los procesos infinitos. Esta construcción de imágenes mentales estará íntimamente relacionada con la forma en que el profesor conozca los procesos infinitos. En particular, en la discusión sobre la convergencia de la suma, P2 parece mostrar un conocimiento del infinito potencial, por lo que no resulta extraño que la imagen del concepto que pretende potenciar en sus estudiantes tenga las mismas características.

Observamos de nuevo un momento del episodio donde, si el contenido se aborda con una perspectiva no algebricista, sino incidiendo en los fundamentos epistemológicos del concepto, el infinito cobra relevancia como parte del conocimiento del profesor. Vemos por tanto que dicho conocimiento fundamenta parte de la toma de decisiones en el diseño de la estrategia de enseñanza, dando sentido a la interconexión de los diferentes subdominios de conocimiento especializado.

3.4 Discusión explícita sobre el infinito

E: *¿Qué es para ti el infinito?*

P2: *Para mí hay una frase que lo define, "la creación del hombre para explicar lo inexplicable". Esa definición la uso con mis alumnos, para que vean que es algo artificial y abstracto que en matemáticas usamos, pero que no van a encontrarse luego en el día a día, y que a nivel práctico no tiene utilidad, porque no puede comprobarse empíricamente.*

E: *¿Es por eso que evitas algunas cosas, como lo del* $5.\widehat{9}$*?*

P2: *Claro, a ver…las matemáticas son una ciencia que sirve, sobre todo, para usarse en otras ciencias. Y al final lo que necesitas es usar la fórmula bien, aunque comprendas la situación. Por eso meterme a hablar del infinito, además de confundirles, es algo que para ellos no va a ser útil.*

(Extraído de Montes, 2015, p.187)

En este episodio observamos indicios que permiten poner de relieve la interrelación de las creencias de P2 sobre el contenido, con las concepciones sobre la matemática y con decisiones sobre la forma de abordar determinados contenidos. La caracterización de las matemáticas según su utilidad, responde a una concepción instrumentalista (Ernest, 1989). La definición que P2 adopta del concepto es, por otro lado, ligada a una actitud intuitiva empírica (Sierpinska, 1987) hacia el infinito, donde lo relevante es la obtención de un resultado, evitando el planteamiento de cuestiones epistemológicas. Estas dos visiones de P2 de las matemáticas y del concepto de infinito son compatibles, ya que, desde una perspectiva de las matemáticas ligada a la aplicación en otras disciplinas, carece de sentido plantearse cuestiones ligadas a un nivel de abstracción que puede no parecer útil de cara a obtener resultados de problemas concretos.

Resulta relevante el hecho de que la percepción del profesor de ambos elementos (matemáticas e infinito), condicionan no solo la aproximación metodológica a la enseñanza del contenido matemático presente en el currículo, sino también el tipo de aprendizaje que este profesor fomenta en sus estudiantes. Esto muestra cómo las concepciones acerca de las matemáticas condicionan el conocimiento matemático del profesor (MK), así como su conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). Asimismo, su conocimiento parece llevar al profesor a generar unas expectativas de aprendizaje esperadas, haciendo una interpretación propia de los estándares de aprendizaje evaluables, en función del trabajo con fórmulas, ligado a lo procedimental, evitando la generación de una reflexión profunda a nivel conceptual. Esto supone que el profesor ha construido un conocimiento de estándares de aprendizaje matemáticos (KMLS), basado en la percepción de la matemática.

4. Discusión y reflexiones finales

Las investigaciones que abordan la caracterización del conocimiento del infinito son escasas, especialmente en relación con el (conocimiento del) profesor. En este trabajo mostramos que el profesor no solo requiere saber más que sus alumnos, debe conocer más en profundidad los conceptos matemáticos que enseña (Ma, 1999). Este conocimiento profundo de las matemáticas implica que la matemática que el profesor puede/debe conocer es diferente de la que se espera que el alumno conozca, no solo en cantidad, ni en profundidad, sino también en los objetos matemáticos involucrados.

Hemos visto cuatro ejemplos de situaciones relativas a contenidos incluidos en el currículo de Primaria, Secundaria, y Bachillerato, para cuya gestión es necesario movilizar conocimiento especializado de múltiples naturalezas. Más allá de reafirmar la naturaleza compleja del conocimiento del profesor de matemáticas (Ponte, 1994), estos ejemplos permiten evidenciar cómo dicha complejidad se articula, ligando la forma en que los profesores conocen los conceptos matemáticos con su forma de comprender elementos sintácticos, que les permiten relacionar esos conceptos con otros. Dicha articulación de la complejidad no solo se refiere al conocimiento matemático, sino también permite relacionar ese conocimiento matemático con el conocimiento didáctico del contenido a ser enseñado, en este artículo a través del conocimiento del profesor acerca del infinito. Aquí resulta relevante el hecho de que el concepto que nos permite comprender las características del conocimiento del profesor es el de infinito, concepto que no recibe atención directa en la escolarización, y que suele estar ausente de los programas de formación inicial de maestros. Observando el segundo, tercer y cuarto ejemplos, tenemos una muestra de que también podemos obtener evidencias del sentido de las acciones del profesor a través de su compresión del infinito. Esto se relaciona con la naturaleza de 'gran idea' (Kuntze et al., 2011) que posee el infinito en los procesos de educación matemática. Una mirada detallada y profunda a nociones de índole transversal como el infinito, o la proporcionalidad, permitirá explorar elementos que permiten comprender la complejidad del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En la línea de la exploración del conocimiento profesional acerca del infinito, entendemos que será útil conectar investigaciones de corte cognitivista, centradas en cómo se conoce el infinito (e.g. Belmonte & Sierra, 2011), con investigaciones acerca de las diferentes dimensiones de conocimiento profesional sobre el infinito que se movilizan en la actividad docente (Montes & Carrillo, 2017). Un enfoque de la enseñanza de las matemáticas con comprensión, con significado por parte de los estudiantes, ha de incluir el trabajo con ideas clave en el pensamiento matemático. Esto incluye las mencionadas 'grandes ideas', así como ideas que puedan considerarse precursoras de aquellas. Aunque trabajar con estas ideas no siempre puede realizarse de un modo directo o explícito (ni así lo recoge el currículo), un conocimiento del profesor de la expresión y la relación de estas ideas con diferentes temas matemáticos posibilita la creación de oportunidades de aprendizaje para sus estudiantes en las que se evidencien elementos esenciales de dichos temas, al tiempo que características de estas ideas, o aproximaciones a estas.

Estas reflexiones ayudan a proyectar una formación inicial (y continua) del profesorado en la que el conocimiento a construir es complejo, conectado internamente y compuesto por elementos propios del quehacer matemático. Este conocimiento del profesor debería dirigirse a y procurar que, en el nivel educativo correspondiente, los alumnos puedan construir una versión adecuada de esos elementos.

Referencias

Belmonte, J. L., & Sierra, M. (2010). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 139-171.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bass, H. (2017). Designing opportunities to learn mathematics theory-building practices. *Educational Studies in Mathematics, 95*(3), 229-244.

Carrillo, J., & Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación Matemática*, *7*(3), 79-92.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C., & Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *22*, 185-206.

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: the case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 89-114.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En P. Ernest, (Ed.), *Mathematics teaching*: *the state of the art* (pp. 249-254). Londres, Reino Unido: Falmer Press.

Filloy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2003). Two meanings of the 'equal' sign and senses of comparison and substitution methods. En N. Pateman et al. (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 223-230). Honululu, EEUU: PME.

Flores, E., Escudero, D. I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Juter, K. (2008). Students' concept development of limits. En D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2320-2329). Larnaca, Chipre: University of Cyprus.

Kattou, M., Michael, T., Kontoyianni, K., Christou, C., & Philippou, G. (2009). Teachers' perceptions about infinity: a process or an object. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1771-1780). Lyon, Francia: ERME.

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H. S., & Winbourne, P. (2011). Professional knowledge related to big ideas in mathematics. An empirical study with pre-service teachers. En M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2717-2726). Rzeszow, Polonia: ERME.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, EEUU: Lawrence Erlbaum.

Manfreda-Kolar, V., & Hodnik-Čadež, T. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389-412.

Liñán, M. M., Montes, M., & Contreras, L. C. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria. En C. Fernández, M. Molina & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, (pp. 335-342). Alicante: SEIEM.

Ministerio de Educación (2014). Real Decreto 126/2014, por el que se establece el currículo básico de la educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52,* 19349-19420.

Ministerio de Educación (2015). Real Decreto 1105/2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado, 3,* 169-546.

Monje, J., Gómez, B., & Pérez-Tyteca, P. (2012). El uso de la mayéutica en la transferencia del conocimiento matemático. El caso de una tarea de razón y proporción. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez & A. Maz (Eds.), *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la educación matemática 2012* (pp. 23-31). Valencia: SEIEM.

Montes, M. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso.* Saarbrücken, Alemania: Publicia.

Montes, M., & Carrillo, J. (2017). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. *Bolema, 31*(57), 114-134.

Moreno, L., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22*(5) 211-231.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 195-210). Lisboa, Portugal: PME.

Rothery, T. G., & Flores-Peñafiel, A. (2014). Orden y distancia de fracciones y decimales en la recta numérica: el caso de Abigaíl. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5,* 73-90.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L.R. (2017). What makes teacher knowledge specialised? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Schwab, J. J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury & N. J. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum, and liberal education. Selected essays* (pp. 229-272). Chicago, EEUU: University of Chicago Press (original de 1961).

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 371-397.

Skott, J., van Zoest, L., & Gellert, U. (2013). Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers. *ZDM, 45*(4), 501-505.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 21*(2), 136-147.

Yopp, D. A., Burroughs, E. A., & Lindaman, B. J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality .999…=1. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*, 304-318.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2016). On numbers: Concepts, operations and structure. En A. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The journey continues* (pp. 39-71). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Referencias de los autores

Miguel Montes, Universidad de Huelva (España), miguel.montes@ddcc.uhu.es

Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva (España), lcarlos@uhu.es

José Carrillo, Universidad de Huelva (España), carrillo@uhu.es

Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor

Miguel Montes, Universidad de Huelva

Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva

José Carrillo, Universidad de Huelva

In this paper, we consider primary and secondary teachers' professional knowledge. We take the widely accepted perspective of which areas of mathematics knowledge they should have in order to be able to manage the kinds of demands made upon this knowledge that tend to arise in the classroom. Such demands are usually circumscribed by the syllabus of the educational phase. Given a teaching content such as the concept of infinity, we demonstrate how this knowledge requires familiarity with out-of-syllabus areas and must go beyond these confines. Over the last 40 years, infinity has been the object of various studies into mathematics education as a concept for students to learn. It has been given central importance in school mathematics due to the strength of its cross-curricular nature. However, the concept has received scant attention from the perspective of the teacher. We consider four examples of reflections taken from interviews involving two teachers discussing contexts connected to four elements of mathematics: the infinite nature of numbers; the equality of $.\hat{9}$ and integers; the sum of series; and an explicit discussion of the nature of infinity. The interviews were analysed using *The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* framework (Carrillo, Montes, Contreras & Climent, 2017). Each example enables us to highlight the types of knowledge, both mathematical and pedagogical content, used by the two teachers in order to meet the demands of the situation as professionals of mathematics education. The analysis and subsequent discussion illustrate the complexity, coherence and multidimensionality of the knowledge the two teachers bring into play in each interview. We show how the teachers' knowledge of the concept can condition the kind of methodological approach in teaching-learning situations featuring infinity, and the kind of learning

they aim to promote. We conclude that teachers need to think deeply about the content for which they are responsible, and that this should involve thinking beyond the syllabus. As such, a significant implication for teacher-training courses is the need of structure around the mathematics that teachers should know, a requirement that is quantitatively and qualitatively different to that which the students should know. Consequently, we need to contemplate including in teacher-training programmes concepts like infinity that are otherwise outside the coverage of the primary syllabus, but necessary for a full understanding of it.

An approach to teach with variations: using typical problems

Ban Heng Choy, National Institute of Education, Nanyang Technological University (Singapore)

Jaguthsing Dindyal, National Institute of Education, Nanyang Technological University (Singapore)

Recibido el 2 de diciembre de 2017; aceptado el 27 de febrero de 2018

Una aproximación para enseñar con variaciones: usando problemas típicos

Resumen

Los profesores de matemáticas usan problemas típicos desde propuestas de exámenes anteriores y desde los libros de texto para desarrollar destrezas procedimentales. En este articulo, discutimos otros usos de los problemas típicos. Nos centramos en las oportunidades que un profesor experimentado, John, percibe en los problemas típicos y cómo los usa para potenciar el aprendizaje de sus estudiantes aprovechando las variaciones del problema(o bianshi). A partir de los datos de una investigación con enfoque cualitativo centrada en la competencia "mirar profesionalmente" del profesor, presentamos una instantánea de la práctica de John para mostrar lo que observa de las posibles variaciones en los problemas típicos y cómo las usa con los estudiantes para promover tanto las destrezas procedimentales como la comprensión conceptual. Los resultados subrayan el potencial de apoyar a los profesores para que aprovechen las variaciones de los problemas típicos, lo cual tienen implicaciones para la formación inicial y continua de profesores.

Palabras clave. Tareas matemáticas; formación de profesores; enseñar con variaciones; problemas típicos.

Uma abordagem para ensinar com variações: usando problemas típicos

Resumo

Os professores de matemática usam problemas típicos de propostas de exames anteriores e de livros didáticos para desenvolver procedimentos. Neste artigo, discutimos outros usos de problemas típicos. Nós nos concentramos nas oportunidades que um professor experiente, John, percebe nos problemas típicos e como ele os usa para melhorar a aprendizagem de seus alunos aproveitando as variações do problema (ou bianshi). A partir dos dados de uma pesquisa qualitativa voltada para a competência "olhar profissionalmente" do professor, *apresentamos um instantâneo da prática de John para mostrar o que ele observa de possíveis variações em problemas típicos e como ele os usa com os alunos para promover habilidades processuais e compreensão conceitual. Os resultados destacam o potencial de apoiar os professores para tirar proveito das variações de problemas típicos, que têm implicações para a formação inicial e contínua dos professores.*

Para citar: Choy, B. H. y Dindyal, J. (2018). An approach to teach with variations: using typical problems. *Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 13, 21 - 38.*

Palavras chave. Tarefas matemáticas; educação de professores; ensinar com variações; problemas típicos.

An approach to teach with variations: using typical problems

Abstract

Mathematics teachers use typical problems from past examination papers and textbook exercises to develop procedural skills. In this paper, we discuss other uses of typical problems. We focus on the affordances that an experienced teacher, John, perceives in typical problems and how he uses them to enhance student learning by harnessing the idea of teaching with variations or bianshi. Drawing on data from a larger qualitative design-based research on investigating teacher noticing, we present snapshots of John's classroom practices to show what he noticed about the variations afforded by typical problems and how he used these problems with students to promote both procedural skills and conceptual understanding. Findings suggest the value of supporting teachers in harnessing variations of typical problems, which has implications for teacher education and professional development.

Keywords: Mathematical tasks; teacher education; teaching with variations; typical problems.

Une approche pour enseigner avec des variations: utilisation des problèmes typiques

Résumé

Les professeurs de mathématiques utilisent des problèmes typiques des propositions d'examen précédentes et des manuels pour développer des compétences procédurales. Dans cet article, nous discutons d'autres utilisations de problèmes typiques. Nous nous concentrons sur les opportunités qu'un enseignant expérimenté, John, perçoit dans les problèmes typiques et comment il les utilise pour améliorer l'apprentissage de ses étudiants en profitant des variations du problème (ou bianshi). À partir des données d'une recherche qualitative axée sur la compétence «noticing» de l'enseignant, nous présentons un aperçu de la pratique de John pour montrer ce qu'il observe des variations possibles dans les problèmes typiques et comment il les utilise avec les élèves promouvoir les compétences procédurales et la compréhension conceptuelle. Les résultats soulignent la possibilité d'aider les enseignants à tirer parti des variations de problèmes typiques, qui ont des implications pour la formation initiale et continue des enseignants.

Paroles clés. Tâches mathématiques; formation des enseignants; enseigner avec des variations; problèmes typiques

1. Mathematical tasks and typical problems

Mathematics teachers invariably orchestrate lessons using a multitude of tasks. Traditionally, teachers have used typical problems such as examination-type questions and standard textbook exercises, to develop procedural skills. Despite the "omnipresence" of typical problems in the mathematics classroom, research into their use for developing conceptual understanding is limited. Do typical problems have affordances for developing conceptual understanding? In this study, we focus on the following research questions: (1) What affordances do teachers perceive in typical problems, and (2) How do they use typical problems in the classroom to enhance student learning? We describe how an experienced teacher, John, used typical problems to develop both procedural skills and conceptual understanding by harnessing the idea of teaching with variations or *bianshi*.

Mathematical tasks are central to student learning because they convey meaning about what mathematics is and what doing mathematics entails. The answer to what constitutes a task in the mathematics classroom may depend on the perspectives of both the teacher and the students. The teacher sets tasks for the students to work on and elicit particular learning outcomes. Stein, Grover and Henningsen (1996) encapsulate this view in their description of task as "classroom activity, the purpose of which is to focus students' attention on a particular mathematical idea" (p. 460). Along the same lines, Watson and Thompson (2015) refer to the written presentation of a planned mathematical experience for a learner, which could be one action or a sequence of actions that form an overall experience. Thus, a task could consist of anything from a single problem, or a textbook exercise, to a complex interdisciplinary exploration. Questions set by teachers for groups of students to work on are considered as tasks too.

Mathematics teachers use a variety of tasks during lessons to develop mathematical competencies in students. Efforts on orchestrating productive mathematical discussions (Smith & Stein, 2011) have amongst others been focused on the use of rich mathematical tasks (Grootenboer, 2009), challenging tasks (Sullivan et al., 2014), high-level tasks (Henningsen & Stein, 1997) and open-ended tasks (Zaslavsky, 1995). Although these tasks offer opportunities for students to do mathematics (Smith & Stein, 2011), they also present obstacles in implementation. First, these tasks may have too high an entry point for many students so that teachers have to provide additional prompts or scaffolds (Sullivan et al., 2014). Next, it takes time and effort for teachers to select, adapt or design challenging tasks for use in the classroom. Third, the inherent complexity of the rich tasks involves mathematics from across the curriculum, and results in these tasks implemented across several lessons. Consequently, these obstacles place high demands on teachers' knowledge and time, and may limit the incidence of such tasks in the mathematics lessons.

Furthermore, teachers may face challenges during the implementation of a lesson based on a single mathematically-rich task (Grootenboer, 2009) because students may not engage with it as intended. The centrality of a task is restrictive as it constrains the teacher and the flow of the lesson. It may not be easy to bring in a new task to re-engage students when they lose interest, or digress during the lesson to address questions and misconceptions. Teachers are pressed by the concurrent need to focus on honing procedural fluency as part of standardised testing preparations. This may lead to the implementation of a high cognitive-demand task as a low cognitive-demand task (Stein et al., 1996). These concerns are particularly true in an examination-oriented country such as Singapore, where the use of textbook- and examination-type questions are common.

As in many countries, completing the syllabus and preparing students for examinations are genuine concerns of teachers in Singapore. It is thus common for teachers in Singapore to adopt a teacher-centred teaching approach and use examination-type questions to develop procedural skills (Ho & Hedberg, 2005). This preference for using typical problems—standard examination or textbook problems—reflect teachers' belief that it is more "important to prepare students to do well in tests than to implement problem-solving lessons" (Foong, 2009, p. 279). We cannot ignore this reality. Despite the widespread use of typical problems in mathematics classrooms to develop procedural skills, research into their use for developing conceptual understanding remains limited.

In Choy and Dindyal (2017a, 2017b), we describe how an experienced teacher, Alice, used typical problems to develop relational understanding through procedural skills and conceptual fluency. Using Gibson's (1986) ideas about affordances, we emphasise that: (1) an affordance for using a typical problem exists relative to the action and capabilities of the teacher, (2) the existence of the affordance is independent of the ability to perceive it, and (3) the affordance does not change as the needs and goals of the teacher change. Following Gibson, affordances in relation to an observer can be positive or negative which in our context may lead to more or less productive use of the problems in class. Hence, to perceive the affordances of a typical problem implies noticing the characteristics of the task in relation to the understanding of the related concepts and to its adaption for use. That includes noticing the mathematical connections encapsulated in the task and orchestrating discussions around connections to enhance learning.

2. Noticing mathematical connections in tasks

As Smith and Stein (2011) highlight, the quality of a mathematics task is critical for developing mathematical proficiencies through classroom discussions. Selecting high-quality tasks requires teachers to focus their attention on the mathematical elements embedded in the tasks. For example, teachers may want to attend to the cognitive demand in terms of the mathematical processes required to solve the task (Smith & Stein, 1998). Besides the cognitive demands of a task, it may be useful for teachers to design tasks around students' possible confusion about the concepts they are learning (Choy, 2016). Whether teachers select, modify or create tasks for use in class, they have to see and make sense of the mathematics and pedagogical considerations in the tasks. This specialised seeing, sense making, and decision making is a set of three inter-related skills referred to by researchers as teacher noticing (Mason, 2002; Sherin, Jacobs & Philipp, 2011).

The professional vision called noticing can be viewed as a set of practices that work together to improve teachers' sensitivity to act differently in teaching. Mason (2002, p. 61) distinguishes disciplined from spontaneous noticing by indicating its systematic aspect:

> The idea is simply to work on becoming more sensitive to notice opportunities in the moment; to be methodical without being mechanical. This is the difference between 'finding opportunities' and 'making them'. Instead of being caught up in moment by moment flow of events according to habits and pre-established patterns, the idea is to have the opportunity to respond freshly and creatively yet appropriately, every so often.

There are two main ways, as Mason (2002) puts it, to raise the possibility of noticing in order to respond freshly or have a different act in mind for the future: advance preparation and learning from experience. In the case of using typical problems to develop relational understanding, teachers will need to notice the potential use or affordances offered by the tasks beyond developing procedural skills. We see noticing as productive when teachers perceive and harness the affordances of typical problems to develop procedural skills and conceptual understanding. An issue here is what makes noticing productive. Choy, Thomas and Yoon (2017) characterise *productive noticing* in terms of having an explicit focus for noticing through pedagogical reasoning—i.e. how teachers justify their instructional decisions or claims about student thinking using specific and appropriate details of what they have attended to. This notion of productive noticing builds on Yang and Rick's (2012) Three Point Framework by suggesting that an explicit focus is useful for supporting teachers to notice relevant instructional details during the planning, teaching and reflection of lessons (Choy et al., 2017). There are two key aspects of this focus. First, the three components of the didactical triangle, namely the mathematical concept, students' confusion associated with the concept, and teachers' course of action to address such confusion. Second, the alignment between these three components, that is, whether the teacher's course of action targets students' confusion when they are learning the concept. Ensuring this alignment between teachers' instructional decisions and students' confusion is not trivial, and it is mediated by teacher's pedagogical reasoning (Loughran, Keast & Cooper, 2016; Sánchez & Llinares, 2003; Shulman, 1987). Extending this notion of productive noticing, we see teachers' noticing as productive when he or she is able to see the connections between the problem and the curriculum in terms of what to teach—concepts, conventions, results, techniques, and processes (Backhouse, Haggarty, Pirie & Stratton, 1992). In addition, the teacher needs to make sense of how the problem can feature in a sequence of other typical problems, and use these typical problems to develop relational understanding (Choy & Dindyal, 2017a, 2017b).

3. Orchestrating discussions

Stein, Grover and Henningsen (1996) have provided a model for instructional tasks used by teachers to elicit desired learning outcomes in students while focusing on a particular concept, idea or skill. This model also applies to typical problems thought of as mathematical tasks: (1) represented in curricular or instructional materials, (2) set up by the teacher in the classroom, and (3) interpreted by students in the classroom (Figure 1).

Although the model provides a way to think about the representation, setup and implementation of tasks, the features of a task are necessary but not sufficient for enhancing student reasoning (Henningsen & Stein, 1997). Based on the analysis of 58 tasks (out of 144) that might afford 'doing mathematics' (Smith & Stein, 1998), it was found to be critical for teachers to support student reasoning by "pressing" them to "provide meaningful explanations or make meaningful connections", without "reducing the complexity and cognitive demands of the tasks" (Stein et al., 1996, p. 546). This is what Mason and Johnston-Wilder (2006) termed as "scaffolding and fading" (p. 83). Therefore, how a teacher engages students with the task during task implementation is of utmost importance in supporting their mathematical reasoning.

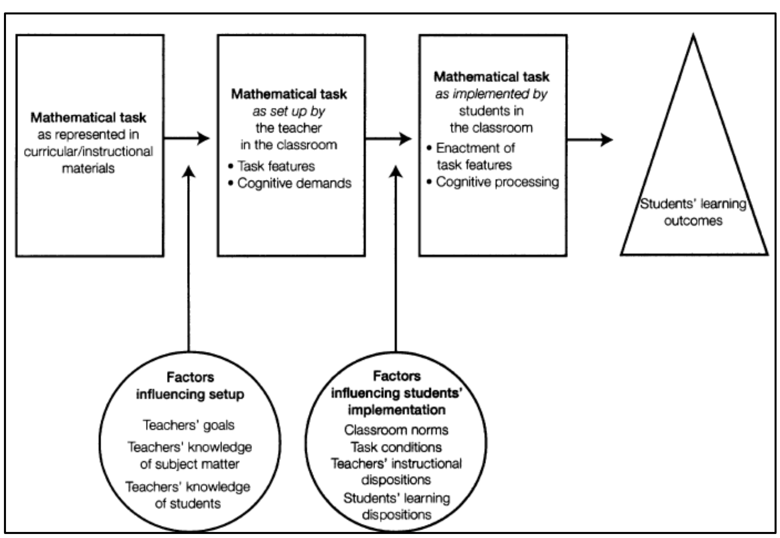


Figure 1. Mathematical tasks (Stein et al., 1996, p. 528)

The use of classroom discussions to engage students with the task is not trivial. There is a need for teachers to give students time to explore and work on the tasks; on the other hand, it is crucial for teachers to use students' responses to the tasks, and build on them to advance mathematical understanding. According to Stein, Engle, Smith and Hughes (2008), teachers can use students' correct, partially correct, and incorrect responses to tasks as initiators of discussion. The crux is to facilitate classroom interaction for shaping student mathematical reasoning, which is the hallmark of a well-orchestrated discussion. This study presupposes that orchestrating discussions is "deliberate work" (Franke, Kazemi & Battey, 2007, p. 228), and certain aspects of this teaching expertise can be planned. Stein et al. (2008, p. 321) introduced five practices:

- *anticipating* possible student responses to a task;
- *monitoring* their responses when students work with the task;
- *selecting* students purposefully to present their work;
- *sequencing* their presentations carefully to build up mathematical ideas; and
- *connecting* students' responses to each other and to the underlying mathematical concepts

Smith and Stein (2011) highlight the importance of using a mathematically rich task for orchestrating mathematically productive discussions. They suggest an instructional sequence that centres about a single rich task in which students attempt, present, and discuss the mathematics under the orchestration of a competent mathematics teacher. However, in Choy and Dindyal (2017b) we suggest an alternative. Our teacher participant, Alice, orchestrated mathematics discussions through a careful sequencing of simpler tasks involving typical problems. The structure of Alice's lesson differs from that envisioned by Smith and Stein (2011) in the plurality of tasks within the same lesson, punctuated by several more rapid successions of the same discussion moves: monitoring, selecting, sequencing, and connecting. This structure is made feasible by the use of typical problems, which generally take a shorter time to complete. In the rest of the paper, we focus on how typical problems can be set up differently for orchestrating discussions in the classroom to develop relational understanding by using the idea of variation.

4. Harnessing variation

The variation theory proposed by Marton (2014) uses a phenomenographic approach. The key idea is that learners will notice what is varying against a background of invariance. If too many things vary then individual variation is obscured (Watson & Mason, 2005). The implication for teachers is that mathematics tasks should be designed so that the desired content (known as the critical aspect in the theory) is varied and learners can see this and the effects of such variation in successive examples (Watson & Thompson, 2015). This critical idea has been termed the object of learning by Marton and Pang (2006). The object of learning includes the direct object of learning (content) and the indirect object of learning (capability of using that content). The teacher's role is then to create a pattern of variation and invariance, with the object of learning in mind, which the student must experience to learn. This pattern of variation and invariance is distinguishable more readily in a typical problem than in the so-called 'rich tasks' (Grootenboer, 2009).

The pattern of variation and invariance is better discernable in typical problems possibly because these problems offer more opportunities for “repetition by systematically introducing variations” (Wong, 2008, p. 977). As argued by Wong, Lam, Sun and Chan (2009), this form of repetitive learning, common in China and other East Asian countries, differs from rote learning. The difference lies in teaching with variation, practised in the form of *bianshi* (变式) teaching in China since the 1980s. While the pedagogy of variation emphasises concept development, *bianshi* teaching enhances problem-solving (Gu, Huang & Marton, 2004). We view *bianshi* as a form of variation, and follow the distinction made by Gu et al. (2004) between conceptual and procedural *bianshi*. Building on this notion, there are four basic types of *bianshi*: inductive, broadening, deepening, and applying (Wong, Lam & Chan, 2013).

In inductive *bianshi*, teachers use a series of carefully selected examples or situations for students to discern the critical features of a concept or skill. Teachers may use real-life examples of housing loans, hire purchases, and investments to highlight the idea of compound interest. Students develop the basic formula of compound interest accrued annually by examining each example. Following this, students consolidate their understanding by experiencing variations, or broadening *bianshi* introduced into the tasks by teachers. The aim of these tasks is not to introduce new concepts, but to see instances or uses of the concept to be learned. Examples of such tasks may include questions involving annual compounding of interest in a variety of contexts. In contrast, deepening *bianshi* aims to expand student understanding by varying certain aspects of the mathematical concept or skill. For instance, students can deepen their understanding of the compound interest formula when they are exposed to questions in which the interest rates are not annual interest rates, and the compounding frequencies are no longer annually. Finally, teachers use applying *bianshi* to promote students’ application of their new understanding to solve a variety of more realistic problems involving the notion of compounding.

We focus on variations as a lens to investigate what teachers notice about mathematics in typical problems. We present the case of John (pseudonym), an experienced teacher, to highlight the use of these problems to develop relational understanding. We describe how John sequenced a set of similar typical problems, harnessing on slight variations between the problems in his move from teaching for instrumental understanding to teaching for relational understanding.

5. Context for the case of John

This study draws on data collected from a larger design-based research (Design-Based Research Collective, 2003) aimed at developing a toolkit to support teachers in noticing relevant instructional details, and refining a theory to describe their noticing when orchestrating learning experiences. We went through three iterative cycles of theory-driven design, classroom-based field testing and data-driven revision of the Mathematical Learning Experience Toolkit (MATHLET) to provide a theoretical justification for the underlying analytical frameworks. Four experienced mathematics teachers from three secondary schools, with different achievement bands and demographic factors, participated in this project. In each design cycle, the teacher participants designed and implemented a lesson of their choice using the MATHLET. This resulted into 12 design cycles across three schools. Data consisted of voice recordings of planning, pre-lesson and post-lesson discussions, video recordings of lessons and lesson artifacts. By collaborating with teachers in designing, implementing and reviewing learning experiences using the MATHLET, we aimed to develop a deeper understanding of how teachers orchestrate mathematically meaningful learning experiences in different classroom contexts. Findings were then developed using a “thematic approach” (Bryman, 2012, p. 578) together with the two characteristics of productive noticing as proposed by the FOCUS Framework (Choy et al., 2017). John is one teacher of the project who used typical problems in his teaching with variations.

John is an experienced mathematics teacher who has been teaching high-achieving students for more than 20 years. He has a strong subject mastery with a Master degree in Mathematics and an Honours degree in Computer Science. John is proficient in the use of technology for teaching, especially graphing calculators. As a Senior Teacher in his school, John has also demonstrated pedagogical content knowledge, and actively engaged his colleagues in professional development. In many ways, John’s beliefs about mathematics teaching and learning reflect that of a connectionist teacher in numeracy (Askew, Rhodes, Brown, William & Johnson, 1997). He wants his students to be aware of the diversity of methods and know when to use them. For example, during our interview with him, he mentioned how he had focused on creating learning experiences for students where they had opportunities to reason about the most appropriate method:

> A simple thing like prove that ABCD is a parallelogram. I can do it using geometry, just draw it out and show you that it is a parallelogram. I can do it using vectors; I can using coordinate geometry. Same question, three different approaches. Which one do you choose? Now, that is the- so therefore the students thinking processes, how do I choose the correct, or the most applicable, method to answer that question and then answer it?

In addition, John sees the mathematics curriculum as a connected whole and makes connections with other topics. In his teaching, he tries to highlight how a single question can be solved using different approaches, drawing on connections between topics. Thirdly, he emphasises on understanding the concept underpinning the procedures. In one post-lesson discussion, he termed his notion of concept underpinning the procedures as a “procedural concept”:

> So we always wonder, let's say for example I give a question, let's say for example um. . . um, x squared minus $5x$ plus 6 equals to zero. Our teachers always tell our kids not to bring things over, keep right-hand side to zero. Why? Why do I keep the right-hand side to zero?

John’s idea of a procedural concept can be seen from his emphasis on understanding the reasons behind the procedure of “keeping the right-hand side to zero”, which is usually not expected at that level of study. His thinking reflects a connectionist belief aligned with his goal to teach the key ideas of mathematics—to highlight connections between mathematics and real life problems, and between mathematical topics within and beyond the secondary school levels.

The vignettes, developed from video and voice recordings of two lessons observed at a Secondary Three (Grade 9) classroom in Spring Hill School (pseudonym), are illustrations of what John typically does as he comes to the end of a topic. The first vignette focuses on a lesson on compound interest, where John tried to convey the meaning of the variables in

$$P = \left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$$

P refers to the principal sum, *r* the interest rate for a given compounding frequency, and *n* the number of times interest is compounded. He tried to direct students' attention to situations with use of different compounding frequencies and rates. The second vignette highlights a revision lesson on solving trigonometric equations through a sequence of four illustrative examples. In this lesson, John drew on what he noticed about students' mistakes and designed four trigonometric equations for students to work on:

$$3\sin\theta+4\cos\theta=0,\ 3\sin\theta+4\cos\theta=1,\ 3\sin^2\theta+4\cos\theta=1,\ 3\sin 2\theta+4\cos\theta=0$$

The two lessons took place almost six months apart, but John's approach of harnessing variations was similar.

6. Two vignettes of harnessing variations

Compound Interest Vignette

John had taught how to find simple interest and compound interest. He recalled the formulae for a quick review and proceeded to deepen the understanding of the compound interest formula.

John: … You invest $10,000 in an account that gives 3% per annum, compounded annually. Before you do anything, ask yourself one question. What is the keyword you must look for here? [*writes the duration to be 5 years*]

S1 : Compounded

John: Correct. Compounded annually. That's the first keyword. Give me the second keyword.

S2 : Per annum.

John: Sorry? Correct, per annum. Why is this important? Sorry?

S3 : Compounding once per year.

John: Correct, excellent. You must make sure that the annual compounding and the rate is the same duration. You must be very careful. We'll see why in a little while. Let's now work this out. So, what's your answer? Your total will be... Give me the formula, I don't want the answer, you know the answer, I want the formula.

S4 : [*uses the appropriate numbers in the compound interest formula and reads it for John*]

John: 10,000 times 1 plus 3 over 100... very good. Answer please? 11592.74. Exactly correct to 2 dp. Very good. Now, let's change the question. What if I told you, I don't want to compound annually. I want to compound quarterly.

S5 : Divide the rate into 4.

John: Aha! So! Very good, this is 3% per annum compounded annually. Now, it's per annum compounded quarterly. So what happens? Your time is now shortened by a factor of 4, which means that the rate must also be factor of 4. Very good. So your total will be 10,000, 1 plus...times? Sorry? What's wrong? Sorry?

S6 : You're calculating in quarters.

John: Because, yeah correct, because you're compounding quarterly right, so there are how many quarters in 5 years? Because remember? The rate was per quarter, this is quarter, this is quarter, right? Therefore you must make sure that the 2 rates have the same timeframe. So answer please, someone? 116114 to 2 dp. Very good. Now, one last question. Can you now tell me - ok, what if I told you this? 3% per annum compounded quarterly, quarter. I want 3% per quarter compounded quarterly. So what's the formula?

As seen from his exchange with the students, John made a series of subtle, yet critical changes to the interest rate problems to highlight how students should make adjustments to the formula for compound interest. He started by varying the compounding frequency from annual to quarterly to bring forth the necessary changes to the formula, before moving to other changes involving the interest rates. Here, we see how John used the idea of *bianshi* to support students in understanding the different components of the formula.

<u>Trigonometric Equation Vignette</u>

John wrote four trigonometric equations on the board (Figure 2) and asked the students to discern the differences:

> What I've noticed yesterday was as you were doing the work, you know how to start, but when you get to a point you got confused because you don't know how to continue. Now let's go uncover these 4 questions. Now, take the first 2 minutes in each group, 3 of you, tell me what are the main differences in all 4 questions. Don't give me cosmetic differences. Oh, this got plus got minus got this...don't need. I don't want cosmetic, I want theoretical, conceptual differences, ok? So ask yourself 2 questions. Number 1, when you do trigonometry, what are the 2 most important things to remember? Number 2, when you do trigonometry, what are the other considerations that you must account for when you solve a trigonometric equation. Those are the first 2 questions. 1 minute, talk, buzz, go.

Figure 2 shows that the four equations look similar but are structurally different. The difference between the first ($3\sin\theta + 4\cos\theta = 0$) and the second ($3\sin\theta + 4\cos\theta = 1$) lies in the number on the right-hand side. This variation changes the structure and solution method. In the first equation, students divide both sides by $\cos\theta$ to obtain an equation containing only the tangent function. The second equation requires them to transform the equation into $R\sin(\theta + \alpha) = 1$.

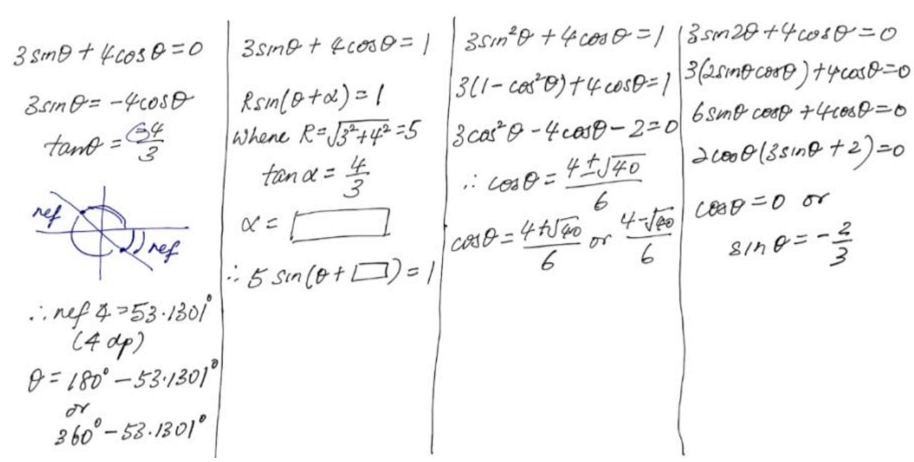


Figure 2. John's selection of the four trigonometric equations

John wanted his students to pay attention to the change in structure and solution method. He opens up opportunities to see the difference for themselves, and to understand why they cannot divide both sides by $\cos\theta$ for the second equation:

John: Finished? Ok, method, answer?
SA: The first one is tangent.
John: Wait, no, no, yeah but what makes it different? What makes the difference?
SB: Because it's value of...
John: Sorry? Yeah so?
SC: Yeah then there's sine and cosine, so you can become tangent.
John: So why can't I do that for the second one?
SD: Second one is 1.
John: So? So why cannot, tell me, why can't you do it?
SE: Huh, because the value will jump.
John: So? What's the problem?
SF: When you manipulate you cannot do the division...
John: Can... why you divide by 1? You divide by cos right? So why can't do 3 tan θ plus 4 equals um...
SG: Because that will give you 2 different...
John: So why can't I do that here?
SH: Because there's the 1.
John: But can become [secant] mah. You mean can't become [secant] ah? You mean you cannot solve this? You mean this one I cannot solve? Then? Then? What's wrong with this? no no I understand your reason, I'm not saying you're wrong, but my question is, you say I cannot divide by cos θ, right? But I can, you can solve this, because this will simply be... So it's not impossible. So, but why is it - it's not easy this time? …
SI: 1 tangent.

John's use of the four equations is an example of *bianshi*, which involves both conceptual and procedural elements. For instance, John tried to get students to see through the surface structural differences (i.e., 0 versus 1 on the right-hand side) and understand the key to solving trigonometric equations—to reduce the equation into one with a single trigonometric function (conceptual). In the third and fourth equations, John varied the equations by introducing a squared term in the third and a change in angle in the fourth, while maintaining some similarities with the previous equations. Although this change in the structure of the equation requires students to use a different solution method (procedural), John wanted them to see that the key idea of solving trigonometric equations remains the same (conceptual). This excerpt is typical of how John orchestrates the mathematical discussions during his lessons. His practice of conducting discussions reflects a connectionist's belief in that he uses "focused" discussions to "help pupils explore efficient strategies and interpret the meaning of mathematical problems" (Askew et al., 1997, p. 32).

7. Discussion and conclusion

The two vignettes above show how John harnessed the idea of teaching with variations or *bianshi* to develop relational understanding. In the Compound Interest Vignette, John used a rapid succession of scenarios, which involves compounding frequencies and the kind of interest rate given, to deepen student understanding. Building on the standard formula from textbooks for compound interest, he used a sequence of short questions involving these variations to highlight the corresponding changes to the formula. This is different from what many would term as "rote learning" because of his emphasis on the reasons behind differences in the procedures. His choice of questions and the sequencing were deliberate to reflect the key idea behind the formula. He used his assessment of student understanding to design a series of questions:

> Um, right now what I do is, because I know what concepts, what procedural concepts I'm testing today, I can then analyze um, so the question I will set will be based on that one skill. So every assessment I give them, every question I set them will have a specific skill that I'm testing. Either a specific concept, or a specific algebraic manipulation skill that I'm testing. Every question will have something that I'm looking for.

By seeing how the compound interest formula varies given the *r* and the compounding frequency, John used short questions to highlight the key point he was trying to teach. His use of typical problems with slight variations aimed at deepening student understanding of the formula beyond developing procedural skills. This is an example of his use of typical problems by harnessing deepening *bianshi.*

In the Trigonometric Equation Vignette, John used a series of four typical problems to highlight differences in the structures of the four equations, and guided students to notice the strategies in solving trigonometric equations. He used four similar questions that vary in the structure, while keeping the coefficients of $\sin\theta$ and $\cos\theta$ constant. He deliberately designed the four equations to illustrate the four basic types of trigonometric equations common in examinations. However, John went beyond preparing students for examinations by highlighting the thinking processes required to solve trigonometric equations. The design of the equations support students to make sense of the structural differences in the equations and connect these differences to the corresponding solution methods. This is especially so for the first equations, which look similar but their solution methods are different. John wanted to broaden student understanding of the solution methods by raising awareness of structural differences.

As seen in the two vignettes, John noticed his students' errors and was cognisant of the key idea for the lesson. For example, in the Compound Interest Vignette, John used his insights into students' understanding and possible confusion, and designed the sequence of short questions to denote what is invariable in the questions ("the two rates have the same timeframe"). Similarly, in the Trigonometric Equation Vignette, he designed the four questions around what students had previously found to be challenging. During the post-lesson interview after the review lesson, John highlighted his thinking and reasons for designing the four questions:

> I know that for that class, because I know where their problems are, I know which problems will cause them problems. So if I give them a simple question, for example, $3\sin\theta$ equals to $4\cos\theta$, oh they can solve that no problem, they can definitely do that without an issue. But the minute I change something else or I add a constant to it, if I add something else to the whole thing, if I change the double angle for example, they find that part very very uncertain.

Besides noticing the specificities of content and confusion when learning the topics, John perceived the affordances of typical problems and considered how he could harnessed the types of variation to address errors. John was able to reason about his modification or choice of typical problems. Hence, John's noticing is productive as he harnessed the idea of variations or *bianshi* in his use of typical problems to teach for relational understanding (Choy et al., 2017).

In terms of orchestrating discussions, John used a series of short, focused questions to engage his students. While John's questioning may be similar to the classic Initiate-Respond-Evaluate pattern (Greeno, 2003), he listened to students' responses and guided them based on what they were thinking. As a result, his questioning is more focusing rather than funnelling (Wood, 1998). He achieved this focusing through the deliberate sequencing of the problems modified. He listened to students and responded to further their relational understanding. This is more evidence for considering John's noticing productive (Choy et al., 2017).

John harnessed the idea of variations or *bianshi* by making deliberate modifications to typical problems for broadening and deepening student understanding of the skills. He tried to guide students in making connections between the procedural skills and the concepts they had learned. His use of typical problems was characterised by deliberate changes to the structure of the chosen problems to highlight specific aspects of the concept or skill. This stands in contrast to Alice, as described in our earlier work (Choy & Dindyal, 2017b). In the case of Alice, she modified the typical problems to open up the solution space, which provided opportunities for students to use different methods to solve the problem. Alice used students' responses to the typical problems to develop relational understanding by connecting their responses to key mathematical ideas in the same topic. Hence, we see two different approaches to using typical problems for developing both procedural skills and conceptual understanding.

In his interview, John highlighted how he unpacked the curriculum by thinking more deeply about what students were supposed to learn beyond the skills. He paid attention to the specific concepts, conventions, results, techniques, and processes in a given topic (Backhouse et al., 1992). Similar to Alice, John attended to the structure of a unit by thinking of it as a sequence of lessons, which comprised of a sequence of tasks, and considered how he could encapsulate the mathematics in the tasks. He was aware of the connections between the concepts within and beyond the topic. While acknowledging that he is an experienced teacher, we believe that other teachers can develop such professional vision—productive noticing of the curriculum. To this end, we propose three approaches for future research:

Beyond learning new content. Rather than learning new content, there is an issue with using teachers' knowledge to delve deeper into school mathematics. It is more about supporting teachers to use what they know, and guiding them to see new connections between aspects of the mathematics they are teaching. It is about guiding them to see the forest and the trees. Teachers need to have opportunities to zoom in and out of the curriculum, and notice systematically its details (Mason, 2011). In particular, they have to learn how to attend to the whole curriculum; discern the details of the concept; seeing the teaching of this concept in a sequence of lessons; conceptualising a lesson as a sequence of tasks, and encapsulating the mathematics within the tasks, paying attention to inter typical problem differences.

Typical problems. The omnipresence of typical problems offer opportunities for teachers to enhance student learning experiences in a more pervasive manner. We see one area of potential professional development in supporting teachers to notice the affordances of typical problems. There are at least two ways to think about the affordances of typical problems. First, as in Alice's way of modifying problems to expand solution space. This approach provides multiple entry points for different groups of students. Next, as described in this paper, John modified the problem to restrict the solution space to specific cases. This "zooming in" allows teachers to highlight the critical features of the concept. Both ways to think about typical problems are critical if we want to use them for developing relational understanding.

Conversations about students thinking. Many professional development approaches have centred on having professional conversations about teaching and learning. However, not all conversations are productive for enhancing student thinking. As argued by Lee and Choy (2017), it is crucial for teachers to focus on specificities of the concept, what students find difficult when learning the concept, as well as teachers' approaches to address these learning challenges. Choy et al. (2017) highlight the importance to notice the alignment between the triad of teaching and learning—content, student thinking, and teacher actions. Focused conversations should be supported in order to harness the potential of typical problems for enhancing student learning.

Although the examples used in this paper came from a single teacher, we have seen similar approaches from other teachers in our studies. While we acknowledge that some teachers use typical problems in a limited fashion, we see potential in exploring and enhancing the use of such problems to develop conceptual understanding. The idea of teaching with variations (Gu et al., 2004) provides one avenue to explore this fertile terrain.

References

Askew, M., Rhodes, V., Brown, M., William, D., & Johnson, D. (1997). *Effective teachers of numeracy: report of a study carried out for the Teacher Training Agency*. London, UK: King's College, University of London.

Backhouse, J., Haggarty, L., Pirie, S., & Stratton, J. (1992). *Improving the learning of mathematics*. London, UK: Cassell.

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4th ed.). New York: Oxford University Press.

Choy, B. H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal, 28*(3), 421-440.

Choy, B. H., & Dindyal, J. (2017a). Noticing affordances of a typical problem. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 249-256). Singapore: PME.

Choy, B. H., & Dindyal, J. (2017b). Snapshots of productive noticing: orchestrating learning experiences using typical problems. In A. Downton, S. Livy & J. Hall

(Eds.), *Proceedings of the 40th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 157-164). Melbourne, Australia: MERGA.

Choy, B. H., Thomas, M. O. J., & Yoon, C. (2017). The FOCUS framework: characterising productive noticing during lesson planning, delivery and review. In E. O. Schack, M. H. Fisher & J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 445-466). Cham, Switzerland: Springer.

Design-Based Research Collective (2003). Design-based research: an emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Foong, P. Y. (2009). Review of research on mathematical problem solving in Singapore. In K. Y. Wong, P. Y. Lee, B. Kaur, P. Y. Foong & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: the Singapore journey* (pp. 263 - 300). Singapore: World Scientific.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In J. F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Gibson, J. J. (1986). *The theory of affordances. The ecological approach to visual perception*. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Greeno, J. G. (2003). Situative research relevant to standards for school mathematics. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 304-332). Reston, USA: NCTM.

Grootenboer, P. (2009). Rich mathematical tasks in the Maths in the Kimberly (MITK) project. In R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 696-699). Palmerston North, New Zealand: MERGA.

Gu, L., Huang, R., & Marton, F. (2004). Teaching with variation: a Chinese way of promoting effective mathematics learning. In L. Fan, N.-Y. Wong, J. Cai & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: perspectives from insiders* (pp. 309-347). Singapore: World Scientific.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematics tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524-549.

Ho, K. F., & Hedberg, J. G. (2005). Teachers' pedagogies and their impact on students' mathematical problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 238-252.

Lee, M. Y., & Choy, B. H. (2017). Mathematical teacher noticing: the key to learning from Lesson Study. In E. O. Schack, M. H. Fisher & J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 121-140). Cham, Switzerland: Springer.

Loughran, J., Keast, S., & Cooper, R. (2016). Pedagogical reasoning in teacher education. In J. Loughran & M. L. Hamilton (Eds.), *International handbook of teacher education* (Vol. 1, pp. 387-421). Singapore: Springer.

Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning*. London, UK: Routledge.

Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Jounal of the Learning Sciences, 15*(2), 193-220.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: the discipline of noticing*. London, UK: Routledge Falmer.

Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: seeing through teachers' eyes* (pp. 35-50). New York: Routledge.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. Saint Albans, UK: Tarquin Publications.

Sánchez, V., & Llinares, S. (2003). Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(1), 5-25.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, USA: NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-488.

Sullivan, P., Askew, M., Cheeseman, J., Clarke, D., Mornane, A., Roche, A., & Walker, N. (2014). Supporting teachers in structuring mathematics lessons involving challenging tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(2), 123-140.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, A., & Thompson, D. (2015). Design issues related to text-based tasks. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 143-190). New York: Springer.

Wong, N.-Y. (2008). Confucian heritage culture learner's phenomenon: from "exploring the middle zone" to "constructing a bridge". *ZDM, 40*(6), 973-981.

Wong, N.-Y., Lam, C. C., & Chan, A. M. Y. (2013). Teaching with variation: bianshi mathematics teaching. In Y. Li & R. Huang (Eds.), *How Chinese teach mathematics and improve teaching* (pp. 105-119). New York: Routledge.

Wong, N.-Y., Lam, C. C., Sun, X., & Chan, A. M. Y. (2009). From "exploring the middle zone" to "constructing a bridge": experimenting in the spiral bianshi matheamtics curriculum. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(2), 363-382.

Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: funnelling or focusing? In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167-178). Reston, USA: NCTM.

Yang, Y., & Ricks, T. E. (2012). How crucial incidents analysis support Chinese Lesson Study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(1), 41-48.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 15-20.

References of authors

Ban Heng Choy, National Institute of Education, Nanyang Technological University, banheng.choy@nie.edu.sg

Jaguthsing Dindyal, National Institute of Education, Nanyang Technological University, jaguthsing.dindyal@nie.edu.sg

An approach to teach with variations: Using typical problems

Ban Heng Choy, National Institute of Education, Nanyang Technological University

Jaguthsing Dindyal, National Institute of Education, Nanyang Technological University

Mathematics teachers use typical problems from past examination papers and textbook exercises to develop procedural skills. In this paper, we discuss other uses of typical problems through the following research questions: (1) What affordances do teachers perceive in typical problems, and (2) How do they use typical problems in the classroom to enhance student learning? We focus on the affordances that an experienced teacher, John, perceives in typical problems and how he uses them to enhance student learning by harnessing the idea of teaching with variations or bianshi. Drawing on data from a larger qualitative design-based research on investigating teacher noticing, we present snapshots of John’s classroom practices to show what he noticed about the variations afforded by typical problems and how he used these problems with students to promote both procedural skills and conceptual understanding. Findings suggest the value of supporting teachers in harnessing variations of typical problems, which has implications for teacher education and professional development. While we acknowledge that some teachers use typical problems in a limited fashion, we see potential in exploring and enhancing the use

of such problems to develop conceptual understanding. We importantly acknowledge the development of future research regarding the need to: i) Support teachers to use what they already know by means of establishing newer connections rather than learning further content. ii) Enhance opportunities for teachers to enhance student mathematics learning based on the affordances of typical problems. iii) Develop contexts for professional conversation about student mathematical thinking that focus on specificities of the concepts of teaching and learning.

Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts

Ceneida Fernández, Universidad de Alicante (España)

Gloria Sánchez-Matamoros, Universidad de Sevilla (España)

Julia Valls, Universidad de Alicante (España)

M. Luz Callejo, Universidad de Alicante (España)

Recibido el 2 de enero de 2017; aceptado el 3 de abril de 2018

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes: caracterización, desarrollo y contextos

Resumen

Presentamos una síntesis de resultados de las investigaciones del grupo de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Alicante realizadas durante los últimos años en relación a la competencia docente mirar profesionalmente. Las investigaciones se han centrado en tres focos: (i) caracterizar la relación entre las destrezas que configuran la competencia docente mirar profesionalmente; (ii) caracterizar grados de desarrollo e (iii) identificar características de los contextos que apoyan su desarrollo. Junto con los principales resultados, se identifican retos de futuro.

Palabras Clave. Mirar profesionalmente; destrezas; desarrollo; aprendizaje del profesor.

Olhe profissionalmente para o pensamento matemático dos estudantes: caracterização, desenvolvimento e contextos

Resumo

Este artigo apresenta uma síntese dos resultados da pesquisa do grupo de Didática da Matemática da Universidade de Alicante, realizada durante los últimos años em relação à competência de ensino para olhar profissionalmente. As investigações se concentraram em três enfoques: (i) caracterizar a relação entre as habilidades que compõem a competência de ensino para olhar profissionalmente; (ii) caracterizar graus de desenvolvimento e (iii) identificar características dos contextos que sustentam seu desenvolvimento. Os principais resultados são apresentados con os desafios para o futuro.

Palavras chave. Olhar profissionalmente; habilidades; desenvolvimento; aprendizagem do professorn.

Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts

Abstract

We summarize results obtained by the Didactics of Mathematics research group at the University of Alicante on the competence of professional noticing. The research focused on three issues over the

Para citar: Fernández, C.; Sánchez-Matamoros, G.; Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 13, 39 - 61.*

last years: (i) characterizing how the skills that make up professional noticing interrelate; (ii) characterizing different degrees of competence development; and (iii) identifying contexts that support this competence development. Main results are described along with future challenges.

Key words. Professional noticing; skills; development; teacher learning.

Regarder professionnellement à la pensée mathématique des étudiants: caractérisation, développement et contextes

Résumé

Nous présentons une synthèse des résultats des recherches du groupe de Didactique des Mathématiques de l'Université d'Alicante, réalisées au cours des dernières ans, sur la compétence enseignante regarder professionnellement. Les recherches ont fixé l'attention sur trois axes : (i) caractériser le rapport entre les habiletés donnant forme à la compétence enseignante regarder professionellement; (ii) caractériser le degré de développement et (iii) identifier les caractéristiques des contextes qui favorisent le développement. On présente des résultats avec des défis pour l'avenir.

Paroles clés. Regard professionnel; habiletés; développement; apprentissage du professeur.

1. Introduction

The teaching competence of *professional noticing of mathematics teaching-learning situacions* is considered to be a component of mathematics teachers' professional practice (Mason, 2002). The meaning of this teaching competence (professional noticing) is linked to how teachers use their knowledge of mathematics when performing different professional tasks such as: (i) selecting and designing tasks, (ii) analyzing and interpreting students' mathematical thinking and (iii) initiating and guiding mathematical discourse during class interactions (Figure 1, Llinares, 2013).

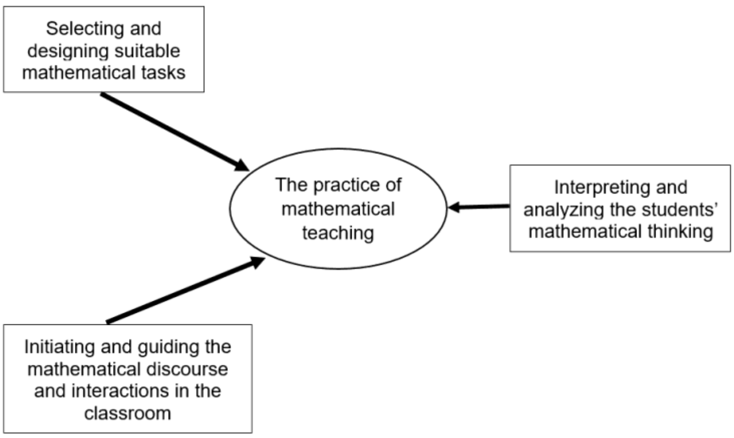


Figure 1: Activity system in mathematics teaching as a practice (Llinares, 2013, p.79)

Because of the relevance of this teaching competence, a line of research has emerged on its conceptualization and analysis during the initial training of primary and secondary school teachers of mathematics.

2. The teaching competence on professional noticing

Goodwin (1994) used the term *professional vision* to account for how professionals develop conceptual schemas to understand the situations they are in and that require decision-making. From this perspective, learning how to reason in a profession is considered part of building expertise.

In the case of primary and secondary school teachers, professionally noticing teaching-learning situations in mathematics should help them to: identify relevant aspects of learning situations; use their knowledge of mathematics and its didactics to interpret them; and make connections with more general principles on the teaching-learning of mathematics, in order to justify their teaching decisions (van Es & Sherin, 2002). This professional vision of mathematics teaching-learning situations implies switching from describing student or teacher actions, to focusing on how students are learning, and moving from evaluative comments to making interpretative comments based on evidence (Bartell, Webel, Bowen & Dyson, 2013).

In recent years, initial and continuing education programs, aimed at developing this teaching competence, have been providing information on the contexts and instruments that favour these transitions (Stahnke, Schoeler & Roesken-Winter, 2016), such as: the analysis of video clips showing interactions between teacher and students; or students solving problems (Llinares & Valls, 2009, 2010; Santagata & Yeh, 2016; Schack et al., 2013; van Es & Sherin, 2002; 2008); or the analysis of students' written answers to math problems focusing on errors (Son, 2013).

A particular aspect of this competence is to professionally notice students' mathematical thinking. Jacobs, Lamb and Philipp (2010) conceptualize the professional noticing of students' mathematical thinking competence as the interrelation between the three following skills: (i) identifying important mathematical elements in student responses; (ii) interpreting students' understanding of those mathematical elements; and (iii) deciding how to respond with this understanding in mind. Research developed in our group focuses on this particular aspect of the competence and centred on three specific areas:

- Characterizing the relationship between the skills linked to professional noticing of students' mathematical thinking.
- Characterizing degrees of development of this competence.
- Analyzing contexts that help to develop this competence.

The mathematical domains considered were: length magnitude and measurement, generalization of patterns, proportionality, limit of a function at a given point, derivative of a function and classification of quadrilaterals; and different teaching levels: pre-service preschool teachers, and pre-service primary and secondary school teachers. The first area has answered the question: how do pre-service teachers notice students' mathematical thinking (i.e., how do they identify, how do they interpret and how do they decide)? Results led us to understand relationships between the skills of identifying, interpreting and making decisions, during initial training programs while teaching competence developed. In the second area we have addressed the question: how do pre-service teachers develop this competence? Results led us to generate descriptors of degrees of development. In addition, our findings produced information on how pre-service teachers learned to use knowledge in practical situations. In the third area we answered the question: what contexts favour the development of this competence? We identified contexts that were able to enhance relations between the skills necessary for professional noticing of students' mathematical thinking.

3. Characterizing the relationship between skills

Jacobs et al. (2010) suggested that a nested relationship existed between the skills of identifying, interpreting and making decisions, in the sense that the ability to interpret depends on the ability to identify, and the decision on how to respond depends on the interpretation made. Based on this, identifying the important mathematical elements in students' strategies is a necessary condition to interpret students' understanding and decide how to respond (Barnhart & van Es, 2015). However, interpreting students' understanding and deciding how to respond, taking into account students' understanding, is a difficult task for pre-service teachers since their mathematical knowledge tends to be insufficient (Bartell et al., 2013; Son, 2013).

To support pre-service teachers' noticing of student strategies and procedures, with the aim of inferring characteristics of students' understanding, we used tasks that included a variety of student answers illustrating different degrees of understanding of a mathematical concept. In this way, pre-service teachers had to analyze and compare real student answers to one or several problems that revealed different characteristics of students' understandings. This aspect of our methodological approach constitutes a distinguishing feature of our research. Student answers to design tasks were selected based on Didactics of Mathematics research about the understanding of mathematical concepts in primary and secondary school students (Figure 2).

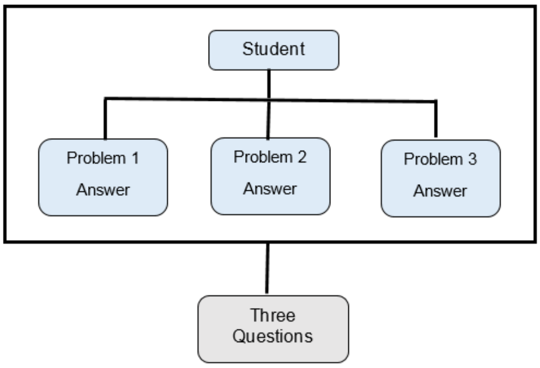


Figure 2. Task structure

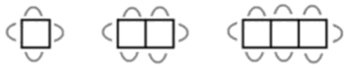
To analyze student responses, pre-service teachers had to answer three professional questions relating to professional noticing skills:

- Describe how student X solves each problem, indicating the elements of concept Y used and whether the procedure is adequate and why.
- Based on the description of how the student solves the problems, is it possible to identify some characteristic of how student X understands concept Y?
- If you were the teacher and considering how student X understood concept Y as reflected by his/her solution of the problem, what would you do to improve his/her understanding?

In Callejo and Zapatera (2017), the task was to analyze the responses of three primary school students to three problems related to pattern generalization. The problems provided the first components of a succession of figures that followed a pattern, together with questions relating to near, far and algebraic generalization. Figure 3 shows one of the problems and Figure 4 the selected answers to this problem of three primary school students. They reflect different degrees of understanding of the linear patterns. The pre-service teachers had to answer all three professional questions.

Problem 3

Observe the following figures representing tables and chairs:



1 table 4 chairs | 2 tables 6 chairs | 3 tables 8 chairs

As you can see, we have put 4 chairs around one table, 6 chairs around two tables, and 8 chairs around three tables.

1. Can you draw 4 tables and the number of chairs it should have?
2. How many chairs can we put around 5 tables in this way? And around 6 tables?
3. For a party we put 18 tables together along with the appropriate number of chairs. How many guests will be able to sit? Explain how you found your answer.
4. If there are 42 children invited to a birthday party, how many tables will we need to put together in a row? Explain how you found your answer.
5. Explain in your own words a rule connecting the number of tables and the number of chairs.

Figure 3. Problem 3 in Callejo & Zapatera (2017, p.316)

Mathematically, this problem includes three elements: (i) a spatial (distribution of figure elements) and numerical (number of elements that make up the figures) structure; (ii) the functional relationship (relationship between the place occupied by each figure and the number of elements that make it up); and (iii) the inverse functional relationship. To solve this problem, students had to coordinate the spatial and numerical structures, establish the functional relationship and its inverse relation.

Student responses were selected according to degrees of understanding of linear patterns according to Radford (2014). Student A's response showed that he/she was not coordinating the spatial and numerical structures (grade 1). Student B's response indicated that he/she was able to coordinate the spatial and numerical structure for near and far terms and to establish a functional relationship verbally, but was not able to reverse the process, that is, student B did not calculate the number of tables from the number of chairs (grade 2). Student C's answer indicated that he/she was able to establish a functional relationship (relationship between the position of the figure in the sequence and the number of elements that compose it) and its inverse relation (number of elements and number of the figure) (grade 3).

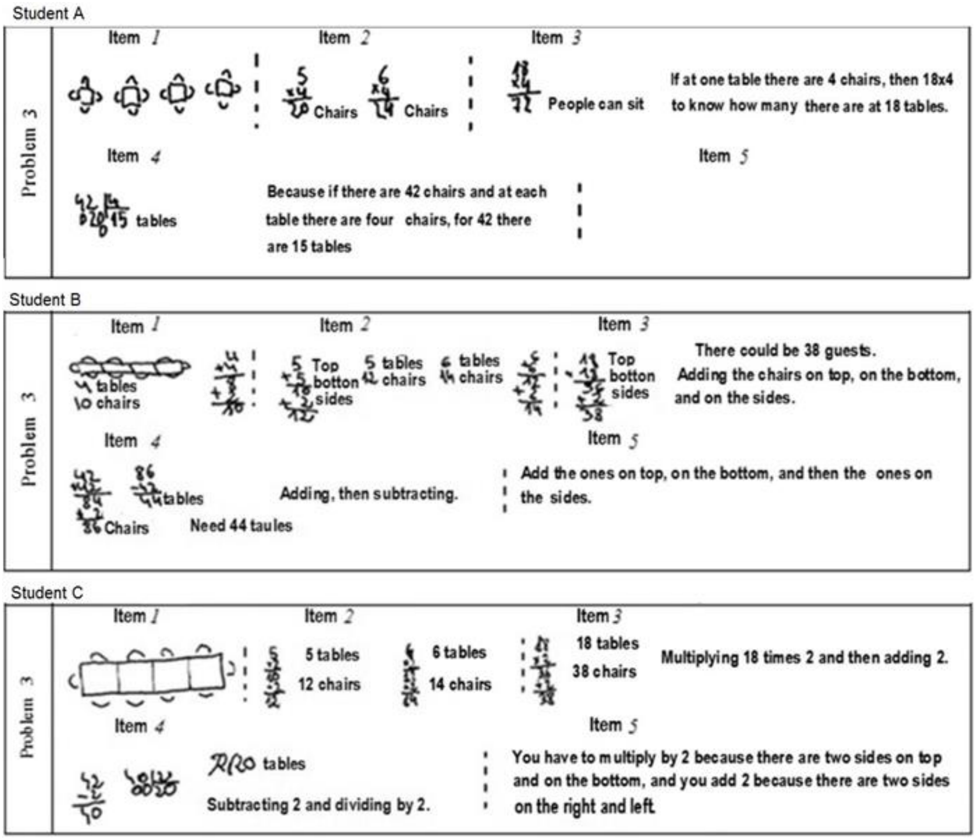


Figure 4. Student responses to problem 3

Our research on interrelations between the skills of identifying, interpreting and making teaching decisions, have taken into account different mathematical domains and levels of teaching: generalization of patterns in pre-service primary teachers (Callejo & Zapatera, 2017), proportionality in pre-service primary teachers (Buforn, Llinares & Fernández, 2018; Fernández, Llinares & Valls, 2013), limit of a function in pre-service secondary teachers (Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno & Callejo, 2018), classification of quadrilaterals in pre-service secondary teachers (Fernández, Sánchez-Matamoros & Llinares, 2015) and derivative in pre-service school teachers (Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García & Llinares, 2012).

These studies generated findings on the relationships between the skills of identifying, interpreting and deciding in different mathematical domains. Callejo and Zapatera (2017) identified five profiles according to how pre-service teachers identify and interpret in the domain of pattern generalization:

- Profile 1: those who identify one or more mathematical elements in student responses, but do not recognize degrees of understanding of pattern generalization.
- Profile 2: those who identify at least one mathematical element and recognize evidence of near generalization (grade 1 of understanding).
- Profile 3: those who identify at least two mathematical elements and recognize evidence of near and far generalization (grades 1 and 2 of understanding).
- Profile 4: those who identify at least two mathematical elements and recognize evidence of near generalization and far generalization with inverse relation (grades 1 and 3 of understanding).

- Profile 5: those who identify the three mathematical elements and recognize evidence of the three grades of understanding of pattern generalization.

These profiles indicate a relationship between identifying relevant mathematical elements and interpreting students' understanding; however, a clear relationship between these skills and decision making was not found.

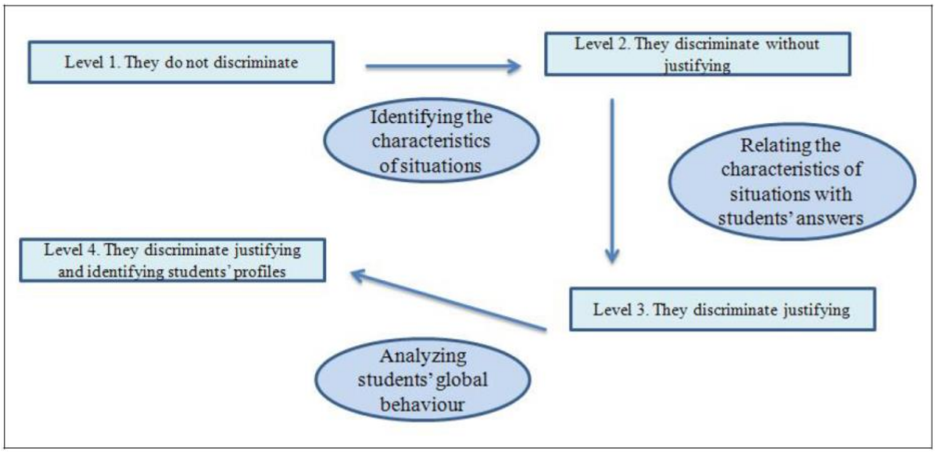


Figure 5. Indicators of how pre-service teachers identify and interpret mathematical thinking in students' proportional reasoning (Fernández et al., 2013, p.459)

Fernández et al. (2013) characterized how pre-service primary teachers identify and interpret students' mathematical thinking in the domain of proportional reasoning at four levels (Figure 5). Transition from level 1 to 2 corresponds to the ability to analyze a problem's features (mathematical elements) and thus differentiate them; transition from level 2 to 3 is linked to the ability to relate students' strategies with the problem's mathematical features, in order to justify whether the strategy is correct; and the transition from level 3 to 4 reflects the ability to analyze students' global behaviour (understanding) with regard to a type of problem. In this way, we created indicators of how pre-service teachers related the skills of identifying and interpreting.

In their study of pre-service secondary school teachers working in the domain of the derivative, Sánchez-Matamoros et al. (2012), showed the relationship between how pre-service teachers identified mathematical elements in the answers of high school students (low, medium and high level) and the way in which they interpreted these answers as evidence of students' understanding: some pre-service teachers provided general comments; other pre-service teachers only indicated if the student understood the concept or not; and other pre-service teachers recognized the characteristics of students' understanding (Figure 6). In addition, results showed that the teaching decisions proposed by pre-service secondary school teachers to support students' understanding of the derivative concept were related to how they interpreted their students' understandings. Thus, the pre-service teachers who identified characteristics of students' understanding proposed teaching decisions that focused on the meaning of the mathematical concept (conceptual actions).

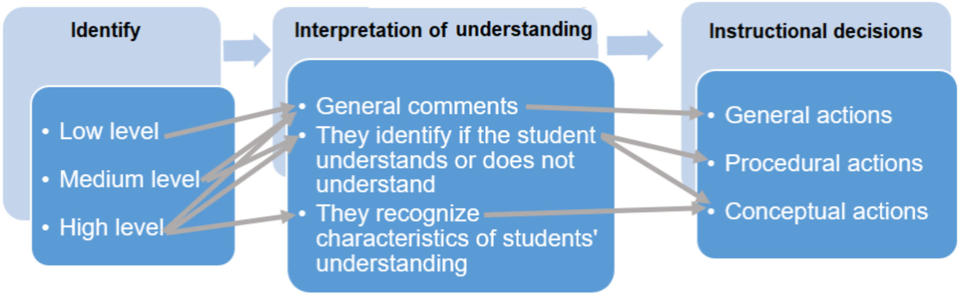


Figure 6. Interrelations between skills

3.1. Discussion and future perspectives

Results of our research indicate that the relationships between identifying, interpreting and making decisions are complex. However, there is evidence to suggest that they can be developed in initial teacher training programs.

Although there is a clear relation between the skills of identifying and interpreting, there is no direct relation with the ability to decide, which is difficult to acquire in training programmes (Choy, 2016; Jacobs et al., 2010; Santagata & Yeh, 2016). This is shown by the fact that pre-service teachers usually focus their decisions on general teaching procedures without considering students' conceptual progress. In our study on the derivative (Sánchez-Matamoros et al., 2012), only pre-service teachers who were able to identify different degrees of students' understanding of the concept of derivative proposed conceptual actions focused on students' understandings.

Deciding how to respond based on students' understanding is not easy. However, there is evidence to suggest that providing pre-service teachers with a frame or guide, enabling them to focus on relevant mathematical aspects in student responses could help them focus their noticing. In this sense, hypothetical learning trajectories (Simon, 2006) can be used by pre-service teachers as a guide to structure their attention to students' mathematical thinking (Edgington, Wilson, Sztajn & Webb, 2016). This would provide them with a mathematical and didactic of mathematics language helping to describe students' mathematical thinking. Hypothetical learning trajectories can help them to define learning objectives for each student, anticipate and interpret their students' mathematical thinking and respond, with appropriate instruction, to their progression in learning (Sztajn, Confrey, Wilson & Edgington, 2012).

In Ivars, Fernández and Llinares (2016), the use of a hypothetical learning trajectory of the fraction concept, provided to pre-service teachers as a theoretical document to support their noticing (designed based on Battista, 2012), endowed them with a specific language to refer to students' understanding, allowing them to focus on the relevant aspects of their strategies. In this way, using hypothetical learning trajectories as a guide to focus pre-service teacher attention seems to strengthen the relationships between identifying and interpreting, and interpreting and proposing activities (deciding). As a result of this research, hypothetical learning trajectories were included in the design of teaching modules of initial training programmes focusing on the development of competence with the aim of characterizing different degrees of competence development (our second research area).

4. Characterizing degrees of competence development

These studies were based on the methodology of teaching experiments, which interrelates teacher training practice and teacher learning research (Llinares, 2014). A teaching experiment includes research cycles taking place over three phases (Design-Based Researcher Collective, 2003). Phase 1 corresponds to the design and planning of instruction where the learning objectives, which define the goals to be achieved, are set and tasks are designed to facilitate the achievement of these objectives (teaching modules). Phase 2 corresponds to the implementation of the designed tasks. In phase 3, a retrospective analysis is carried out in which the teachers and researchers observe and analyze the experience, supporting their analyses with theoretical references. This analysis may lead to modifications in the tasks proposed to students (redesign).

Teaching (or instruction) modules are composed of sessions in which theoretical documents are provided (based on research in Didactics of Mathematics, in the form of hypothetical learning trajectories) as well as professional tasks. These professional tasks consist of teaching-learning situations (records of practice including student responses to problems illustrating levels of students' understanding, interactions between students and teacher, etc.) and three professional questions linked to the three teaching competence skills (identifying, interpreting and making decisions).

To illustrate the structure of these teaching modules, a module on the subject of derivatives, designed for pre-service secondary school teachers (Sánchez-Matamoros, Fernández & Llinares, 2015) is described below.

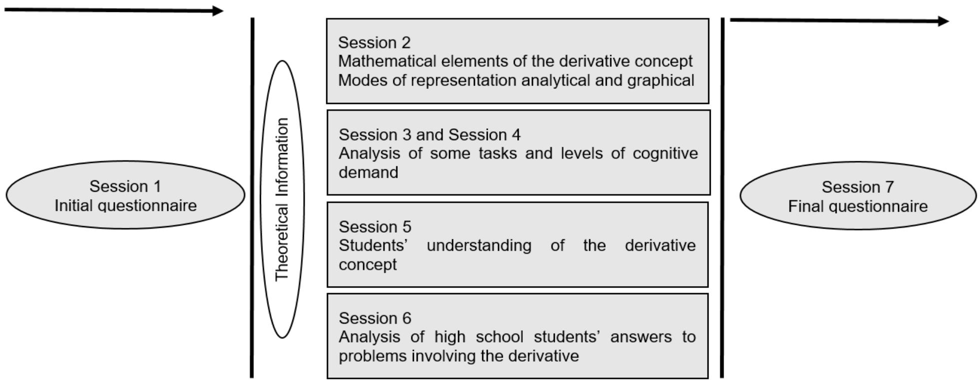


Figure 7. Module design outline in Sánchez-Matamoros et al. (2015, p. 1309)

The module consists of seven 120-minute sessions (Figure 7). In the first and last session, pre-service teachers carried out professional tasks aimed at understanding the development of their ability to recognize evidence of high school students' understanding of the concept of derivative. In the other sessions, the mathematical elements included in the concept of derivative in the different modes of representation, the cognitive demand of the problems, and the characteristics of high school students' understanding of the derivative concept were presented in the form of a hypothetical learning trajectory. This provided information allowed to pre-service teachers sharing a professional discourse on mathematical contents and on high school student understandings of the concept of derivative.

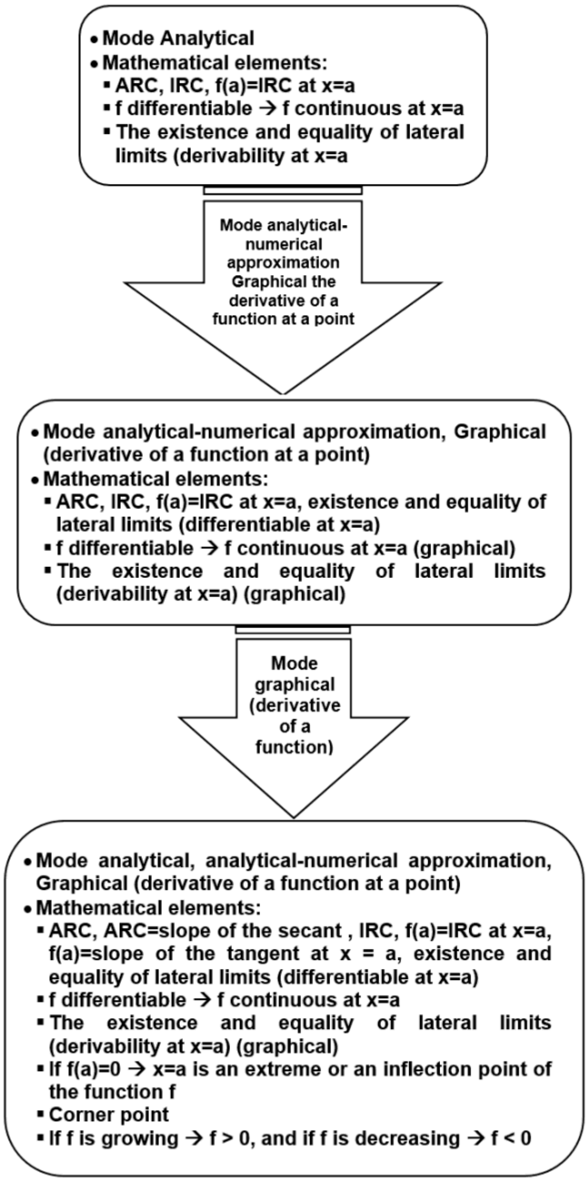


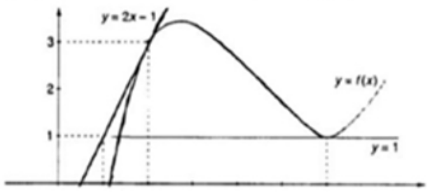
Figure 8. Progression in the understanding of the concept of derivative in Sánchez-Matamoros et al. (2015, p 1308)

This theoretical content, provided as a hypothetical learning trajectory of the derivative concept (a theoretical document), shows how the understanding of the derivative concept develops, based on findings by Sánchez-Matamoros, García and Llinares (2008) (Figure 8). It also presents a typology of the problems and answers proper to high school students. The contents of this hypothetical learning trajectory should be used by pre-service tachers to reason on the records of practice (responses of high school students to the problems of derivatives of a function).

In the study, the two professional tasks corresponded to sessions one (initial) and seven (final). They included the responses of three high school students to three problems (initial task) and another two problems (final task) (Figure 9), as well as three questions addressing the three professional skills. High school student answers revealed different characteristics of the understanding of the concept of derivative, in relation to mathematical elements and modes of representation, in accordance with the progression in understanding (Figure 8).

Problem 2

L is the tangent line to the graph of the function at a point (2, 3) as it is shown in the figure. Find f (2) and f ’ (2).



Student 1		
Student answer		**Interview**
Answer	**Explain your answer**	
$f(x) = 2x - 1$ $f(2) = 2\cdot 2 - 1 = \underline{3}$ $f'(2) = \underline{2}$	*The value of f at a (2, 3) is y=2x+1* *If you substitute the x for 2, you obtain f(2)* *The derivative of f(2) is 2 because the function is 2x – 1* *Taking into account the graph when x is 2, the value of y is 3*	**I:** You substitute in y=2x+1 to find the value of f (2). Could you find this value using another way? **S1:** Yes, using the graph. At x=2, the value of y is 3. **I:** f ‘ (2) = 2? **S1:** The derivative of “2x + 1” is 2. **I:** In the task, you have to find f ‘ (2) considering f(x) but you do not know its analytical expression. Could you reason it in another way? **S1:** I couldn’t

Figure 9. Response of a student to problem 2 in a professional task

(Sánchez-Matamoros et al., 2015, p. 1312)

We have considered different mathematical domains and teaching levels: pre-service preschool teachers, length and length measurement (Sánchez-Matamoros, Moreno, Callejo, Pérez-Tyteca & Valls, 2017); pre-service primary teachers and fractions (Ivars, Fernández & Llinares, 2017), pre-service secondary teachers and classification of quadrilaterals (Llinares, Fernández & Sánchez-Matamoros, 2016), the concept of derivative (Sánchez-Matamoros et al., 2015) and the concept of limit of a function (Fernández, Sánchez-Matamoros, Callejo & Moreno, 2015). Results allowed us to characterize degrees in the development of teaching competence. Descriptors of these degrees were based on: instrumentation of the hypothetical learning trajectory given in the teaching module (Verillon & Rabardel, 1995); progress in mathematical discourse describing student mathematical thinking provided in the hypothetical learning trajectory; and consideration of the understanding of certain mathematical elements of the concept as Key Developmental Understanding (KDU, Simon, 2006).

Sánchez-Matamoros et al. (2017) used the instrumentation of the hypothetical learning trajectory (Verillon & Rabardel, 1995) to analyze pre-service pre-school teachers’ competence development in the domain of length magnitude and its measurement. The instrumentation of a hypothetical learning trajectory is understood as the way in which pre-service teachers construct their schemas of instrumental action in order to understand the trajectory’s possibilities and limitations in assisting their reasoning in practice. These instrumental action schemes progressively turn into techniques leading to effective responses to professional tasks. This study shows that learning to use a hypothetical learning trajectory as a conceptual instrument did not take place directly, but was progressive.

We consider that the instrumentation, by pre-service teachers, of a hypothetical learning trajectory for a mathematical concept is evidence that they are developing their professional noticing of children’s mathematical thinking. This working hypothesis is based on the idea that the development of instrumental action schemas is based on the implicit recognition of characteristics of children's understandings: they identify the mathematical elements involved in the teaching-learning situation and interpret children's answers, leading to propose tasks directed at children's progress in learning. Below are stages in the development of trajectory instrumentation:

- does not use the hypothetical learning trajectory as a conceptual instrument, by not identifying or rhetorically (meaningless) using mathematical elements;
- partially instruments the trajectory, when interpreting the understanding and set activities that allow some children to progress in their learning, but not all;
- instruments the trajectory when interpreting the understanding of all children, making use of the progression model and when proposing activities for all children, taking into account the progression model and the trajectory's set of tasks. This last level can be understood as the development of two schemes of instrumental action: one linked to the interpretation of understanding and another to proposing activities in accordance with that understanding.

The progressive use of the hypothetical learning trajectory throughout the teaching module generates indicators on how the competence of professional noticing of children's mathematical thinking develops (Figure 10).

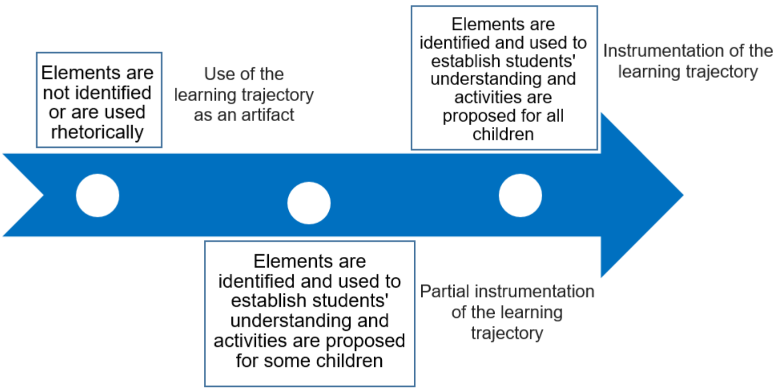


Figure 10. Characteristics of the development of professional noticing of preschool children's mathematical thinking on length and length measurement

Since the use of theoretical references in the teaching modules can provide pre-service teachers with a mathematical language and a language about students' learning enabling to describe students' mathematical thinking (Walkoe, 2015), Ivars et al. (2017) examine how progress in professional discourse may lead to indicators on the development of teacher's professional noticing of students' mathematical thinking. This research focuses on pre-service primary school teachers taking part in a teaching module designed around a hypothetical learning trajectory of the fraction concept. The initial results showed that, after participating in the module, pre-service teachers elaborated a more detailed discourse on students' mathematical thinking, providing evidence to support their interpretations. This led us to supose that the hypothetical learning trajectory helped to advance professional discourse. In addition, pre-service teachers who elaborated a more detailed discourse on students' mathematical thinking provided more decisions that did focus on students' conceptual progress. This suggests that progress in professional discourse seems to influence the ability to decide, generating activities that are more in line with students' understandings.

When hypothetical learning trajectories are introduced as a reference to help pre-service teachers interpret student mathematical thinking, an important aspect in the development of teaching competence is the recognition of the mathematical elements whose understanding advances student conceptual learning. Some studies have attempted to characterize degrees of development based on this aspect. Llinares et al. (2016), Sánchez-Matamoros et al. (2015) and Fernández et al. (2015) studied how pre-service secondary teachers considered the understanding of some mathematical elements of the concept as a Key Developmental Understanding (KDU). A KDU implies students advance conceptually, that is, they undergo a change in their ability to think and/or perceive mathematical relationships (Simon, 2006, p. 362). Thus, a KDU becomes a key element in the development of a concept whose recognition by pre-service teachers allows taking into account degrees of development of the teaching competence. The fact that pre-service teachers recognize the understanding of certain mathematical elements as a KDU can help them understand how students give meaning to mathematical concepts. Our assumption is that, if pre-service teachers focus their attention on the KDU of a mathematical concept, they will be able to better anticipate or interpret the development of the concept's understanding.

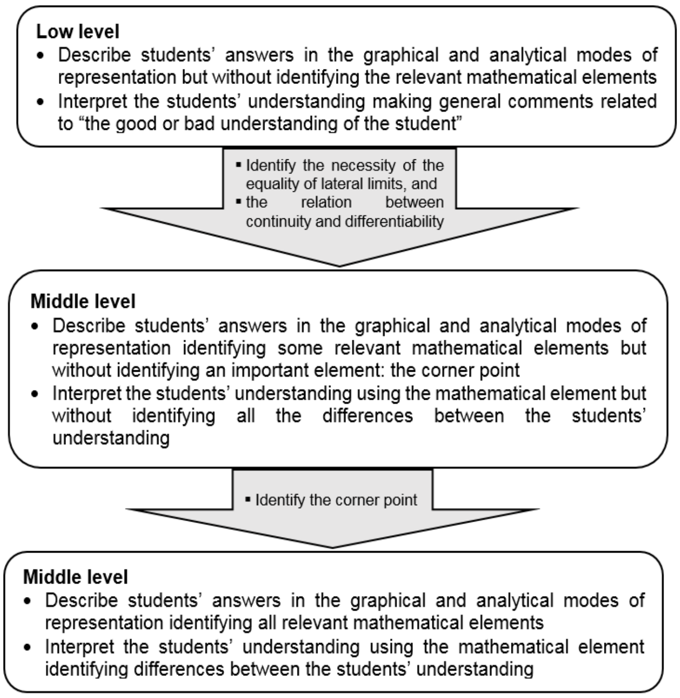


Figure 11. Degrees of development of the competence in the derivative domain (Sánchez-Matamoros et al., 2015, p. 1325)

Sánchez-Matamoros et al. (2015) provided descriptors of degrees of competence development in the domain of the derivative (low, medium and high) taking this into account. That is, degrees of development were determined by how pre-service secondary teachers considered the understanding of some mathematical elements of the derivative concept as KDU (Figure 11): (a) relation between the difference quotient limit and the meaning of the derivative as gradient of the tangent line, (b) relation between the derivability of the function and its continuity, and (c) information about the function or derivative function around the inflection points and the corner point.

In the same way, the results of Llinares et al. (2016) are based on the idea that students' understanding of inclusive relationships in the quadrilateral classification can be considered a KDU, since it requires a change in the student's ability to think and/or perceive relationships. Llinares et al. (2016) identified three changes in how pre-service teachers considered inclusive relationships in the classification of quadrilaterals as a KDU throughout the teaching module (Figure 12). These changes enable to characterize different degrees of development in this teaching competence.

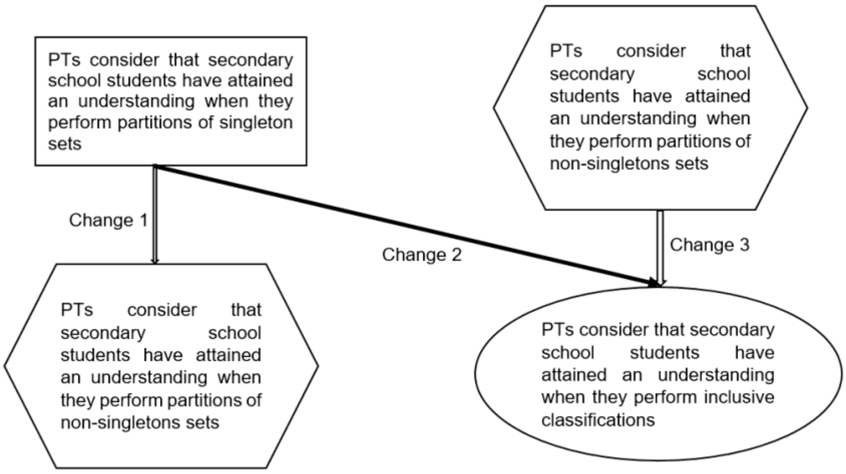


Figure 12. Changes in the recognition of inclusive relationships as a KDU

(Llinares et al., 2016, p. 2163)

At the end of the teaching module, some pre-service secondary school teachers were aware that the ability of a secondary student to establish inclusion relationships between figures within a set was evidence of the understanding of quadrilateral classification (changes 2 and 3). In this way, these pre-service teachers began to use students' understanding of inclusive relationships as an indicator of the conceptual understanding (KDU). However, one group of pre-service teachers considered that this understanding was shown by the ability to create partitions of the set of quadrilaterals, assuming the existence of non-unit sets, though without progressing towards the recognition of the relationships between the properties that would generate some type of inclusive classification (change 1). That is, the pre-service teachers in this group did not recognize the role that the understanding of inclusive relationships could play in the learning of quadrilateral classification. These three changes made it possible to identify transitions in pre-service teachers when they were learning about secondary school students' understanding of the quadrilateral classification process. These results allowed us to infer characteristics on the different degrees of development of the teaching competence. These can be understood as characteristics of a learning trajectory for pre-service teachers (Figure 13).

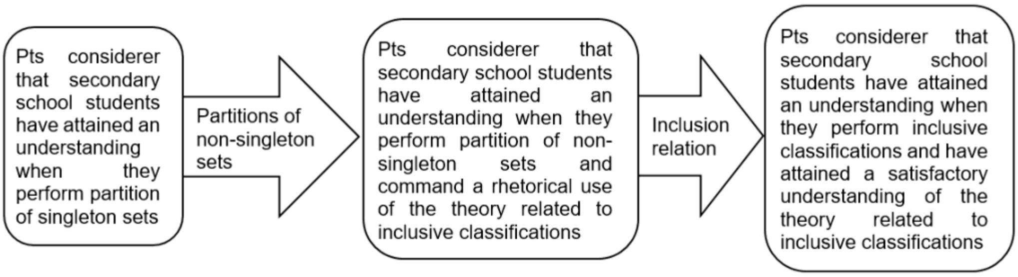


Figure 13. Pre-service teachers' development of noticing students' mathematical thinking relating to the quadrilateral classification process (Llinares et al., 2016, p. 2168)

Fernández et al. (2015) show that when pre-service secondary school teachers consider as a KDU, the understanding of approximation processes coordination across different modes of representation -when learning about the concept of limit of a function at a given point-, they could interpret different characteristics of understanding in the secondary students' responses. They could also propose decisions directed towards students' conceptual progress. Throughout the teaching module, three manifestations of competence development were observed. One manifestation was making incorrect or rhetorical (meaningless) use of mathematical elements of the concept of limit of a function at a given point, when describing the students' responses. This led them to simply recognize the answers as correct or incorrect. Another manifestation was to consider that students progressed in their learning when identifying characteristics of students' unsderstanding as they considered that the understanding of approximation coordination of domain and range across modes of representation was a KDU. The last manifestation consisted in supporting the proposal of new activities defining the understanding of approximation coordination across different modes of representation (the KDU) as a learning objective.

4.1. Discussion and future perspectives

Our research has generated descriptors of degrees of competence development in different mathematical domains. These descriptors inform on how competence begins to develop in initial training programs and can be used in the instructional design of training proposals (Sánchez-Matamoros et al., 2015; Llinares et al., 2016). However, more studies are needed in this line of research in order to design teaching modules based on empirically generated competence development trajectories.

As teacher educators and researchers, our aim is to explain how pre-service teachers learn to interpret teaching situations. The challenge is defining how to analyse the learning of this competence. Our research has contributed to characterizing pre-service teacher learning considering: the instrumentation of the hypothetical learning trajectory given in the teaching module; the progression in professional discourse on students' mathematical thinking; and the role of recognizing the understanding of certain mathematical elements of a concept as KDU.

Teaching experiments constituted the contexts for interrelating teacher training and research on teacher learning (Llinares, 2014). This methodology allows improving teacher training practice based on the design of teaching modules for teacher training programs, and on iterations of design and revision cycles. The question thus arises as to which teaching module features foster the development of teachers' professional noticing of students' mathematical thinking in training programs. Our research concludes by suggesting some of these features, as well as the design of professional tasks and contexts (third area of research). It also recommends actions that pre-service teachers should undertake to support the development of their teaching competence.

5. Contexts for competence development

We used different contexts to support the acquisition of skills constituting teaching competence. In previous sections we described some of the tasks that were carried out. In this section we specify other contexts that we used to support skill development: the writing of narratives during periods of observation of practices focusing on relevant learning situations of mathematics (Ivars et al., 2016); online discussions between pre-service teachers (Fernández, Llinares & Valls, 2012); interactions between in-service teachers and trainers (Coles, Fernández & Brown, 2013); and *feedback* between tutor and pre-service teacher (Ivars & Fernández, 2018).

5.1. Writing narratives

Narratives are stories in which the author sequentially relates events that make sense to him, based on an internal logic (Chapman, 2008; Ponte, Segurado & Oliveira, 2003). Considering pre-service teachers as storytellers in training programs can help them to observe teaching situations in an increasingly structured way, giving meaning to their experience during their practices.

In Ivars et al. (2016), a total of 39 pre-service teachers were asked, during their practices period in primary schools, to write a narrative describing classroom events that they considered potentially relevant to explain the mathematical learning they were observing. To articulate the narrative, they were given some guiding questions based on the three skills involved in professional noticing of teaching-learning situations: describe, interpret and decide (Figure 14). In their narratives, 21 out of 39 pre-service teachers identified the relevant mathematical elements of the teaching-learning situation, providing interpretations and evidence of students' understanding. However, only 11 out of these 21 pre-service teachers proposed decisions aimed at fostering student understanding of the relevant mathematical elements of the situation. On the one hand, these results indicate the potential of narratives to help structure observations of teaching situations. On the other hand, the narratives about teaching situations observed by pre-service teachers inform us on how teaching competence skills are integrated; the ability to make teaching decisions is especially difficult.

- Describe *"in detail" the mathematics teaching-learning situation.* The task (curricula contents, materials, resources…). What did elementary school students do? For example, you can indicate some students' answers to the task, difficulties… What did the teacher do? For instance, you can describe the methodology and some aspects of the interactions.
- *Interpret the situations.* Indicate the mathematical objective of the task and how the task was implemented. Indicate some evidence of students' answers that show that elementary school students had achieved the objectives (students' understanding of the mathematical content) and/or the difficulties they had.
- *Complete the situation.* Complete the situation indicating how you will continue in order to help students develop other aspects of the mathematical competence identified (that is, in order to support students in their conceptual development).

Figure 14. Guiding questions based on the three skills involved in professional noticing (Translated from Ivars et al., 2016, pp. 83-84)

5.2. Online discussions and interaction

In sociocultural approaches to learning, where knowledge is constructed through social interactions (Wells, 2002; Wenger, 1998), argumentation -as negotiation of meaning- plays a key role (Clark & Sampson, 2008; Llinares, 2012). Knowledge of a situation can be built through a process of dialogical argumentation that takes place when meanings are examined for reaching a consensus. For example, interactions between pre-service teachers in online debates, face-to-face interactions between in-service teachers and trainers, or written feedback between tutors and pre-service teachers (Shute, 2008) are manifestations of collaborative negotiation of meanings.

From the perspective of professional noticing of student mathematical thinking, interaction and feedback can help pre-service teachers to focus their attention on important mathematical elements of student thinking, recognize their understanding and make teaching decisions directed to student conceptual progress. In Fernández et al. (2012), participation in an online debate allowed students to reach a consensus on the mathematical elements identified in student responses, and interpret their understanding to propose teaching decisions. Pre-service teachers who had not considered those mathematical elements and, thus, had not identified profiles in student proportional reasoning (levels 1 and 2, Figure 15) began to identify features of student profiles (levels 3 and 4, Figure 15) after participation in the online discussion.

Table 3. Prospective teachers' level of expertise before and after on-line discussions

	Level of noticing before on-line discussion	Level of noticing after on-line discussion
Level 1	PT2, PT4, PT5, PT6	PT2
Level 2	PT7	
Level 3	PT1, PT3[a]	PT4, PT5, PT6, PT7[b]
Level 4		PT1, PT3[c]

[a] Both prospective teachers identify 2 out of 4 students' profiles
[b] Some of them identify 1 or 2 out of 4 students' profiles
[c] Both prospective teachers identify 3 out of 4 students' profiles

- *Level 1.* The prospective teachers do not discriminate proportional from additive situations. These prospective teachers only describe students' answers without relating the characteristics of the problem with the students' answers.
- *Level 2.* The prospective teachers discriminate proportional from additive problem relating students' answers with the characteristics of the problems, but they do not justify their answers attending to the mathematical elements of each situations.
- *Level 3.* The prospective teachers discriminate proportional from additive problem relating students' answers with the characteristics of the problems, and they justify their answers attending to the mathematical elements of each situations. However, they do not identify students' profiles.
- *Level 4.* The prospective teachers discriminate proportional from additive problem justifying trough the mathematical elements and identify the students' profiles.

Figure 15. Prospective teachers' level of expertise before and after online discussions (Fernández et al., 2012, p.753, 755)

Coles et al. (2013) showed that project meetings between in-service teachers, addressing low performance and creativity in class work, revealed changes in the way in-service teachers professionally noticed students' mathematical thinking. Thus, using the indicators proposed by Jacobs et al. (2010), changes were identified in the professional noticing of students' mathematical thinking. Finally, Ivars and Fernández (2018) showed that university tutor feedback on the narratives written by pre-service teachers during their practices period allowed them to focus on students' understanding according to the mathematical elements and led to teaching decisions (activities) directed to fostering students' conceptual progress.

5.3. Discussion and future perspectives

Our research converges with research by other international groups. Some studies have showed that the analysis of video clips illustrating interactions between teachers and students and between students solving problems (Santagata & Yeh, 2016; Schack et al., 2013; van Es & Sherin, 2002, 2008), or the interpretation of written students' responses focusing on errors (Cooper, 2009; Son, 2013) favour the development of professional competence. In this line, our research provides contexts that seem to facilitate this development, namely: writing of narratives during periods of practices at schools, online debates encouraging interactions between pre-service teachers or between pre-service teachers and trainers, face-to-face meetings, or written feedback.

Therefore, these results reveal which contexts can be used when designing teaching modules for pre-service teacher training programs to foster professional noticing of students' mathematical thinking. Other contexts such as sharing narratives with colleagues over online debates or writing narratives about their own practice represent future lines of research.

6. Final reflections

Our research is contributing to understandi

ng which necessary characteristics teaching modules should possess when designing training programmes to develop the teaching competence of professional noticing of students' mathematical thinking: characteristics of the design of professional tasks (interpreting student responses with different degrees of understanding using a learning trajectory) and contexts that support their development (narratives and interaction).

Additionally, our research has begun to generate descriptors related to the degree of competence development in different mathematical domains, characterizing this development in relation to: the instrumentation of the hypothetical learning trajectory facilitated in the teaching module; progress in professional discourse to describe students' mathematical thinking; and the role of recognizing students' understanding of a concept's mathematical elements as a key to understanding student progression. These descriptors are making it possible to identify teacher learning trajectories in a similar way to the hypothetical learning trajectories of mathematical concepts applied to primary or secondary students (Simon, 2006). However, teachers' learning trajectories depend on how the following competence skills are articulated: identifying, interpreting and making decisions, and the relationships between them. Therefore, a future line of research for our group is to centre on designing teaching modules for pre-service primary and secondary school teachers based on empirically generated trajectories of competence development, as well as on the iteration of these cycles of design and review to improve teacher training practices.

To finish, most studies focusing on characterizing the relationship between professional noticing skills, degrees of competence development or examining contexts that favour competence development have centred mostly on pre-service primary school teachers. The fact that these studies were carried out to a lesser extent in secondary school is due to researchers' methodological challenges, i.e. lack of artefacts (videos or responses from secondary students) and missing theoretical references such as secondary students' hypothetical learning trajectories of certain mathematical concepts (Nickerson, Lamb & La Rochelle, 2017). Krupa, Huey, Lesseig, Casey and Monson (2017) highlight the need to explore the feasibility of tasks and contexts used at the elementary level, to develop competence in pre-service secondary school teachers. The structure of our designed teaching modules and professional tasks focusing on interpreting student responses to various problems with different levels of understanding, using a student learning trajectory designed ad hoc led this transfer to the secondary level.

Acknowledgements

EDU2014-54526-R and EDU2017-87411-R, MINECO/FEDER; PROMETEO/ 2017/135, Generalitat Valenciana, Spain.

References

Barnhart, T., & van Es, E. A. (2015). Studying teacher noticing: examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education, 45,* 83-93

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16,* 57-79.

Battista, M. T. (2012). *Cognition-Based assessment and teaching of fractions: building on students' reasoning*. Portsmouth, USA: Heinemann.

Buforn, A., Llinares, S., & Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación a la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 76*(23), 229-251.

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20,* 309-333.

Chapman, O. (2008). Narratives in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and processes in mathematics teacher education* (Vol. 2, pp. 15-38). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Choy, B. H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal, 28,* 421-440.

Clark, D., & Sampson, V. (2008). Assessing dialogic argumentation in online environments to relate structure, grounds and conceptual quality. *Journal of Research in Science Teaching, 45*(3), 293-321.

Coles, A., Fernández, C., & Brown, L. (2013). Teacher noticing and growth indicators for mathematics teachers' development. En A. M. Lindmeier & A. Heinze, (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 209-216). Kiel, Germany: PME.

Cooper, S. (2009). Preservice teacher's analysis of children's work to make instructional decisions. *School Science and Mathematics, 109*(6), 355-362.

Design-Based Researcher Collective (2003). Design-Based Research: an emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P., & Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator, 5*(1), 65-80.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM, 44*, 747-759.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2013). Primary school teachers' noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 441-468.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L., & Moreno, M. (2015). ¿Cómo estudiantes para profesor comprenden el aprendizaje de límite de una función? En C. Fernández, M. Molina & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 249-257). Alicante: SEIEM.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., & Llinares, S. (2015). Learning about students' mathematical thinking using "KDU". En K. Beswick, T. Muir & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 281-288). Hobart, Australia: PME.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias, 36(*1), 143-162.

Goodwin, C. (1994). Professional vision. *American Anthropologist, 96*, 606-633.

Ivars, P., & Fernández, C. (2018). The role of writing narratives in developing pre-service elementary teachers' noticing. In G. Stylianides & K. Hino (Eds.), *Research Advances in the Mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers. ICME-13 Monographs*. Hamburg, Germany: Springer.

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2016). Cómo estudiantes para maestro miran de manera estructurada la enseñanza de las matemáticas al escribir narrativas. *La Matemática e La Sua Didattica, 24*(1-2), 79-96.

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2017). Pre-service teachers' uses of a learning trajectory to notice students' fractional reasoning. In B. Kaur, W. H. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 25-32). Singapore: PME.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Krupa, E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S., & Monson, D. (2017). Investigating secondary preservice teacher noticing of students' mathematical thinking. In E. O. Schack, M. H. Fisher & J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 49-72). London, UK: Springer.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada professional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 53-70.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: a component of the mathematics teacher's professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, March, 31-51.

Llinares, S., Fernández, C., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasian Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(8), 2155-2170.

Llinares, S., & Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 177-196.

Llinares, S., & Valls, J. (2009). The building of preservice primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science, 37*, 247-271.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London, UK: Routledge-Falmer.

Nickerson, S., Lamb, L., & LaRochelle, R. (2017). Challenges in measuring secondary mathematics teachers' professional noticing of students' mathematical thinking. In E. O. Schack, M. H. Fisher, & J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 381-398). London, UK: Springer.

Ponte, J. P., Segurado, I., & Oliveira, H. (2003). A collaborative project using narratives: What happens when pupils work of mathematical investigations? In A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen & A. Begg (Eds.), *Collaboration in teacher education: examples from the context of mathematics education* (pp. 85-97). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Press.

Radford, L. (2014). The progressive development of early-embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*, 257–277.

Schack, E., Fisher, M., Thomas, J., Eisenhardt, S., Tassell, J., & Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 379–397.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(6), 1305-1329.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., & Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. In A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497 - 508). Jaén: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P., & Valls, J. (2017). Desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente": un estudio de caso. In J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 457-466). Zaragoza: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Santagata, R., & Yeh, C. (2016). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginning teachers' competence. *ZDM, 48*(1-2), 153-165.

Shute, V. J. (2008). Focus on formative feedback. *Review of Educational Research, 78*(1), 153-189.

Simon, M. (2006). Key Developmental Understanding in mathematics: a direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 359-371.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 49-70.

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM, 48*(1-2), 1-27.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41*(5), 147–156.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*, 571-596.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24*(2), 244-276.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education, 9*(3), 77-101.

Walkoe, J. (2015). Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*, 523-550.

Wells, G. (2002). *Dialogic inquiry. Towards a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge, USA: Cambridge University Press.

References of the authors

Ceneida Fernández, Universidad de Alicante (España). ceneida.fernandez@ua.es

Gloria Sánchez-Matamoros, Universidad de Sevilla (España). gsanchezmatamoros@us.es

Julia Valls, Universidad de Alicante (España). julia.valls@ua.es

M. Luz Callejo, Universidad de Alicante (España). luz.callejo@ua.es

Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts

Ceneida Fernández, Universidad de Alicante

Gloria Sánchez-Matamoros, Universidad de Sevilla

Julia Valls, Universidad de Alicante

M. Luz Callejo, Universidad de Alicante

In this paper, we summarise results from the research group of Didactics of Mathematics at University of Alicante (Spain) about professional noticing. The research focused on three issues over the last years: characterizing the relationship between the skills linked to professional noticing of student mathematical thinking, characterizing degrees of this competence development, and identifying contexts that support such development. The series of studies considered different mathematical domains (length magnitude and its measurement, fraction, generalization of patterns, proportionality, limit of a function at a given point, derivative of a function and classification of quadrilaterals) and educational levels (pre-service preschool teachers, pre-service primary and secondary school teachers). The three issues respectively address three questions. Firstly, how pre-service teachers notice student mathematical thinking (how they identify, interpret student mathematical thinking and decide according to their interpretations). Results led us to understand relationships between the skills of identifying, interpreting and making decisions, during initial training programs while teaching competence developed. Secondly, how pre-service teachers develop this competence. Results led us to generate descriptors of degrees of development. Our research has contributed to characterize pre-service teacher learning through: the instrumentation of the hypothetical learning trajectory given in the teaching module; the progression in professional discourse on student mathematical thinking; and the role of recognizing the understanding of certain mathematical elements of a concept as KDU. The descriptors are making it possible to identify teacher learning trajectories in line with the articulation of the skills of identifying, interpreting and making decisions, and the relationships between them. Thirdly, which contexts support the development of professional noticing. Our research concludes by suggesting some features of teaching modules that foster the development of teacher professional noticing in training programs, as well as the design of professional tasks and contexts. Major results in each issue are presented and discussed together with challenges for the future. A future line of research for our group is to centre on designing teaching modules for pre-service primary and secondary teachers based on empirically generated trajectories of competence development.

Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM

Juan D. Godino, Universidad de Granada (España)

Belén Giacomone, Universidad de Granada (España)

Vicenç Font, Universitat de Barcelona (España)

Luis Pino-Fan, Universidad de los Lagos (Chile)

Recibido el 30 de noviembre de 2017; aceptado el 2 de marzo de 2018

Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM

Resumen

Dada la importancia de promover en los profesores en formación su competencia de análisis e intervención didáctica, en este artículo se describe y analiza una actividad para la formación de profesores de matemáticas orientada al desarrollo de dicha competencia. El diseño está basado en la descripción, explicación y valoración de los conocimientos puestos en juego en un episodio de clase video-grabada en la que un profesor gestiona el estudio de la semejanza de triángulos con un grupo de estudiantes de secundaria. Este episodio está siendo usado en diversas intervenciones formativas en el marco de un máster de formación de profesorado de matemática de educación secundaria para contextualizar la aplicación de algunas herramientas del modelo teórico de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos (CCDM). El análisis a-priori realizado destaca la importancia de que los futuros profesores desarrollen competencias en el uso de herramientas específicas que les ayuden a reflexionar sobre la práctica docente.

Palabras clave. Formación de profesores; reflexión profesional; matemáticas; modelo CCDM; enfoque ontosemiótico.

Conhecimentos profissionais no desenho e gestão de uma aula sobre semelhança de triângulos. Análise com ferramentas do modelo CCDM

Resumo

Dada a importância de promover nos professores em formação competências de análise e de intervenção didática, neste artigo descreve-se e analisa-se uma atividade de formação de professores de matemática orientada para desenvolver as referidas competências. O desenho está baseado na descrição,

Para citar: Godino, J. D.; Giacomone, B.; Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 13, 63 - 83.*

explicação e avaliação dos conhecimentos postos em jogo num episódio de aula, vídeo gravada, em que o professor orienta o estudo da semelhança de triângulos com um grupo de estudantes do nível secundário. Este episódio tem vindo a ser utilizado em diversas intervenções formativas no curso de Mestrado, de formação de professores de matemática de educação secundária, para contextualizar a aplicação de algumas ferramentas do modelo teórico de Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticas (CCDM). A análise à priori realizada destaca a importância dos futuros professores desenvolverem competências no uso de heurísticas específicas que os ajudem a refletir sobre a prática docente.

Palavras chave. Formação de professores; reflexão profissional; matemática; modelo CCDM; perspetiva ontossemiótica.

Professional knowledge in the design and management of a class on similar triangles. Analysis with tools of the DMKC model

Abstract

Given the relevance of promoting the didactic analysis and intervention competence of trainee teachers, in this paper we analyse an activity aimed to develop this competence in the education of mathematics teachers. Using a video-recorded episode, the activity consists of describing, explaining and evaluating knowledge put into play by a teacher when managing the study of similar triangles with a group of high school students. This episode is being used in various formative interventions to contextualize the application of the Didactic-Mathematical Knowledge and Competencies (DMKC) theoretical model within the framework of a master degree for secondary school mathematics teaching. The a-priori analysis highlights the need that prospective teachers develop competences to use tools that help them to reflect on the teaching practice.

Keywords. Teacher education; professional reflection; mathematics; DMKC model; ontosemiotic approach.

Connaissance professionnelle dans la conception et la gestion d'une classe sur la similitude des triangles. Analyse avec les outils du modèle CCDM

Résumé

Compte tenu de l'importance de promouvoir chez les professeurs en formation leur compétence d'analyse et d'intervention didactique, cet article décrit et analyse une activité de formation des enseignants de mathématiques orientée vers le développement de cette compétence. Le design est basé sur la description, l'explication et l'évaluation des connaissances mises en jeu dans un épisode de classe vidéo dans lequel un enseignant gère l'étude de la similarité des triangles avec un groupe d'élèves du secondaire. Cet épisode est utilisé dans diverses interventions de formation dans le cadre d'un master pour la formation des enseignants de mathématiques de secondaire pour contextualiser l'application de certains outils du modèle théorique des Connaissances et des Compétences Didactique-Mathématiques (CCSM). L'analyse a priori effectuée souligne l'importance pour les futurs enseignants de développer des compétences dans l'utilisation d'outils spécifiques qui les aident à réfléchir sur la pratique professionnelle.

Paroles clés. Formation des enseignants; réflexion professionnelle; mathématiques; modèle CCDM; approche ontologique et sémiotique.

1. Introducción

Un cuerpo emergente de investigación en el campo de la educación matemática está relacionado sin duda con la importancia de reflexionar de manera profesional sobre la práctica docente, pasando a ser un objetivo importante en la formación de profesores, y más aún, una competencia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. De esta manera, nuevos enfoques teóricos se han centrado en desarrollar herramientas y promover métodos de investigación que ofrecen amplias perspectivas para afrontar este objetivo (Gellert, Becerra & Chapman, 2013). Algunos ejemplos claros de estos enfoques son *Lesson Study* (Fernández & Yoshida, 2004), *Mirar con sentido profesional* (Fortuny & Rodríguez, 2012; Llinares, 2012; Mason, 2002), *Concept Study* (Davis, 2008), en los cuales se trata de promover la reflexión del profesor sobre la acción, de manera individual o en interacción con sus pares, identificando factores claves que afectan los procesos de estudio y así, tomar decisiones basadas en tales reflexiones.

Una revisión de la literatura deja clara la importancia del papel de la reflexión y la necesidad de potenciarla en el ámbito profesional (Korthagen, 2010). Esto conduce a encontrar estrategias o propuestas didácticas que favorezcan el desarrollo de la práctica reflexiva en los docentes. Desde distintos enfoques de investigación se han utilizado tareas específicas, en programas de formación del profesorado, que ayudan a desarrollar este objetivo (e.g., Coles, 2014; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi & Battey, 2007; Llinares, 2013; Ponte, 2011; Sherin & Dyer, 2017; Star & Strickland, 2008; Van Es & Sherin, 2008), en un intento de sistematizar los procesos de reflexión del profesor sobre su práctica.

Como parte de estos nuevos enfoques en la formación de profesores de matemáticas, este artículo es una reflexión teórica, dirigida a los formadores de profesores de matemáticas, que trata de resaltar la necesidad de disponer de *herramientas de análisis* específicas que ayuden a realizar tres tareas básicas del trabajo docente: descripción, explicación y valoración de la práctica de enseñanza y aprendizaje. Para contextualizar dicha reflexión, nos apoyamos en el análisis retrospectivo de una acción formativa llevada a cabo con futuros profesores de matemáticas de secundaria, en la que se les presenta un episodio de clase video-grabado sobre semejanza de triángulos y se solicita la realización de un análisis didáctico. Las consignas dadas a los futuros profesores solicitan describir, explicar y valorar el contenido matemático puesto en juego, los roles del profesor y los alumnos, el uso de recursos instruccionales, y el reconocimiento de normas como factores explicativos de los comportamientos.

Las herramientas de análisis didáctico que proponemos forman parte del modelo de *Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas* (CCDM) desarrollado en diversos trabajos[1] (Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017; Breda, Pino-Fan & Font, 2017), y que está basado en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2007). Este modelo destaca, entre otras, la competencia de análisis de la idoneidad didáctica, refiriéndose a la competencia para la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva. Asimismo, estos autores dejan planteada la importancia de diseñar e implementar recursos formativos que promuevan la realización de este tipo de análisis por parte de los profesores.

A continuación, en la sección 2, se presenta una síntesis del modelo CCDM que fundamenta el análisis del episodio y del diseño de las acciones que se proponen desde el EOS para la formación de profesores. En la sección 3 se describe la acción formativa propuesta. En la sección 4 se realiza el análisis de los conocimientos y competencias del

[1] Las publicaciones realizadas en el marco del EOS, aplicando el modelo CCDM, están disponibles en el sitio web http://enfoqueontosemiotico.ugr.es (entrada sobre Formación de profesores).

profesor que gestiona la clase video grabada, haciendo mención a las herramientas del modelo CCDM y a referencias complementarias. Seguidamente se reconocen las limitaciones de la información disponible para realizar un análisis más completo de los fenómenos didácticos implicados. En la sección 6 se plantean las reflexiones finales e implicaciones de esta investigación para el formador de profesores de matemáticas.

2. Síntesis del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM)

En el marco del EOS (Godino et al., 2007) se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos del profesor de matemáticas (modelo CDM), inicialmente introducido como un sistema de categorías de análisis, refinado y aplicado en diversas investigaciones (Pino-Fan, Assis & Castro, 2015; Pino-Fan & Godino, 2015; Pino-Fan, Godino & Font, 2016; Ortiz & Alsina, 2015). Una de las perspectivas de desarrollo del modelo es el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia del profesor. Por otra parte, también en el marco del EOS, se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias del profesor de matemáticas (Font, Breda & Sala, 2015), las cuales han puesto de manifiesto la necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor para poder evaluar y desarrollar sus competencias. Estas dos agendas de investigación han confluido generando el modelo llamado Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (modelo CCDM), descrito recientemente por Godino et al. (2017).

El modelo CCDM es una ampliación del modelo CDM con el cual se propone que los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores pueden organizarse o desarrollarse de acuerdo a las dimensiones matemática, didáctica y meta didáctico-matemática (Figura 1). La dimensión matemática alude a los conocimientos que debe tener un profesor de las matemáticas escolares que enseña; la segunda dimensión alude a los conocimientos sobre aspectos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas (conocimiento profundo de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, recursos y medios, interacciones en el aula y aspectos ecológicos). La dimensión meta didáctico-matemática alude a los conocimientos que debe tener un profesor para poder sistematizar la reflexión sobre su práctica y así emitir juicios valorativos sobre su práctica o la de otros (Breda et al., 2017; Pino-Fan et al., 2016).

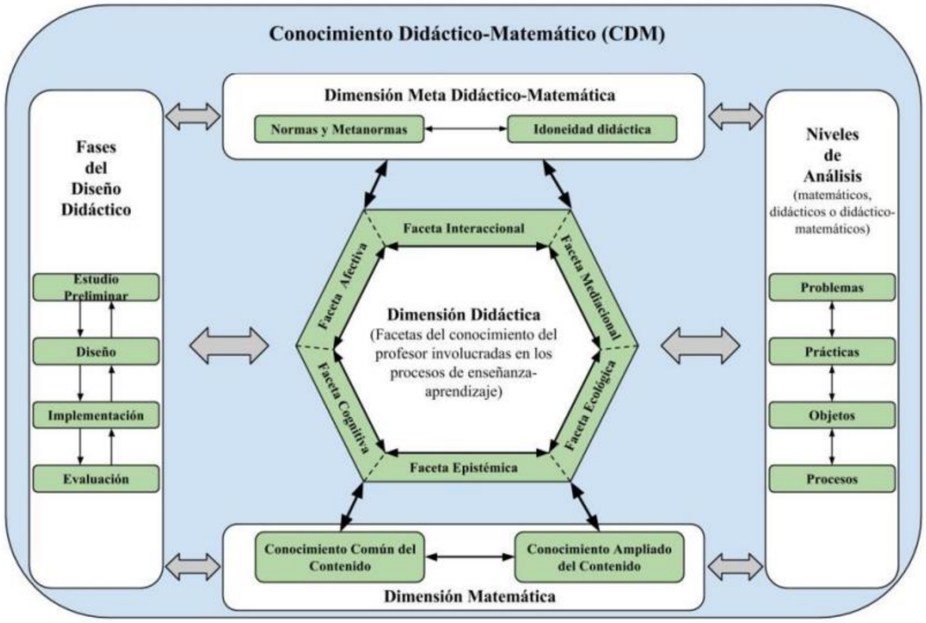


Figura 1. Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) (Pino-Fan & Godino, 2015, p. 103)

El modelo CDM se ha presentado en varios trabajos como una *herramienta teórico-metodológica* que permite caracterizar, y posteriormente desarrollar, competencias claves para la práctica del profesor de matemáticas. Por tanto, es natural pensar en la ampliación del modelo CDM sobre conocimientos del profesor, a un modelo CCDM sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesorado.

En el modelo CCDM se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la *competencia matemática* y la *competencia de análisis e intervención didáctica*, cuyo núcleo (Breda et al., 2017, p. 1897) consiste en: “Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora”. Para desarrollar esta competencia el profesor necesita, por una parte, conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otra, necesita conocimientos para valorar lo que ha sucedido y hacer propuestas de mejora para futuras implementaciones. Por lo tanto, esta competencia global de análisis e intervención didáctica del profesor de matemáticas está formada por cinco sub-competencias, las cuales se identifican en la Figura 2 asociadas a cinco herramientas conceptuales y metodológicas del EOS, cuya descripción sintética se puede encontrar en Godino et al. (2017): competencia de análisis de significados globales (basada en la identificación de situaciones-problemas y prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en su resolución); competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas (identificación de la trama de objetos y procesos implicados en las prácticas); competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didácticas (identificación de la secuencia de patrones de interacción entre profesor, estudiante, contenido y recursos); competencia de análisis normativa (reconocimiento de la trama de normas y metanormas que condicionan y soportan el proceso instruccional); competencia de análisis de la idoneidad didáctica (valoración del proceso instruccional e identificación de potenciales mejoras).

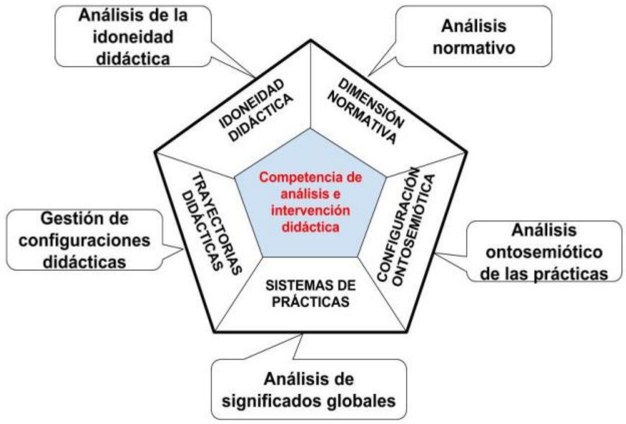


Figura 2. Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica (Godino et al., 2017, p. 103)

3. Descripción de la acción formativa

La actividad que proponemos analizar tiene su origen en un conjunto de actividades de iniciación a la investigación en educación matemática, propuesta en Godino y Neto (2013). Ha sido implementada como parte de una acción formativa en el marco de un curso de máster para la formación de profesores de matemáticas de secundaria y consta de tres fases:

Fase 1: Comentario de un texto

Lectura y discusión de un documento sobre las características de una clase ideal de matemáticas, tomado de las orientaciones curriculares del NCTM (2000, p. 3): *Una visión de las matemáticas escolares*. El objetivo es elaborar una primera reflexión sobre posibles características ideales de una clase de matemáticas. Se trabaja en grupos pequeños sobre una guía de reflexión, siendo un eje motivador para discutir ideas, creencias y concepciones que tienen los futuros docentes sobre las matemáticas y los complejos procesos de su enseñanza y aprendizaje. La fase cierra con un proceso de reflexión sobre la necesidad de conocer y ser competente en el uso de herramientas específicas que le permitan al profesor valorar dicha práctica de manera sistemática; no se trata solo de describir y explicar qué está sucediendo en esa clase ideal, sino también de reflexionar sobre qué aspectos podrían mejorarse.

Fase 2: Puesta en práctica

Se propone ver un fragmento de una clase de matemáticas de educación secundaria video grabada, en el que es posible observar 9 minutos de una clase impartida en México. En el video se identifica una primera etapa dentro del salón de clase, donde los alumnos trabajan en grupos resolviendo problemas relacionados al cálculo de alturas inaccesibles, seguido de la puesta en común de las tareas; en la segunda etapa, los alumnos realizan un trabajo de campo en el patio de la escuela, resolviendo problemas sobre cálculo de alturas de objetos reales (árboles, postes, etc.) a partir de la medida de sombras. En el Anexo se incluye la transcripción del video para facilitar el análisis de las respuestas. Tras ver el episodio, se entrega a los futuros profesores la tarea de reflexión de la Figura 3 y se trabaja en grupos.

En http://www.youtube.com/ watch?v=60s_0Ya2-d8 encontramos un video de una clase de matemáticas. Tras ver el vídeo y trabajando en equipos, elaborar un informe respondiendo a las siguientes cuestiones:

1) Descripción: *¿Qué sucede?*

a. ¿Qué contenido matemático se estudia?
b. ¿Qué significados caracterizan el contenido estudiado?
c. ¿Cuál es el contexto y nivel educativo en que tiene lugar la clase?
d. ¿Qué hace el profesor?
e. ¿Qué hace el alumno?
f. ¿Qué recursos se utilizan?
g. ¿Qué conocimientos previos deben tener los alumnos para poder abordar la tarea?
h. ¿Qué dificultades/conflictos de aprendizaje se manifiestan?
i. ¿Qué normas (regulaciones, hábitos, costumbres) hacen posible y condicionan el desarrollo de la clase?

2) Explicación: *¿Por qué sucede?*

a. ¿Por qué se estudia ese contenido?
b. ¿Por qué se usa un problema realista para estudiar el contenido?
c. ¿Por qué actúa el docente de la manera en que lo hace?
d. ¿Por qué actúa los alumnos de la manera en que lo hacen?

3) Valoración: *¿qué se podría mejorar?*

Emitir un juicio razonado sobre la enseñanza observada en las siguientes facetas, indicando algunos cambios que se podrían introducir para mejorarla:

a. Epistémica (contenido matemático estudiado)
b. Ecológica (relaciones con otros temas, currículo)
c. Cognitiva (conocimientos previos, aprendizaje, …)
d. Afectiva (interés, motivación, …)
e. Interaccional (modos de interacción entre profesor y estudiantes)
f. Mediacional (recursos usados)

4) *Limitaciones de la información disponible:*

¿Qué información adicional sería necesaria para que el análisis realizado fuera más preciso y fundamentado?

Figura 3. Tarea de reflexión didáctica (Giacomone, Godino & Beltrán-Pellicer, 2018, p. 9)

Fase 3: Introducción de una herramienta para la reflexión

Lectura y discusión del artículo: *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (Godino, 2013). En esta fase se discute el artículo, leído previamente por los estudiantes. En este documento se presenta la noción de idoneidad didáctica y un sistema de indicadores de idoneidad didáctica para las facetas implicadas en un proceso de enseñanza y aprendizaje, indicando las concordancias entre los criterios seleccionados y los propuestos por diversos autores y marcos teóricos. La herramienta idoneidad didáctica está alineada, y en cierto modo concuerda, con los Estándares para la Preparación de Profesores de Matemáticas de la Asociación de Educadores de Maestros de Matemáticas (AMTE, 2017), en el sentido de que es útil y posible identificar criterios de buenas prácticas de enseñanza de las matemáticas sobre las cuales existe un cierto consenso en la comunidad de educadores matemáticos.

4. Análisis de conocimientos y competencias del profesor que gestiona la clase video grabada

Aunque el segmento de video solo permite vislumbrar una pequeña parte del desarrollo de la sesión de clase, en las experiencias que hemos realizado ha permitido provocar una reflexión inicial sobre las diversas dimensiones de un proceso de estudio matemático y señalar conocimientos didáctico-matemáticos que pone en juego el profesor. En los apartados que siguen incluimos *posibles intervenciones que el formador* puede tener en cuenta en la fase de discusión de las respuestas dadas por los futuros profesores a las cuestiones en las consignas de la tarea. También hacemos referencia a las herramientas teóricas del EOS que ayudarían a realizar un análisis más sistemático de las facetas correspondientes. El dominio de estas herramientas deberá ser objeto del diseño de otras intervenciones formativas, como las descritas en los trabajos mencionados anteriormente.

Incluimos primero un apartado sobre la necesidad de realizar un estudio preliminar de la situación-problema planteada, orientado a la reconstrucción de un significado global sobre la proporcionalidad que sirva de referencia para los restantes tipos de análisis. Para ello se tendrán en cuenta resultados de la investigación sobre los significados de proporcionalidad (faceta epistémica), los procesos de aprendizaje (faceta cognitiva) y recursos instruccionales (facetas interaccional y mediacional). También habría que tener en cuenta la posición del tema en el currículo y sus conexiones con otros temas y áreas disciplinares (faceta ecológica) (Figura 1). En este ejemplo, por cuestiones de espacio, solo incluimos información parcial sobre la faceta epistémica (significados institucionales de la proporcionalidad).

4.1. Estudio preliminar. Reconstrucción de un significado de referencia sobre la proporcionalidad

En el caso del episodio, los alumnos resuelven la siguiente tarea: “Si la longitud de la sombra de un árbol es de 12m y la de un poste de 1,5m es de 2,25m, ¿cuál es la altura del árbol?” En la resolución se pone en juego un significado aritmético de la proporcionalidad, basado en el establecimiento de la igualdad de razones,

$$\frac{12}{2{,}25} = \frac{x}{1{,}5}$$

O bien, hallando la constante de proporcionalidad mediante un procedimiento de reducción a la unidad (significado algebraico-funcional):

2’25 m → 1’5 m

1 m → 1’5/2’25 m

12 m → (1’5/2’25)×12 m = 8 m.

$$y = \frac{1}{15}x$$

En ambos casos, será necesario evocar el cumplimiento de las condiciones de aplicación de una versión del Teorema de Thales (Font, Breda & Seckel, 2017), y por tanto, un significado geométrico de la proporcionalidad (Figura 4).

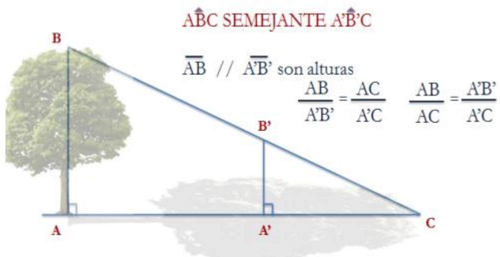


Figura 4. Representaciones gráfica y simbólica

Si se justifica la solución aplicando la ‘semejanza de triángulos’ será necesario justificar que los triángulos formados por los objetos y sus respectivas sombras son semejantes, lo cual requiere evocar que ambos triángulos se pueden poner en ‘posición de Thales’, en cuyo caso se justifica la proporcionalidad de los segmentos correspondientes.

Debido al uso mecánico de algoritmos y reglas, se puede resolver un problema de proporcionalidad sin tener garantía de que tenga lugar un razonamiento proporcional. El uso generalizado de algoritmos como la regla de tres lleva con frecuencia a los estudiantes a su utilización para resolver problemas que no son de proporcionalidad. Se potencia de esta manera la posibilidad de provocar en los estudiantes la ‘ilusión de la linealidad’ (suponer que las relaciones entre variables son lineales cuando no lo son).

Realizar un estudio preliminar del contenido es una manera de reflexionar sobre los distintos significados y la conexión entre ellos. De este modo, el problema matemático que se estudia en el episodio es una posible situación que lleve a discutir con los futuros profesores la necesidad de reconocer que los objetos matemáticos tienen diversos significados, desde el punto de vista institucional y personal, como se propone en diversos trabajos desde el EOS (Godino, Font, Wilhelmi & Arreche, 2009; Pino-Fan, Godino & Font, 2011; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios & Breda, 2017; Font, Breda & Seckel, 2017).

4.2. Descripción

Los ítems a y b de la Guía (Figura 3) llaman la atención de los estudiantes sobre el contenido que se está estudiando en el episodio. Se requiere un análisis detallado del contenido para comprender las dificultades de aprendizaje (ítem h) y los conocimientos previos requeridos (ítem g). No parece suficiente mencionar que en el episodio se estudia “la semejanza de triángulos”, o la “proporcionalidad”. Se requiere un análisis más detallado de los objetos y procesos matemáticos implicados, lo que se corresponde con la categoría de *niveles de análisis* del conocimiento didáctico-matemático, Figura 1).

Análisis de objetos y procesos matemáticos

En la transcripción (Anexo) encontramos este fragmento de diálogo:

9P *¿Qué es lo que vamos a hacer?*

11A *Calcular la altura de un árbol que aparece en un dibujo.*

17P *Adelante, calculen la altura con esa información.*

Se debe calcular la altura inaccesible de un árbol, aplicando la proporcionalidad, ya estudiada, de lados homólogos en triángulos semejantes. Es un ejercicio de aplicación.

20P *Utilicen los conocimientos adquiridos en las consignas anteriores, porque ahí, ustedes calcularon el valor de medidas de algunos triángulos con sus lados homólogos.*

21P *También obtuvieron el valor de proporcionalidad.*

En la resolución se ponen en juego conceptos previos como: altura de un objeto; triángulos; lados homólogos; valor de proporcionalidad; procedimiento: regla de tres; proposición: la respuesta del problema es 5.23; cálculos aritméticos con/sin calculadora; números decimales; unidades de medida; medida con regla graduada o cinta métrica.

No se problematiza la aplicación de la semejanza de triángulos ni tampoco hay momentos en los cuales se requiera justificar las soluciones y procedimientos (medición poco precisa de las sombras); es decir: ¿por qué es posible resolver la tarea mediante regla de tres (por ejemplo)? ¿por qué es posible aplicar el teorema de Thales? Se explica que debido a la lejanía del sol los rayos son paralelos y se puede aplicar el teorema de Thales; en particular se explica que los triángulos que forman el árbol con su sombra y el bastón y su sombra se pueden poner en posición de Thales.

La emisión de un juicio razonado sobre la idoneidad epistémica del contenido trabajado en la clase requiere de la aplicación de herramientas de análisis detallado de los objetos y procesos implicados, como la herramienta configuración ontosemiótica (Font, Godino & Gallardo, 2013). En Pino-Fan et al. (2016) hay ejemplos de aplicación de esta herramienta.

<u>Análisis de procesos didácticos</u>

Los ítems d (¿Qué hace el profesor?, e (¿Qué hace el alumno?), f (¿Qué recursos se utilizan?) pretenden iniciar la reflexión sobre los procesos de interacción en el aula. Se espera que los estudiantes hagan observaciones del siguiente tipo.

En la clase observada el profesor: da las instrucciones; reparte material; pregunta qué se debe hacer de acuerdo a la consigna; autoriza que pueden utilizar calculadora y señala que utilicen los conocimientos que han trabajado las clases anteriores; les pregunta, monitorea y retroalimenta el trabajo de los alumnos; dirige la puesta en común. En la segunda parte del video, ayuda a los alumnos a llevar a la práctica los procedimientos aprendidos en el aula para calcular las alturas de árboles y otros objetos en la realidad.

Por su parte, el alumno, en el aula: lee la tarea; recuerda la solución de tareas anteriores relacionadas con la semejanza de triángulos; aplica esos conocimientos a la tarea dada (calcular la altura de un árbol representado en el papel; ejercita la aplicación de la regla de tres. En el trabajo de campo: mide las sombras; trabaja en equipo.

En el proceso de enseñanza/aprendizaje se utilizan como recursos instruccionales, una guía de aprendizaje; cuadernos; papel, lápiz, calculadora; elementos del entorno (árboles, sombras); regla graduada, metro y pie para medir las sombras; pizarra y proyector.

Será necesario discutir con los estudiantes la delicada cuestión que plantea la articulación de distintos modos de interacción en el aula: trabajo individual, trabajo en equipos, papel del profesor como gestor y transmisor de conocimientos. En definitiva, se trata de adoptar una actitud crítica frente a modelos didácticos tradicionales centrados en el profesor, como frente a los constructivistas ingenuos centrados en el alumno.

La reflexión sistemática sobre los procesos de interacción y mediación en el aula requiere aplicar herramientas analíticas específicas, como la noción de configuración didáctica (Godino, Contreras & Font, 2006). Ejemplos de aplicación de esta herramienta se pueden ver en Pino-Fan, Assis y Godino (2015).

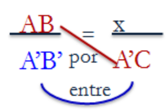
4.3. Explicación. Análisis de normas y metanormas

Las cuestiones a, b, c, y d del apartado 2) de la Guía (Explicación) se proponen para provocar la reflexión sobre la trama de normas que condicionan y soportan el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje. La reflexión sobre las normas (regulaciones, hábitos, costumbres) es un elemento clave como factor explicativo de los fenómenos didácticos que se observan (dimensión Meta Didáctico-Matemática, Figura 1).

El desarrollo del episodio está guiado por la *Reforma* (orientaciones curriculares de la SEP de México): se debe procurar trabajar en equipo resolviendo problemas; esta forma de trabajo se ha convertido en un hábito en la clase que establece la forma de trabajar. En cuanto a los modos de interacción profesor-alumnos, se propone una situación (consigna escrita) para cada alumno; los estudiantes están agrupados alrededor de mesas; primero se trabaja de manera personal, con libertad para consultar e intercambiar ideas y puesta en común de las soluciones. Los alumnos consultan al profesor; el profesor explica el desarrollo de la tarea.

En el patio de la escuela, el profesor explica a unos alumnos y escribe en su cuaderno:

30P *Si haces, esto, por esto, entre esto,* [ABxA'C:A'B'] *te da la altura del poste. (El profesor explica a unos alumnos y resuelve el cálculo):*



31A *Ah!*

32P *Ahora ustedes van a hacer lo mismo, van a buscar un arbolito, ponen los datos acá...*

¿Por qué se estudia el contenido del episodio?

Está incluido en los programas de estudio; currículo de Reforma (**35P**).

Desde el punto de vista matemático, la tarea permite poner en juego prácticas matemáticas (conocimientos, comprensiones y competencias) significativas y relevantes: proporcionalidad geométrica; función lineal; semejanza de triángulos; cálculo de alturas y distancias inaccesibles.

¿Por qué actúa el docente de la manera en que lo hace?

Sigue directrices didácticas de la Reforma (modelo de enseñanza socio-constructivista). Acepta que el aprendizaje matemático será de mejor calidad y se favorece si:

— el alumno tiene ocasión de trabajar en la solución de manera personal y en equipo sobre una situación-problema realista;

— crea situaciones cercanas y conocidas por los alumnos, lo que propicia la construcción de conocimiento por parte de los alumnos;

- hay comunicación en la clase, (puesta en común...).

¿Por qué actúan los alumnos de la manera en que lo hacen?

- siguen las reglas del contrato didáctico marcado por el docente;
- aplican regla de tres por ser la forma fijada de resolver tareas de proporcionalidad.

¿Cuáles pueden ser las razones por las cuales se originan dificultades/conflictos?

- Posiblemente el profesor no ha visto la conveniencia de justificar la proposición, 'los triángulos formados son semejantes'. Comienzan a trabajar las consignas entregadas y no se cuestionan los datos, por ejemplo:

12P *Muy bien ...*

14P *Van a calcular la altura de un árbol que aparece en el dibujo.*

15P *¿Estamos bien?*

17P *Adelante. Hagan y calculen la altura del árbol como se da en la información.*

- Hacen mediciones imprecisas de las sombras posiblemente porque este problema no ha sido previamente planteado (carencia de una norma).
- En la puesta en común, la alumna que pasa al frente llega a la solución correcta; sin embargo el profesor podría haber hecho pasar al frente a algún otro alumno que tenga una solución distinta, o que haya aplicado un procedimiento distinto. O preguntar ¿alguien lo ha hecho de otra manera?
- Considerando que el profesor ha estado caminando alrededor de los grupos de trabajo, es consciente de las dificultades que van teniendo los alumnos, y la puesta en común podría ser un espacio adecuado para confrontarlas.
- En el trabajo de campo, el profesor informa de manera directiva qué tienen que hacer.

La reflexión sistemática sobre las normas que condicionan y soportan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se puede hacer en el modelo CCDM con la herramienta dimensión normativa (Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2009) y meta-normativa (Assis, Godino & Frade, 2012; D'Amore, Font & Godino, 2007).

4.4. Valoración. Análisis de la idoneidad didáctica

La cuestión 3) planteada en la Guía (Figura 3), *¿qué se podría mejorar?,* se desglosa según las facetas propuestas en la Teoría de la idoneidad didáctica (Godino et al., 2007; Godino, 2013). El sistema de criterios e indicadores empíricos para cada faceta es una guía de análisis y reflexión sistemática que aporta conocimiento para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje (dimensión meta didáctico-matemática, Figura 1). La herramienta idoneidad didáctica, aplicada al caso del episodio, ayuda a emitir los siguientes juicios:

a) Epistémica (contenido matemático estudiado)

— Se debe plantear como problema la aplicación del teorema de Thales para justificar la semejanza de los triángulos y poder aceptar la relación de proporcionalidad entre las longitudes de los lados homólogos.

— Favorecer la formulación de conjeturas por los propios estudiantes y no inducir la aplicación de un procedimiento ya ejercitado antes.

— Justificar la validez y equivalencia de los procedimientos.

— Falta de precisión en el lenguaje y conceptos referidos: “valor de medidas de algunos triángulos con sus lados homólogos” (**20P**).

21P *También obtuvieron el valor de proporcionalidad.*

— Evitar la resolución de las tareas mediante aplicación mecánica de la regla de tres.

— Utilizar un enfoque funcional en la solución de problemas de proporcionalidad.

— Discutir la precisión de la medida y adquirir destreza en la medida de longitudes.

El análisis señala la necesidad de reconocer el papel clave, para lograr una alta idoneidad epistémica de la enseñanza y aprendizaje, de los procesos matemáticos de:

— argumentación, validación;

— institucionalización;

— generalización (modelización mediante la función lineal del fenómeno estudiado);

— conexiones matemáticas, proporcionalidad y función lineal, teorema de Thales y semejanza de triángulos.

b) Ecológica (relaciones con otros temas, currículo)

— Los contenidos corresponden a temas requeridos en el currículo contribuyendo a la formación matemática de los estudiantes.

— Se podría enfatizar las conexiones entre temas (semejanza de triángulos, teorema de Thales, proporcionalidad y función lineal)

— Desde el punto de vista matemático, la tarea permite poner en juego prácticas matemáticas (conocimientos, comprensiones y competencias) significativas y relevantes: Proporcionalidad geométrica; función lineal; semejanza de triángulos; cálculo de alturas y distancias inaccesibles.

— Es un tema práctico que se puede utilizar en la vida cotidiana; contexto realista.

— No hay evidencias de que se estimule el pensamiento crítico.

c) Cognitiva (conocimientos previos, aprendizaje, …)

— El objetivo es aplicar las reglas de cálculo aprendidas; cálculo de un término de una proporción conocidos los otros tres. El contenido pretendido está al alcance de los estudiantes y supone un reto accesible.

— No se tiene información sobre si los alumnos conocen el teorema de Thales.

— No se requieren adaptaciones curriculares.

— Al parecer los alumnos consiguen dar respuesta a la tarea aplicando dos métodos (no se ve en el fragmento de video cuáles pueden ser esos dos métodos).

— No se puede evidenciar el aprendizaje logrado, que es básicamente procedimental.

— El trabajo en equipo y dialógico indica momentos de evaluación formativa.

d) Afectiva (interés, motivación, …)

— La tarea muestra la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana. Los alumnos se ven interesados en la tarea.

— La enseñanza podría ir acompañada de una contextualización histórica del contenido en la Antigua Grecia y en el Antiguo Egipto.

— Se podría proponer el problema de la leyenda relatada por Plutarco según la cual Thales aplicó su teorema para calcular la altura de las pirámides de Guiza.

— No se observa argumentación, aunque sí trabajo en equipo.

— No se resalta la cualidad de precisión del trabajo matemático (medidas imprecisas).

e) Interaccional (modos de interacción entre profesor y estudiantes)

— Aunque hay una puesta en común a cargo de una alumna, se echan en falta momentos de justificación de las soluciones, así como de institucionalización por parte del profesor. En este sentido, uno de nuestros participantes expone: “En la línea de trabajo que ellos siguen, yo intentaría además que cada grupo expusiera sus soluciones al resto de la clase en lugar de una única alumna”

— Los estudiantes tienen un cierto grado de autonomía para resolver la tarea de cálculo y de medición, pero no para comunicar los resultados y discutirlos.

— Se observan momentos de evaluación formativa por parte del profesor.

f) Mediacional (recursos usados)

— Usan calculadoras para hacer los cálculos de la regla de tres.

— Dado que el docente tiene a su disposición un ordenador y un proyector podría utilizarlos para plantear situaciones ilustrativas y otros métodos de estimación de distancias inaccesibles, como: *https://www.youtube.com/watch?v=xpyWm-JqMk4* , *https://www.youtube.com/watch?v=R4syPwJZ1Eg*

— No se ve el uso de cintas métricas. Los alumnos están midiendo distancias con una regla graduada, y con pasos, situación que también podría utilizarse para discutir distintos instrumentos y unidades de medida.

Ejemplos de aplicación de la herramienta *idoneidad didáctica* se pueden ver en Aroza, Godino y Beltrán-Pellicer (2016), Beltrán-Pellicer y Godino (2017), Breda et al. (2017), Castro, Santana, Neto y Órfão (2014), Posadas y Godino (2017), entre otros.

5. Limitaciones de la información disponible

El problema con este tipo de fragmentos es que son una ventana pequeña al mundo de la clase; "a menos que la información contextual que se proporciona sea suficiente, la naturaleza del análisis que se realice puede ser limitada" (Sherin, 2004, p. 22). Por ello, para que el análisis de los conocimientos puestos en juego en el episodio de clase fuera más preciso y fundamentado sería necesario que el formador de profesores genere un espacio para la reflexión sobre qué tipo de información adicional habría que disponer. Además, el formador podría seleccionar fragmentos de vídeo para señalar características específicas de la enseñanza-aprendizaje que se quiera estudiar. En particular, sería necesario disponer de:

— Las fichas de trabajo de las sesiones en que se introdujo la noción de semejanza de triángulos, su relación con el teorema de Thales.

— La filmación/transcripción de la clase completa, para comprobar si efectivamente hubo o no momentos de validación e institucionalización.

— Observación del papel del profesor en el seguimiento del trabajo de los equipos (identificación de conflictos y modos de resolverlos; evaluación formativa).

— Momentos de evaluación sumativa individualizada, para tener acceso a los aprendizajes efectivamente logrados.

Dos de los profesores en formación que participaron en la experimentación indicaron:

> "Se deberían mostrar los procedimientos completos que realizan los estudiantes y cómo el profesor orienta o dirige dichos procesos y eventualmente retroalimenta o permite la detección y corrección de errores. Se deberían escuchar las distintas interacciones de los alumnos en el trabajo grupal".

> "Saber exactamente cuáles son los contenidos previos que se han trabajado, ver si todos los alumnos llegan al final a las conclusiones acertadas y si han sabido aplicar esos conocimientos previos. Saber además, cuánto tiempo se ha dedicado a todos estos contenidos para poder evaluar si es una técnica de trabajo práctica".

6. Reflexiones finales

En este trabajo hemos presentado las características del modelo CCDM sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor, el cual puede ayudar en el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas y de secuencias de acciones formativas específicas para el desarrollo profesional. Para ejemplificar su aplicación hemos descrito una acción formativa, integrada en un diseño de investigación más amplio. El diseño completo (planificación, implementación, resultados y valoración) se describe en Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer (en prensa) con el objetivo de iniciar a un grupo de 27 estudiantes para profesor de matemáticas en el desarrollo de su competencia de análisis de la idoneidad didáctica; esto es, su competencia para la reflexión global de procesos de enseñanza y aprendizaje. Tal como proponen los autores, la actividad descrita en este artículo se debe considerar como un primer encuentro de los profesores en formación, que permite aflorar sus ideas sobre las facetas y componentes implicados en la realidad de una clase de matemática. Asimismo, es un aporte para el formador de profesores, porque se muestra la necesidad de disponer de herramientas teóricas específicas que apoyen la reflexión sistemática sobre dichas facetas y componentes (Castro, Pino-Fan & Velasquez, 2018). Estas herramientas deberán ser objeto de estudio y aplicación mediante nuevas situaciones focalizadas en cada una de las herramientas mencionadas.

Por lo tanto, la importancia del desarrollo de esta competencia profesional reclama la necesidad de articular oportunidades para apoyar su promoción dentro de los programas de formación de profesores (Llinares, 2013; Korthagen, 2010; Ponte, 2011). Se han realizado diferentes investigaciones en contextos de formación inicial y permanente, en las cuales se han diseñado e implementado ciclos formativos para que los (futuros) profesores desarrollen las competencias de este modelo y aprendan los conocimientos correspondientes (e.g., Pochulu, Font & Rodríguez, 2016; Rubio, 2012; Seckel, 2016). Se trata de ciclos formativos con frecuencia en formato de talleres y diseñados como entornos de aprendizaje, de manera que: 1) los asistentes participen a partir del análisis de episodios de aula; 2) los tipos de análisis que propone el modelo emerjan de la puesta en común realizada en el gran grupo.

Agradecimientos

Proyectos EDU2016-74848-P (FEDER, AEI), EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE), REDICE16-1520 (ICE-UB) y FONDECYT Nº11150014 (CONICYT-Chile).

Referencias

Aroza, C. J., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *AIRES, 6*(1), 1-29.

Assis, A., Godino, J. D., & Frade, C. (2012). As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Revista Latinoamerica de Matemática Educativa, 15*(2), 171-198.

Association of Mathematics Teacher Educators (2017). *Standards for preparing teachers of mathematics*. Recuperado el 1 de marzo de 2018 de https://amte.net/standards

Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. D. (2017). Aplicación de indicadores de idoneidad afectiva en un proceso de enseñanza de probabilidad en educación secundaria. *Perspectiva Educacional, 56*(2), 92-116.

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Castro, W. F., Pino-Fan, L, & Velásquez, H. (2018). A proposal to enhance preservice teacher's noticing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education* (en prensa).

Castro, A., Santana, F., Neto, T. B., & Órfão, I. (2014). Iniciação à investigação em educação matemática: exemplo de duas tarefas com recurso ao Geogebra. *Indagatio Didactica, 5*(1), 127-148.

Coles, A. (2014). Mathematics teachers learning with video: the role, for the didactician, of a heightened listening. *ZDM, 46*(2), 267-278.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 86-91.

Fernández, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, EEUU: Erlbaum.

Font, V., Breda, A., & Sala, G. (2015). Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. *Praxis Educacional, 11*(19), 17-34.

Font, V., Breda, A., & Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 10*(2), 1-23.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97-124.

Fortuny, J. M., & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 23-37.

Gellert, U., Becerra, R., & Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. En K. M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 327-360). Nueva York: Springer-Verlag.

Giacomone, B., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa* (en prensa).

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Arreche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es un número? *UNIÓN*, *19,* 34-46.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Godino, J. D., & Neto, T. (2013). Actividades de iniciación a la investigación en educación matemática. *UNO, 63*, 69-76.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 258-288.

Korthagen, F. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 68*(24), 83-101.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 53-70.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: a component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus-Journal of Education*, *1*(3), 76-93.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: the discipline of noticing*. Londres, Reino Unido: Routledge-Falmer.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, EEUU: NCTM.

Ortiz, C. V., & Alsina, Á. A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*, 27-48.

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Pino-Fan, L., Assis, A., & Godino, J. D. (2015). Análisis del proceso de acoplamiento entre las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento matemático en el contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones. *Educación Matemática*, *27*(1), 37-64.

Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., & Breda, A. (2017). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-23.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-32.

Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *RELIME, 19*(1), 71-98.

Ponte, J. P. (2011). Using video episodes to reflect on the role of the teacher in mathematical discussions. In O. Zavslavsky & P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics* (pp. 249-261). Boston, EEUU: Springer.

Posadas, P., & Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae, 1,* 77-96.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Trabajo de Tesis Doctoral. Disponible en http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/65704

Star, J., & Strickland, S. (2008). Learning to observe: Using video to improve pre-service mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(2), 107-125.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática*. Trabajo de Tesis Doctoral. Disponible en http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/99644/1/MJSS_ TESIS.pdf

Sherin, M. G. (2004). New perspectives on the role of video in teacher education. En J. Brophy (Ed.), *Using video in teacher education* (pp. 1-27). Oxford, Reino Unido: Elsevier Science.

Sherin, M. G., & Dyer, E. B. (2017). Mathematics teachers' self-captured video and opportunities for learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(5), 477-495.

Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers´ "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education 24,* 244-276.

Anexo. Transcripción de los diálogos producidos en el episodio

En http://www.youtube.com/watch?v=60s_0Ya2-d8 está disponible la videograbación

1P	Buenas tardes a todos
2As	Buenas tardes
3P	Miren, el día de hoy vamos a trabajar con una consigna nueva. Estamos en el eje: forma espacio y medida, con el tema de formas geométricas y con el subtema (pone énfasis) de semejanza.
4P	Vamos a trabajar de una manera normal, como siempre, como lo hemos estado haciendo.
5P	Está aquí con nosotros el profesor Martín Eduardo Martínez Morales, que toma evidencias de las clases que hacemos y de la forma en cómo trabajamos. A si que trabajen ustedes de una manera normal, como siempre lo han hecho.
6P	Esperemos que el día de hoy saquemos esta consigna.
ENTREGA DE CONSIGNAS [minuto 00:52]	
7P	Ahora si, pueden darle vuelta su hoja y van a leer la consigna
LECTURA DE CONSIGNAS [01:07]	
8P	A ver. Ya jóvenes. ¿Ya leyeron la consigna?
9P	¿Alguien de ustedes me puede decir, qué es lo que vamos a hacer en esa consigna?
10P	Señor Legarre.
11ª	En base al dibujo que se encuentra ahí, calcular la altura.

12P	Muy bien, ¿qué dicen los demás? ¿Todo bien?
13As	Sí
VERBALIZACIÓN [01:49]	
14P	Van a calcular la altura de un árbol que aparece en un dibujo.
15P	¿Estamos bien?
16As	Si
17P	Adelante. Hagan y calculen la altura del árbol como se da en la información.
18P	Ahora. Ahora. Miren.
USO DE LAS TIC'S [02:18]	
19P	Ahí en la pizarra, en el proyector, estamos viendo ya el problema que estamos resolviendo.
20P	Utilicen los conocimientos adquiridos en las consignas anteriores, porque ahí, ustedes calcularon el valor de medidas de algunos triángulos con sus lados homólogos.
21P	También obtuvieron el valor de proporcionalidad.
SITUACIONES DIDÁCTICAS [02:52]	
ALUMNOS HABLANDO ESPAÑOL [03:18]	
22P	¿Quedó claro?
ALUMNOS HABLANDO DIALECTO NAHUATL []	
23P	Acá tienen dos caminos. Ustedes cuando resuelven el problema pueden utilizar un método, ¿si?, pero también utilicen el otro para verificar si están en lo correcto.
24P	Lo más correcto es que sea "esto" (el profesor señala el folio del alumno).
PUESTA EN COMÚN [03:44]	
25A	La respuesta del problema es 5.23 *(Ella explica el procedimiento que hicieron escribiendo la cuenta en la pizarra)*
26A	Entonces hicimos una regla de tres, y X es 5.23
27P	Les dio lo mismo por las dos formas. Muy bien
28P	Entonces la altura del árbol es 5.23
29	*La clase sale a trabajar al patio de la escuela*
30P	'Esto', por 'esto', entre 'esto' y te da la altura del poste. *(El profesor le explica a unos alumnos y le escribe en el cuaderno)*
31A	Ah!
32P	Ahora ustedes van a hacer lo mismo. Ya teniendo ustedes el metro, van a buscar un arbolito y van a medir su sombra.
ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS [06:41]	
33E	Maestro, tenemos que presentar ante la supervisión escolar evidencias de los trabajos que se realizan actualmente con la reforma secundaria. Nos gustaría que comentara brevemente lo que están haciendo y que nos diga de qué grado es este grupo que tiene, qué consigna está trabajando y qué parte de la matemática se está viendo en este momento.
34P	El grupo que está aquí es el grupo de 3ºA.
35P	Estamos trabajando sobre semejanza de triángulos. Entonces, algunos de los ejercicios que marca la reforma es la semejanza. Entonces estamos viendo algunos problemas sobre eso.
36P	Salimos aquí al campo para hacerlo más práctico para que los alumnos tengan la evidencia concreta de lo que es cálculo de alturas de algunos árboles / postes, que muy difícilmente podemos ver hacia arriba.
37P	Pues con la semejanza de triángulos se resuelve este problema
38P	Lo que están haciendo es medir la sombra de algunos objetos y en base a eso, sacan la altura.
39E	Muy bien maestro, muchas gracias. Estas son las consignas desarrolladas actualmente por la reforma, ¿estamos viendo alguna consigna en especial?
39P	Claro que si, la semejanza de triángulos

Referencias de los autores

Juan D. Godino, Universidad de Granada (España), jgodino@ugr.es

Belén Giacomone, Universidad de Granada (España), giacomone@correo.ugr.es

Vicenç Font, Universitat de Barcelona (España), vfont@ub.edu

Luis Pino-Fan, Universidad de los Lagos (Chile), luis.pino@ulagos.cl

Professional knowledge in the design and management of a class on similar triangles. Analysis with tools of the DMKC model

Juan D. Godino, Universidad de Granada

Belén Giacomone, Universidad de Granada

Vicenç Font, Universitat de Barcelona

Luis Pino-Fan, Universidad de los Lagos

This article is a theoretical reflection aimed at teacher educators. It highlights the need to have specific conceptual and methodological tools that help to develop in prospective teacher three professional basic skills: description, explanation, and assessment of teaching and learning practices. The tools proposed are part of the Didactic-Mathematical Knowledge and Competencies (DMKC) theoretical model based on the Onto-Semiotic Approach to mathematical knowledge and instruction (OSA). To contextualize this reflection, we rely on the retrospective analysis of a formative intervention with prospective secondary mathematics teachers where a didactic analysis of a video-recorded class on the similarity of triangles is requested using a reflection guide. The instructions given to the future teachers request to describe, explain, and assess the mathematical content put into play in the episode, as well as the roles of teacher and students, the use of instructional resources, and the recognition of norms as explanatory factors of behaviours. The intervention is part of a broader didactic design for the initiation of future teachers in the development of the five basic sub-competences, raised within the DMKC model. These are associated with knowledge of five conceptual OSA tools: 1) Competence for the analysis of global meanings (based on the identification of situations-problems and operational, discursive, and normative practices involved in their resolution). 2) Ontosemiotic analysis competence of the mathematical practices (identification of different objects and processes involved in the practices). 3) Competence for management of configurations and didactic trajectories (identification of the sequence of interaction patterns among teacher, student, content and resources). 4) Normative analysis competence (recognition of norms and meta-norms that condition and support the instructional process). 5) Didactical suitability analysis competence (assessment of the instructional process and identification of potential improvements). In order to get more fully acquainted analysis of this educational experience, we include possible interventions that the educator can consider in the joint-discussion phase about answers given by the future teachers to the tasks. In addition, we also refer to the theoretical tools of the OSA that would help to carry out a more systematic analysis of the corresponding facets involved. The results are a contribution for teacher education in that they show the need to have theoretical tools to support the systematic reflection on the factors affecting the teaching and learning processes.

Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje

Luis Ángel Bohórquez Arenas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia)

Bruno D'Amore, NRD del Departamento de Matemática, Universidad de Bologna (Italia)

Recibido el 3 de enero de 2017; aceptado el 8 de abril de 2018

Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje

Resumen

La pregunta ¿bajo qué condiciones se producen cambios en las creencias y concepciones del maestro?, formulada hace más de una década por Pehkonen (2006), aún permanece vigente. La investigación presentada tiene como objetivo identificar cambios en las concepciones sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje de estudiantes para profesor participando en un experimento de enseñanza. Los resultados han permitido identificar un cambio en las concepciones dado por el aumento del número y el tipo de actividades que los estudiantes consideran como parte de la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. Este resultado está vinculado a elementos propios del curso (gestión del profesor titular y el tipo de tareas) como factores que apoyan el cambio en las concepciones de los estudiantes, mientras que, sus experiencias anteriores al curso y su concepción sobre la resolución de problemas parece que limitan dichos cambios.

Palabras clave. Concepciones; formación de profesores; cambio de concepciones; gestión; conocimiento del profesor.

Fatores que apoiam ou limitam as mudanças nas concepções dos alunos para o professor de matemática sobre o gerenciamento do processo ensino-aprendizagem

Resumo

A questão em que condições são as mudanças nas crenças e concepções do professor, formulada há mais de uma década por Pehkonen (2006), continua em vigor. A pesquisa apresentada visa identificar mudanças nas concepções sobre o gerenciamento do processo ensino-aprendizagem de alunos para professores que participam de uma experiência de ensino. Os resultados permitiram identificar uma mudança nas concepções dada pelo aumento no número e tipo de atividades que os alunos consideram como parte da gestão do processo ensino-aprendizagem. Esse resultado está vinculado a elementos do curso (gerenciamento do professor titular e do tipo de tarefas) como fatores que suportam a mudança nas concepções dos alunos, enquanto suas experiências anteriores e sua concepção de resolução de problemas que limitam tais mudanças.

Palavras chave. Concepções; treinamento de professores; mudança de concepções; gestão; conhecimento do professor.

Para citar: Bohórquez, L. A. y D'Amore, B. (2018). Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 13, 85 - 103.*

Factors that support or limit changes in student conceptions for the mathematics teacher on the management of the teaching-learning process

Abstract

The question under what conditions are changes in beliefs and conceptions of the teacher, formulated more than a decade ago by Pehkonen (2006), still remains in force. The research presented aims to identify changes in the conceptions about the management of the teaching-learning process of students for teachers participating in a teaching experiment. The results have allowed us to identify a change in conceptions given by the increase in the number and type of activities that students consider as part of the management of the teaching-learning process. This result is linked to elements of the course (management of the tenured professor and the type of tasks) as factors that support change in student conceptions, while their experiences and their conception of problem solving that limit such changes.

Keywords. Conceptions; teacher training; change of conceptions; management; teacher's knowledge.

Facteurs qui soutiennent ou limitent les changements dans les conceptions des élèves futures enseignants de mathématiques sur la gestion du processus d'enseignement-apprentissage

Résumé

La question de savoir dans quelles conditions se produisent des changements de croyances et de conceptions de l'enseignant, formulée il y a plus de dix ans par Pehkonen (2006), reste en vigueur. La recherche présentée vise à identifier les changements dans les conceptions sur la gestion du processus d'enseignement-apprentissage des étudiants futures enseignants participant à une expérience d'enseignement. Les résultats ont permis d'identifier que le principal changement de ces conceptions est l'augmentation du nombre et du type d'activités que les étudiants considèrent comme faisant partie de la gestion du processus d'enseignement-apprentissage et quels éléments spécifiques du cours (gestion du professeur titulaire du cours et le type de tâches) en tant que facteurs qui soutiennent tels changements. En outre, ses expériences antérieures au cours et sa conception de la résolution des problèmes semblent limiter de tels changements.

Mots clés. *Conceptions; formation des enseignants; changement de conceptions; la gestion; les connaissances du professeur*.

1. Introducción

En las últimas décadas se han realizado múltiples estudios desde los cuales se ha indagado sobre el cambio de creencias y concepciones de los profesores de matemática (Pehkonen, Ahtee, Tikkanen & Laine, 2011). Sin embargo, el estudio de Bobis, Way, Anderson y Martin (2016) establece que la investigación sobre los cambios de concepciones de profesores permanece vigente. Esta investigación se planteó dos preguntas: 1) ¿Qué cambios se han producido, al finalizar un curso de formación de profesores de matemática, en las concepciones de los estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza - aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas? 2) ¿Qué factores apoyan o limitan este cambio de concepciones de los estudiantes para profesor? Para responder a estas preguntas se realizó una caracterización sobre conocimiento del profesor, competencia, creencia, concepción y gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

2. Conocimiento del profesor, competencia, creencias y concepciones

D'Amore (1999) establece que la didáctica de la matemática proporciona claves para comprender e interpretar lo que ocurre en el aula. Esto se debe en esencia porque el conocimiento en didáctica de la matemática va más allá de una competencia puramente matemática; y nada que ver con la pedagogía, por no hablar de la experiencia y el sentido común. Estas comprensiones e interpretaciones se pueden dar porque hay diferentes perspectivas dentro de la didáctica de la matemática que permiten mirar las situaciones desde los enfoques que en cada una de ellas se prioriza. Una caracterización más explícita del conocimiento de la disciplina del profesor de matemática señala que conocer la "matemática que se van a enseñar" supone mucho más que la idea de "conocer la matemática del currículo" (Bromme, 1988; Ball & Cohen, 1999; D'Amore 1999; Escudero & Sánchez, 2007).

Ball y Cohen (1999) proponen cuatro categorías para el conocimiento del profesor que recogen y complementan las presentadas por Shulman (1986), Bromme (1988) y Simon (1997). En esta investigación se asume la postura de Adler et al. (2005) y Delaney, Ball, Hill, Schilling y Zopf (2008) sobre el conocimiento del profesor de matemática considerando que, cuando se hace referencia al conocimiento sobre el contenido y de los estudiantes y al conocimiento del contenido y de la enseñanza, se está hablando de un conocimiento asociado a la didáctica de la matemática.

Por otra parte, el conocimiento profesional del profesor de matemática se considera integrado por diferentes dominios (conocimiento sobre organización del currículo, modos de representación y ejemplos más adecuados en cada momento, destrezas de gestión y comunicación matemática en el aula, conocimiento en epistemología de la matemática, didáctica de la matemática, etc. (D'Amore, 2004). Llinares (2008) subraya la importancia del uso del conocimiento en la resolución de situaciones problemáticas generadas en su actividad profesional, la cual involucra diversos "sistemas de actividades". Para desarrollar cada sistema de actividad, el estudiante para profesor debe llegar a ser competente en los diferentes aspectos que definen estos sistemas, y por tanto "conocer" lo que los fundamenta generándose de esta manera la competencia docente respectiva. Desde esta consideración aparece de manera natural un llamado a hablar de la competencia como parte fundamental del conocimiento del profesor de matemática y, lo que más nos interesa en este estudio, del estudiante para profesor de matemática.

En la investigación presentada se entendió la competencia como un conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes donde se vinculan tres tipos de saberes: (1) un saber asociado a conocimientos teóricos o proposicionales que relacionan contenidos diferentes; (2) un saber relacionado con un conocimiento práctico que permita el desarrollo de las habilidades y destrezas necesarias para ejecutar diferentes acciones y finalmente (3) un saber asociado a un conocimiento del conjunto de normas, valores, actitudes y circunstancias que permitan interactuar con éxito en el medio social. El vínculo entre estos saberes debe permitir que se identifiquen debilidades en relación a los conocimientos involucrados y el deseo de utilizar y aumentar la propia competencia (D'Amore, Godino & Fandiño-Pinilla, 2008)

En Bohórquez (2016) se caracterizó la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en aulas de matemática como una competencia del profesor de matemática que involucra múltiples actividades que, en su mayoría, surgen en el contexto del aula, cuyo fin primordial es promover el aprendizaje de los estudiantes.

Estas actividades relativas al proceso de enseñanza-aprendizaje, serán dividas en dos grandes grupos (Llinares, 1999):

- *actividades de carácter general*; por ejemplo, lograr que los estudiantes se centren en las discusiones y traten de llegar a acuerdos en lugar de imponer sus ideas (Doyle 1986; Brophy 1999, 2006);
- *actividades consideradas específicas del contenido matemático*; por ejemplo, prever las acciones que los estudiantes pueden llevar a cabo en este ambiente de aprendizaje y establecer cómo podrán interpretar la retroalimentación que se les pueda dar (Perrin-Glorian, 1999; Llinares, 1999).

Por último, convienen atender a cuestiones sobre concepciones y creencias. D'Amore y Fandiño-Pinilla (2004) vinculan el significado de concepción a la idea de creencia afirmando que la creencia es una opinión, conjunto de juicios/expectativas, aquello que se piensa a propósito de algo y que el conjunto de las convicciones de alguien (A) sobre un aspecto (T) forma la concepción (K) de A relativa a T. Además, estos autores establecen que «si A pertenece a un grupo social (S) y comparte con los demás miembros de S el mismo conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T» (p. 26). En esta investigación se asumió que las concepciones de un individuo son generalmente conscientes y se es capaz de razonar acerca de éstas (Furinghetti & Pehkonen, 2002; Pehkonen, 1994, 2006). Las concepciones se describen como un subconjunto de creencias que son conscientes.

3. Diseño de la investigación

3.1. Participantes

Los participantes fueron 36 estudiantes para profesor (19 a 21 años) de sexto semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM), el cual es un programa de formación de profesores de matemática en Colombia con una duración de diez semestres. Esta investigación se realizó en el espacio de formación "Didáctica de la variación" en el periodo académico 2012 (I semestre). Este espacio de formación estaba formado por 64 sesiones y tenía como objetivo construir el concepto de variación asociado a contextos continuos y discretos. Se diseñó para que los estudiantes construyeran conocimiento sobre la resolución de problemas de variación como contextos para el aprendizaje de los procesos de cambio y variación. En esencia, que fueran capaces de caracterizar los problemas o situaciones problema para que se convirtieran en medios apropiados de aprendizaje de la actividad matemática y finalmente que pudiesen analizar la función de los problemas y de la gestión que el profesor realiza de las interacciones de aula al abordar la resolución de los mismos.

3.2. Recolección de datos

Para responder la primera pregunta de investigación se utilizaron dos medios de recolección de información. El primero consistió en la aplicación en dos oportunidades del instrumento denominado: *carta invitación a declarar sobre las concepciones de la gestión en el aula* (CDCGA). Es una solicitud hecha al estudiante para declarar sus concepciones de manera directa y sincera; se presenta al estudiante antes y después del curso. En este caso, en la carta se les pidió a los estudiantes escribir y detallar sus concepciones frente a la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. Este instrumento se basa en el diseñado por D'Amore y Fandiño-Pinilla (2004). La primera aplicación se hizo en la sesión número uno de clase y la segunda aplicación se hizo en la última sesión del curso, un semestre después. Además, se realizaron entrevistas semi-estructuradas a los estudiantes que permitieran aclarar algunas de sus respuestas al instrumento.

Para dar respuesta a la segunda pregunta se utilizaron las grabaciones en video de las sesiones de clase. Se realizaron dos tipos de videograbaciones. En primer lugar se grabó en video cada una de las sesiones de clase al gran grupo (incluido el profesor). En segundo lugar se grabaron en video las interacciones de dos pequeños grupos de estudiantes (incluyendo momentos de interacción con el profesor). Estos dos grupos de estudiantes (G1 y G2) fueron escogidos teniendo en cuenta las respuestas que cada uno de los integrantes del grupo dio al instrumento CDCGA. También se recogieron los cuadernos de apuntes personales de los estudiantes de estos dos grupos.

3.3. Análisis de datos

Para dar respuesta a la primera pregunta, analizamos las respuestas de los estudiantes para profesor al instrumento CDCGA sobre las concepciones relativas a la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y las transcripciones de las entrevistas semi-estructuradas. El análisis permitió identificar tres grandes grupos de concepciones.

El primer grupo incluye concepciones donde la gestión se asocia solamente a las normas sociales y expectativas de la clase, a la organización logística del aula, a las actividades en el aula asociadas a la disciplina y a la gestión que permita responder al mal comportamiento o a las desviaciones (Duke, 1979; Doyle, 1986; Emmer, 1987; Brophy, 1999). El segundo grupo lo conforman concepciones que se relacionan exclusivamente con la gestión de la interacción entre los estudiantes y el conocimiento matemático que subyace al problema matemático (Perrin-Glorian, 1999). El tercer grupo lo conforman concepciones donde la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de resolución de problemas involucra múltiples actividades (generales y específicas del contenido matemático) que, en su mayoría, surgen en el aula.

Para dar respuesta a la segunda pregunta, se identificaron momentos relevantes en la transcripción de las videograbaciones de las sesiones en pequeño grupo de G1 y G2 dónde se evidenciaban cambios de concepción y factores que apoyaban o limitaban dichos cambios. Se vio conveniente reducir el volumen de datos (más de 128 horas de grabación transcritas) bajo los criterios: i) identificar momentos explícitos donde los estudiantes se manifestarán sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje; ii) identificar los momentos en donde se evidenciaron cambios de comportamientos de los estudiantes en las formas actuar e interactuar (una vez identificados esos momentos se rastrearon los datos para establecer el origen de los cambios); iii) identificar manifestaciones de la toma de consciencia sobre aspectos relevantes de la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje. Estos tres criterios se aplicaron según los tres grupos de concepciones identificados desde el instrumento CDCGA.

4. Resultados

Los resultados se organizan en tres apartados que nos ayudan a ejemplificar las concepciones evidenciadas, permitiendo identificar cambios a lo largo del curso.

4.1. Concepciones iniciales sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas

Los datos para la elaboración de esta viñeta proceden de la primera sesión presencial en donde los veintiséis estudiantes respondieron al instrumento CDCGA y de las entrevistas semi-estructuradas realizadas con posterioridad.

Identificamos tres grupos de concepciones. El primer grupo de ocho estudiantes para profesor centran su gestión como profesores, casi exclusivamente en la organización de grupos de trabajo. En el segundo grupo, los doce estudiantes, además de la importancia de la conformación de grupos de trabajo, consideran vital en su gestión como profesores asumir el rol de guía, acompañante u orientador; sin embargo, hay diferencias muy marcadas en el significado que atribuyen a este rol y al significado de estos términos. Finalmente, el tercer grupo de seis estudiantes agrupa a los estudiantes que no hablan de gestión y los que hablan de las normas de comportamiento que deben exigirse en clase.

En el primer grupo, los ocho estudiantes consideran que la gestión del profesor se centra en la organización de grupos de trabajo, y se aprecia la importancia dada al número de integrantes de dichos grupos; los estudiantes consideran necesario establecer las características de los miembros del grupo. Este hecho se puede apreciar en las declaraciones del estudiante E4:

E4: Entonces, las acciones que efectuaría en la clase es la organización de los grupos, máximo 4, con un líder (en este caso el niño indisciplinado) para que adquiera una responsabilidad. Haría una prueba diagnóstica (individual y grupal) para saber el conocimiento que tendrían los estudiantes y por último, y necesario llevaría a cabo el manejo de cuaderno resolutor por parte de los estudiantes, necesario para la organización de ideas individuales como grupales.

E4 considera, en su gestión del proceso enseñanza-aprendizaje, la realización de pruebas diagnósticos y la solicitud a sus estudiantes de llevar un cuaderno en donde estos registren lo trabajado en clase. Esta forma de considerar la gestión coincide con dos de las categorías expuestas por Davis y Thomas (1992) que pueden enmarcarse dentro de las tareas del profesor en la fase de gestión de carácter general.

En el segundo grupo, tres de los doce estudiantes consideran que el rol de guía por parte del profesor consiste en dirigir a sus estudiantes de tal forma que tomen el camino de solución que desea el profesor y no otros caminos que puedan surgir de su interacción con el problema. Esto se puede apreciar en la respuesta de E10:

E10: […] *siempre sería guía y responsable de que el trabajo dirigido vaya por el camino que es y que si se desvía sea para retroalimentar la clase.*

E10 amplía sus consideraciones frente a la afirmación anterior en el segmento de entrevista que se presenta a continuación:

I: En tu descripción de la gestión escribiste que siempre serías guía y responsable de que el trabajo vaya por el camino que es, ¿cuáles serían tus acciones para lograrlo?

E10: Mmm […] *pues si yo veo que un estudiante o un grupo están cometiendo errores o van por un lado que no debe ser cuando tratan de solucionar el problema, les diría que esa no es la manera. Por ejemplo, les guiaría con exposiciones con material concreto o software para vean su error mostrando la respuesta correcta. Eso los retroalimentaría.*

I: ¿Entonces tu forma de guiarlos sería presentando la respuesta correcta al problema, en caso de ser necesario?

E10: Sí, es que para mí la guía del profesor consiste en explicar el camino de solución o resolver el problema y no dejar que los estudiantes cometan errores y se pierdan en la solución.

E10 está entendiendo la guía del profesor como aquella en donde éste dice a los estudiantes cómo resolver el problema. Incluso asegura que dicha guía podría estar dirigida a presentar la respuesta correcta al problema. En otras palabras, no se concibe una gestión en donde la guía del profesor consista, entre otras cosas, en hacer preguntas que permitan visualizar un camino de solución por parte del estudiante (Lesh & Doerr, 2003). Las afirmaciones de E10 en relación con la gestión del aula por parte del docente reflejan en mínima parte (cuando se habla de guía) la definición de situación adidáctica de Brousseau (1986). En dicha definición el docente deja de enseñar y de llevar al estudiante explícitamente hacia la resolución del problema y se presenta como simple guía del trabajo de los grupos o de cada uno de los estudiantes.

Dos estudiantes en este grupo de doce, aunque mencionan como parte de la gestión del profesor la guía y orientación que éste puede hacer, no aclaran en qué consiste. Este hecho se aprecia en las afirmaciones de E33:

E33: Gracias al acompañamiento y guía brindada a los estudiantes o grupos de trabajo, el profesor conoce los avances de grupo, por consiguiente [puede] *proponer o generar formas de mostrar los avances de los grupos más avanzados para que sus progresos sirvan a los demás grupos.*

En la entrevista sobre la guía del profesor, este estudiante responde:

I: En tu respuesta mencionas como parte de la gestión el acompañamiento y guía ofrecida por el profesor a los estudiantes o grupos de trabajo, ¿podrías explicar en qué consiste esta guía o acompañamiento?

E33: Como lo dije por escrito en esencia la guía o el acompañamiento del profesor permite conocer de cerca los avances de los estudiantes o de los grupos y con esa información el profesor puede organizar sesiones para que los grupos avanzados muestren a los demás cómo van. En otras palabras, creo que más que guía sería un acompañante y así tendría información de primera mano.

E33 no precisa en qué consiste la guía del profesor, incluso en su respuesta a la entrevista deja la impresión de que la función del profesor se limita a la observación de los integrantes de los grupos y sus discusiones, pero sin orientación. En este tipo de respuesta el papel del profesor coincide con lo auspiciado en las situaciones adidácticas (Brousseau, 1986): el profesor tampoco es un guía, es un acompañante.

Uno de los estudiantes centró su atención sobre el tipo de problema que debe proponer el profesor y la utilidad de la resolución de problemas. La respuesta de este estudiante se presenta a continuación:

E1: La gestión del profesor debe ser complejizar los problemas para que estos permitan cuestionar la manera en la que el estudiante desarrolle su proceso de aprendizaje de un concepto o algún conocimiento matemático […]. *Pensaría que la resolución de problemas pudiera ser un instrumento en la cual el estudiante estructure y moldea el conocimiento por medio de su propio actuar, de tal manera que el profesor pueda estar pendiente de su proceso de aprendizaje.*

En la respuesta de E1 se aprecia que el estudiante, cuando habla de gestión, alude al diseño de los problemas por parte del profesor, mencionando que una característica esencial de estos problemas es permitir el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Esta forma de ver la gestión del profesor está asociada con la fase preactiva que menciona Jackson (1975). En la respuesta de E1 el papel del docente no es el de empujar al estudiante hacia la respuesta, sino el de estar «pendiente de su proceso de aprendizaje», típica actitud de la teoría de las situaciones. En caso contrario, se corre el riesgo de caer en el efecto Dienes o en el efecto Joudain, que Brousseau (1986) denuncia con firmeza, efectos que no permiten el aprendizaje, por el contrario, lo hacen imposible (D'Amore, Fandiño-Pinilla, Marazzani & Sarrazy, 2010).

Los estudiantes en este grupo plantean una visión de la gestión del profesor del proceso de enseñanza-aprendizaje que no es multifuncional. A lo más se presentan dos acciones del profesor.

4.2. Concepciones sobre la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas de estudiantes para profesor al finalizar el trabajo en el espacio de formación

Los datos para la elaboración de esta viñeta proceden de la última sesión de clase presencial en donde veintiocho estudiantes respondieron al cuestionario CDCGA y de las entrevistas semi-estructuradas realizadas posteriormente en las que se tuvo en cuenta las respuestas al instrumento.

Se identificaron dos grandes grupos: (1) veinte estudiantes conciben su gestión desempeñando múltiples actividades; y (2) ocho estudiantes se dividieron en tres grupos (organización de grupos, dificultades para resolver problemas y los que no responden).

Los estudiantes del primer grupo consideran que la gestión del profesor es aquella donde el docente desempeña múltiples actividades, donde la interacción del profesor con los estudiantes adquiere mayor importancia. Algunos se refieren explícitamente a la organización de los estudiantes en grupos, la guía del profesor por medio de preguntas (de manera general o individual) y la dependencia del ambiente de trabajo en clase de la gestión del profesor. Esto se puede apreciar en la respuesta de E4:

E4: Es muy notable que se ha dado un cambio a raíz del curso […] *se han puesto en acción diversas cosas, haciendo un ambiente de clase y de resolución de problemas más efectivo y llamativo. Tanto así que copiaría: el trabajo en grupo, la guía que le da el maestro a los estudiantes, las preguntas generales, individuales precisas que hacen que los estudiantes generen habilidades de pensamiento y puedan establecer soluciones.*

En su respuesta, E4 considera que las acciones del profesor que debe imitar son aquellas en donde el profesor organiza a sus estudiantes por grupos y guía a los estudiantes estableciendo preguntas generales e individuales. Con relación a las preguntas, se aprecia que para este estudiante es de vital importancia el tipo de preguntas que el profesor debe hacer y lo que debe lograr con las mismas.

E4 hace referencia a los aspectos de la gestión asociadas con la organización de los estudiantes [acciones de carácter general mencionadas por Doyle (1985), Llinares (1999) y Gavilán, García y Llinares (2007)]. Sin embargo, cuando hace referencia explícita sobre la importancia de que el docente formule preguntas para orientar a los estudiantes, hace alusión a las tareas asociadas a la gestión de la interacción entre los estudiantes y el conocimiento matemático. E4 da muestras de comprender que las preguntas que generan aprendizaje son importantes en la gestión del profesor:

I. En tu respuesta a la carta dices que has evidenciado cambio en la concepción sobre tu gestión como profesor en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la *resolución de problemas y que ese cambio se debe a diversas cosas que se han puesto en acción en el curso, ¿a qué cosas te refieres?*

E4: En este curso el rol del profesor es muy importante, pues él plantea el problema, pero uno termina creyendo que es de uno. Además, el profesor en clase habla con los grupos y allí él pregunta teniendo en cuenta lo que uno ha hecho y uno también le pregunta, sólo que las preguntas que el profesor hace son duras y cuando se discuten las respuestas con los demás, se da uno cuenta que está resolviendo sus propias dudas. Eso es lo que yo quiero hacer cuando sea quien oriente.

Los estudiantes en este grupo se caracterizan porque indican explícitamente formas en las que el profesor interactúa con los estudiantes. Por ejemplo, el estudiante E4 indica la capacidad del profesor para identificar las estrategias usadas por los estudiantes, cuando dice «[…] él pregunta teniendo en cuenta lo que uno ha hecho». La segunda acción está asociada a la capacidad del profesor para interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes. Esto se evidencia cuando E4 dice: «él pregunta teniendo en cuenta lo que uno ha hecho y uno también le pregunta, sólo que las preguntas que el profesor hace son duras y cuando se discuten las respuestas con los demás, se da uno cuenta que está resolviendo sus propias dudas». Finalmente, E4 subraya el papel de hacer preguntas a sus estudiantes que les permitan avanzar en la comprensión del problema y los conceptos involucrados. Esto es, E4 describe cómo el profesor decidió responder (decisiones de acción) teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes. Esta destreza es la tercera acción que E4 desea implementar cuando sea profesor.

Estas tres acciones que E4 menciona caracterizan a los estudiantes de este grupo; que reflejan las destrezas que Jacobs et al. (2010) conceptualizan como parte de la competencia docente "mirar profesionalmente".

4.3. Cambios al final de la intervención

La comparación entre las respuestas al principio y al final de la intervención mostró cambios significativos en las concepciones de los estudiantes sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El primer cambio está relacionado con el número y tipo de actividades que los estudiantes consideraban parte de la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, al principio de la intervención se observó que los estudiantes consideraron un número máximo de tres actividades relacionadas con la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. En contraste, al final de la intervención veinte estudiantes conciben su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje como aquella donde se deben hacer múltiples acciones relativas a la gestión del conocimiento matemático (algunas vinculadas con la competencia docente "mirar profesionalmente").

Otro cambio es la complejidad con que los estudiantes se manifestaron sobre las actuaciones del profesor con relación a su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en ambientes de la resolución de problemas. Esta complejidad se observa, por ejemplo, en cómo se refieren inicialmente a la guía u orientación del profesor y cómo lo hacen cuando hacen alusión a la misma en la segunda aplicación del instrumento. En su concepción de gestión del proceso enseñanza-aprendizaje, los estudiantes vincularon habilidades del profesor, asociadas a otra competencia, a su concepción de gestión del proceso enseñanza-aprendizaje. Este hecho es un cambio esencial pues la gestión dejó de concebirse como un conjunto de máximo tres actividades para convertirse en una competencia que involucra destrezas básicas de otras competencias.

4.4. Sobre los factores que apoyan o limitan cambios

Los factores que apoyan o limitan los cambios se han inferido desde el análisis de las trascripciones de las videograbaciones de las interacciones del grupo de trabajo G1 en la resolución de los problemas a lo largo de las sesiones de clase y de los cuadernos, de los informes elaborados por los estudiantes en diferentes momentos del trabajo desarrollado en el curso y del visionado de las videograbaciones del gran grupo.

Los datos de esta viñeta proceden de las sesiones 4, 5, 14, 30 y 48. En estas sesiones, los cuatros estudiantes del curso G1 dieron respuesta, a dos preguntas planteadas en la primera sesión de clase. Estas preguntas fueron las siguientes:

> *¿Qué orientaciones daría usted, como profesor, para que sus estudiantes encuentren un camino de solución a cada uno de los problemas propuestos?*
>
> *¿Cuál sería una propuesta de gestión del proceso enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas que usted propondría? Tome como base su experiencia como resolutor y su trabajo con esta metodología en donde usted se visualice como futuro profesor.*

Un resultado que arrojó la investigación es que los cambios en las concepciones de los estudiantes para profesor obedecieron primordialmente a elementos propios del curso. Por ejemplo, un factor que parece influir es la posibilidad de trabajar en situaciones apoyadas en la resolución de problemas. Por ejemplo:

E30: Es que yo me he dado cuenta que el profe siempre nos escucha detenidamente a lo que decimos y hace caras como si fuera súper interesante lo que decimos, yo no sé si eso sea importante, pero me hace sentir bien poderle expresar lo que pienso con tranquilidad.

E32: Bueno, lo que yo pensaba era parecido. Mejor dicho, para mí lo importante es que el profe siempre pregunta primero ¿Cómo vamos?, las dudas o lo que sea y luego lo que nos dice tiene en cuenta todo lo que hemos dicho.

E30: Sí, eso también, pero es como la manera en que nos escucha [...] *Bueno yo no sé.*

E17: Entonces podríamos decir que una cosa importante en la gestión es que nosotros como profes, prestaríamos atención a lo que los estudiantes nos digan sobre el problema y desde allí les daríamos las orientaciones.

En el diálogo anterior, los estudiantes manifiestan que un factor que incide en el cambio de sus concepciones sobre la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje es la forma y el tipo de orientaciones del curso. Esto se infiere de la afirmación: «es que yo me he dado cuenta que el profe siempre nos escucha detenidamente a lo que decimos y hace caras como si fuera súper interesante lo que decimos» que hace el estudiante E30. Esta inferencia se corrobora cuando E32 dice: «para mí lo importante es que el profe siempre pregunta primero ¿Cómo vamos?, las dudas o lo que sea y luego lo que nos dice tiene en cuenta todo lo que hemos dicho». En las declaraciones de estos estudiantes se observa que la interacción con el profesor del curso ha influido en el cambio de sus concepciones sobre la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje.

Otro factor que parece apoyar los cambios en la concepción de los estudiantes fue la dinámica de preguntas sobre el proceso de resolución del problema generadas en el aula. Esto se evidencia en el diálogo siguiente:

E32: Miren [a sus compañeros de grupo] *yo creo que un profesor, mejor dicho, nosotros debemos ser capaces de proponerle a los chinos* [expresión coloquial para referirse a los futuros alumnos] *un problema y de pensar posibles preguntas de ellos. Sin embargo, puede que no hagan ninguna de las preguntas que a uno se le ocurrieron, pero uno debe poder tomar lo que ellos dicen y orientar o hacer algo basado con lo que el chino dijo.*

E17: Eso es claro para nosotros, es lo mismo que hace el profesor con nosotros. Sin embargo, me parece que lo que ellos dicen es que precisamente eso requiere de más estudio, de mucha más planeación. Es que es saber matemáticas o bueno lo que uno esté trabajando y a la vez saber qué decir y cómo decirlo teniendo en cuenta los que el chino ha hecho.

En el diálogo anterior se evidencia que los estudiantes reflexionan sobre la exigencia que tiene un profesor cuando orienta a sus estudiantes. Esto se confirma cuando E17 dice: «es que es saber matemáticas o bueno lo que uno esté trabajando y a la vez saber qué decir y cómo decirlo teniendo en cuenta los que el chino ha hecho». En este caso, E17 está haciendo alusión a la actividad del profesor para entender y analizar el pensamiento de sus estudiantes teniendo en cuenta su conocimiento.

E17 y E32 hacen referencia a que la actividad del profesor va más allá de usar su conocimiento para indicarle al estudiante cuál es el error de su respuesta. Del diálogo se infiere que los estudiantes toman consciencia de que para entender el pensamiento matemático de los estudiantes se debe determinar de qué manera las respuestas de los estudiantes tienen algún sentido desde la perspectiva del aprendizaje de la matemática.

5. Notas finales

Un resultado importante es que se identificaron cambios en concepciones de estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje al finalizar una intervención coincidiendo con lo asegurado por Pehkonen (2006) y Bobis et al. (2016), de que es posible generar cambios en las concepciones de los profesores de matemática. El primer cambio, está relacionado con el número y el tipo de actividades que los estudiantes concebían como parte de la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. El segundo cambio es la complejidad con que los estudiantes se manifestaron sobre las actuaciones del profesor con relación a su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en ambientes fundamentados en la resolución de problemas.

Esta investigación también indica que el profesor del curso y la manera como lo orientó fueron factores que favorecieron los cambios en las concepciones de los estudiantes sobre la gestión del proceso de enseñanza- aprendizaje coincidiendo con los resultados de las investigaciones de Leder, Pehkonen y Törner (2002) y Pehkonen, (2006) que indican que los ambientes de formación innovadores y los maestros de estos cursos inciden en los cambios de concepciones.

La discusión de estos resultados se ha organizado en tres secciones sobre: el significado del trabajo en grupo dado por los estudiantes, la interpretación sociológica del significado de la actividad en el aula y la Teoría de la Objetivación.

5.1. Trabajo de grupo

En este artículo están presentes las interpretaciones disponibles en investigación relativas al trabajo en grupo, tipo de trabajo que consideran primordial los estudiantes para profesor en la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje tanto al principio como al final del curso. Daremos a continuación una lista de estas interpretaciones, haciendo referencia a D'Amore (2015). No se debe creer en una unicidad de interpretación terminológica sobre componentes de las prácticas de aula, que siempre se citan; entre estas, el trabajo cooperativo por su valencia cognitiva fuerte (por ejemplo, el trabajo en grupo de los alumnos) (D'Amore & Fandiño-Pinilla, 2012).

Son múltiples y profundos los análisis modernos sobre esta metodología, por ejemplo, los estudios que definen las "Relaciones cooperativas en la escuela" (Dozza, 2006). En la actualidad existen varias acepciones de la idea de grupo:

- *acepción sociológica*: el grupo es un conjunto de dos o más individuos que buscan un mismo objetivo individual; identifican el objetivo de la tarea y en la coexistencia física de cada uno de los individuos y de los subgrupos el elemento significativo, pero no toman en consideración los aspectos relacionales, de comunicación, ni las dinámicas emotivas y afectivas;
- *acepción antropológica*: el grupo es un conjunto de individuos que se reconocen en determinados valores, mitos, tradiciones, ceremonias, rituales, sistemas de signos; el antropólogo se interesa por la cultura y por el proceso de enculturación (es decir por la transferencia del patrimonio cultural de una generación a otra) y de aculturación (identificada en la hibridación entre culturas);
- *acepción psicológica*: el grupo es un conjunto de tres o más individuos que se reúnen como grupo y con relaciones de influencia recíproca; el psicólogo centra su atención en las relaciones y comunicaciones y por tanto en el sentido de pertenencia al grupo; se habla de grupo sólo cuando se establecen, gracias a retroalimentación, relaciones circulares; aquí se estudia con atención la relación entre emitente y receptor;
- *acepción analítica*: el grupo es un conjunto de tres o más individuos que comunican interactuando entre ellos según una matriz común interpersonal, según un sentir y un pensar progresivamente compartido que se convierte en patrimonio del grupo; en esta acepción es necesaria una matriz de grupo en el cual las comunicaciones interpersonales transcienden el individuo; lo que aquí interesa es la formación de un pensamiento compartido;
- *acepción pedagógica*: un grupo es un conjunto de sujetos – personas que comparten contextos y relaciones dirigidas a reconocer y promover las potencialidades individuales en las diferentes edades de la vida; se trata de una de las acepciones más cercanas a la que nos interesa; pero, según la pedagogía, todos los aspectos precedentes deben ser valorizados dado que cada uno de estos contribuye a crear la identidad misma del grupo y a estudiar las dinámicas que lo caracterizan;
- *acepción formativa*: el grupo es un conjunto de dos o más personas que establecen relaciones de interdependencia y coordinan sus acciones y comunicaciones en contextos concretos con el fin de lograr aprendizaje y co-construcción de identidades, inteligencias y significados; esta acepción es la que mayor relación tiene con la didáctica; la atención se centra en el currículo formativo y sobre las acciones, relaciones, comunicaciones, (re-)construcciones de conocimientos a nivel intra- e inter-subjetivo.

Como se ve, definir que es un grupo, que significa *labor*, en una práctica compartida, es complejo, pero se han dado grandes avances, respecto a las primeras apariciones de esta metodología que aparecía un poco confusa e ingenua. Hoy todo es claro, todo es categorizado y formalizado, y se basa sobre el concepto de trabajo realizado en común. Recordamos también la metodología didáctica de la "discusión en aula", en la cual el grupo coincide con la clase; se trata de un óptimo momento de atribución de significados personales y compartidos y de conceptos entre docentes y alumnos y entre alumnos, que tuvo precisamente en la didáctica de la matemática extraordinarios éxitos.

5.2. Interpretación sociológica de la actividad en aula

Mirando las declaraciones finales de los estudiantes, su complejidad sobre las actuaciones del profesor en el aula dan muestra de la importancia de tener presente que la clase es una sociedad y que, por tanto, cabe revelar las modificaciones de tipo social que se dan en el aula. Muchas de las interacciones entre estudiantes muestran como el aspecto sociológico es determinante en los cambios de concepciones. Para esta nota nos servimos de Bagni y D'Amore (2005) y de D'Amore, Fandiño-Pinilla y Sbaragli (2017).

Una contribución a la comprensión del aprendizaje de la matemática y al estudio de la gestión de actividades en clase viene de la interpretación micro-sociológica propuesta por D'Amore (2005), según la cual la clase es una sociedad específica de individuos cuya unidad social está garantizada por el conjunto de prácticas definidas y compartidas.

La clase responde a los requisitos típicos que los sociólogos exigen para que un grupo de individuos puedan usar la denominación "sociedad" (Robertson, 1977, p. 83). Dichos requisitos son: estos individuos ocupan un "territorio" común (el aula, la escuela); interactúan entre ellos; saben que pertenecen al mismo grupo; tienen, al menos en parte, un cultura común (o, por lo menos, esto es lo que se supone originalmente). La clase puede ser entendida, por lo tanto, como una *comunidad de prácticas compartidas* (Godino & Batanero, 1994; Radford, 1997; D'Amore, 2005) que tiene como objetivo la construcción de conocimiento (aquí: conocimiento matemático).

Cada sociedad determina sus prácticas específicas, algunas originadas de los objetivos constitutivos de la sociedad (en ocasiones abstractos), otras de las adaptaciones al hecho mismo de esta pertenencia. Por tanto, estas "prácticas" se pueden dividir en dos grandes categorías: (1) aquellas establecidas a priori por dicha sociedad (el aprender, el compartir actividades etc.), (2) aquellas que nacen a causa del objetivo que tales actividades se propongan obtener. Las primeras son prácticas codificadas y por tanto *funcionales* (Robertson, 1977); son aquellas que dan un significado a la constitución de dicha sociedad; las segundas, que en D'Amore (2005) son llamadas *meta-prácticas*, son debidas a la específica situación y por tanto extra-funcionales. Los dos tipos de prácticas están condicionadas por objetivos diversos. Por ejemplo, dentro de la misma clase, algunos estudiantes tienen como objetivo aprender aquello que se ha establecido a priori como conocimiento a adquirir (significado institucional) (Godino & Batanero, 1994), para otros el objetivo es aprender a influir en el juicio que tendrá quien evalúa.

En una clase generalmente no existe una aceptación total de los objetivos; por tanto, como explica la sociología, la unidad del grupo se pierde y tiende a conformarse un "grupo secundario" en el cual algunos sujetos privilegian las prácticas funcionales y otros las meta-prácticas (D'Amore, 2005). Entre los estudiantes de una misma clase, algunos aceptan las actividades y los objetivos de aprendizaje propuestos por el docente como representante de una institución de referencia y buscan apropiarse de los significados propuestos. Otros estudiantes no asumen plenamente dichos objetivos y significados, o por carencias de los conocimientos necesarios que precedentemente debían haber sido adquiridos, o por inadaptabilidad a los compromisos escolares. Pero, desde el momento que dicha sistematicidad y formalización son burocratizadas en un sistema social que prevé una evolución, se determina la necesidad, en parte de los sujetos implicados, de realizar determinadas prácticas desviadas como adaptación a la sociedad – clase. La existencia de este fenómeno fue señalada como *contrato didáctico* por Guy Brousseau (D'Amore, Fandiño-Pinilla, Marazzani & Sarrazy, 2010). Es innegable que esta actividad sea aquella que en sociología se llama una meta-práctica difundida entre los estudiantes; no entra entre las prácticas del proceso de enseñanza-aprendizaje que constituyen el sentido a la sociedad clase, sino entre aquellas de adaptación a dicha sociedad por parte del individuo (D'Amore, Font & Godino, 2007).

Estas consideraciones de carácter sociológico explican muy bien una vasta clase de dificultad de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática y en la práctica de aula, cuando el argumento es la matemática (D'Amore, Fandiño-Pinilla, Marazzani, Santi & Sbaragli, 2011). La atención del estudiante, su esfuerzo, se desplaza de aquellas que podrían ser definidas las actividades características funcionales del grupo clase y se transforman en meta-prácticas que no tienen ningún valor en el aprendizaje, por el contrario, lo bloquean y lo desorientan. El docente puede darse cuenta de que existe una dificultad, pero podría no entender su origen. Un estudio concreto en este sector de dificultad podría ser de gran ayuda al docente para entender que está sucediendo en aula. La noción de comunidad de práctica permite además afrontar la cuestión del significado de los objetos matemáticos (D'Amore & Fandiño-Pinilla, 2001; D'Amore, 2003; Radford, 2005; D'Amore et al., 2011), y de interpretar la fallada devolución como el sobrevenir de meta-prácticas que inducen en el estudiante comportamientos desviados respecto al objetivo de aprender conscientemente la matemática.

7.3. Relaciones con la Teoría de la Objetivación

Se notará como las posiciones espontáneamente asumidas por muchos estudiantes para profesor y evidenciadas por sus respuestas al docente y de los coloquios entre estudiantes en aula son muy cercanas a aquellas elaboradas por la teoría de la objetivación (D'Amore, 2015). Entre todas las citas posibles de los trabajos de Radford, elegimos la siguiente porque nos parece la más cercana a las frases espontáneas de los estudiantes objeto de esta investigación:

> «El concepto de labor conjunta, que en la teoría de la objetivación juega un papel central, ofrece una re-conceptualización de la enseñanza y del aprendizaje. En el trabajo conjunto el papel de los alumnos no se reduce a ser sólo sujetos cognitivos. No asumen el papel de sujetos pasivos que reciben el conocimiento ni el de sujetos auto-contenidos que construyen su propio conocimiento. De igual forma, los docentes no se reducen al papel de agentes tecnológicos y burócratas-guardianes e implementadores del currículo. No son los poseedores del saber que consignan o transmiten el conocimiento a los estudiantes directamente o a través de estrategias de sostenimiento estructurado. La noción de labor conjunta sugiere adoptar una perspectiva educativa en la cual se concibe la enseñanza y el aprendizaje no como dos actividades separadas sino como una sola y la misma actividad: aquella en la cual los docentes y los alumnos, incluso si no hacen las mismas cosas, se esfuerzan juntos, intelectual y emotivamente, en la realización de una labor en común» (Radford, 2016, p. 6).

Referencias

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L., & Novotná, J. (2005). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 60*(3), 359–381.

Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La Matematica e la sua Didattica*, *19*(1), 73-89.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: toward a practice-based theory of professional education. En G. S. & L. Darling-Hammond (Ed.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco. EEUU: Jossey-Bass.

Bobis, J., Way, J., Anderson, J., & Martin, A. J. (2016). Challenging teacher beliefs about student engagement in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(1), 33–55.

Bohórquez, L. Á. (2016). *Cambio de concepciones de estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Bromme, R. (1988). Conocimientos profesionales de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, *6*(1), 19–29.

Brophy, J. (1999). Perspectives of classroom management: yesterday, today, and tomorrow. En H. J. Freiberg (Ed.), *Beyond behaviorism: changing the classroom management paradigm* (pp. 43–56). Boston, EEUU: Allyn & Bacon.

Brophy, J. (2006). History of research on classroom management. En C. M. Evertson & C. S. Weinstein (Eds.), *Handbook of classroom management: research, practice, and contemporary issues*. (pp. 17–43). Mahwah, EEUU: Lawrence Erlbaum Associates.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna, Italia: Pitagora Editrice.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna, Italia: Pitagora Editrice.

D'Amore, B. (2004). El papel de la epistemología en la formación de profesores de matemática de la escuela secundaria. *Épsilon*, *20*(3), 413-434.

D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La Matematica e la sua Didattica*, *19*(3), 325-336.

D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: una contribución a la teoría de la objetivación. En L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics. Some past and current approaches to mathematics education* (pp. 151-171). Isonomia, On-line Journal of Philosophy-Epistemologica, http://isonomia.uniurb.it/epistemologica

D'Amore, B., & Fandiño-Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objects mathématiques. En A. Gagatsis (Ed.), *Learning in mathematics and science and educational technology* (pp. 111-130). Nicosia, Chipre: Intercollege.

D'Amore, B., & Fandiño-Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Épsilon*, *58*(20), 25–43.

D'Amore, B., & Fandiño-Pinilla, M. I. (2012). *Matematica, come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*. Firenze, Italia: Giunti Scuola.

D'Amore, B., Fandiño-Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del contratto*. Bologna, Italia: Archetipolibri.

D'Amore, B., Fandiño-Pinilla, M. I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2011). Some relations between semiotics and didactic of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *11*(1-2), 35-57.

D'Amore, B., Fandiño-Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2017). Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, *25*(2), 119-162.

D'Amore, B., Font, V. & Godino, D. J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, *38*(2), 49-77.

D'Amore, B., Godino, J. D., & Fandiño-Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemática*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Davis, G. A., & Thomas, M. A. (1992). *Escuelas eficaces y profesores eficientes*. Madrid: La Muralla.

Delaney, S., Ball, D. L., Hill, H. C., Schilling, S. G., & Zopf, D. (2008). "Mathematical knowledge for teaching": adapting US measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(3), 171–197.

Doyle, W. (1985). Recent research on classroom management: implications for teacher education. *Journal of Teacher Education*, *36*(3), 31–35.

Doyle, W. (1986). Classroom organization and management. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 392-431). Nueva York: Macmillan Publishers.

Dozza, L. (2006). *Relazioni cooperative a scuola*. Trento, Italia: Erickson.

Duke, D. L. (1979). Classroom management. En D. L. Duke (Ed.), *Classroom management: The 78th yearbook of the National Society for the Study of Education, Part II* (Vol. 2). Chicago, EEUU: University of Chicago Press.

Emmer, E. (1987). Classroom management. En M. J. Dunkin (Ed.), *The international encyclopedia of teaching and teacher education*. (pp. 437-446). Oxford, Reino Unido: Pergamon.

Escudero, I., & Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 312-327.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. En G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: a hidden variable in mathematics Education?* (pp. 39–57). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Gavilán, J. M., García, M. M., & Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemática. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(2), 157-170.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *15*(3), 325-355.

Jackson, P. (1975). *La vida en las aulas*. Madrid: Ediciones Morata.

Jacobs, V., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (2002). Beliefs: a hidden variable in mathematics education? En G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Mathematics education library* (pp. 59-72). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. A. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving*. (pp. 3-34). Mahwah, EEUU: Lawrence Erlbaum Associates.

Llinares, S. (1999). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. Da Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia* (pp. 109–132). Lisboa, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional knowledge: a case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, *6*(1), 41–62.

Llinares, S. (2008). Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación. En *III Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas Universidad* (pp. 1-19). Bogotá, Colombia: UPN.

Pehkonen, E. (1994). On teachers' beliefs and changing mathematics teaching. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *15*(3-4), 177-209.

Pehkonen, E. (2006). What do we know about teacher change in mathematics? En L. Häggblom, A.-S. Röj-Lindberg, & L. Burman (Eds.), *Kunskapens och lärandets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist* (Vol. 1, pp. 77–87). Vasa, Finlandia: Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten, Specialutgåva.

Pehkonen, E., Ahtee, M., Tikkanen, P., & Laine, A. (2011). Pupils' conceptions of mathematics lessons revealed via their drawings. En B. Roesken & C. Michael (Eds.), *Proceedings of the MAVI-17 Conference* (pp. 182–191). Bochum, Alemania: Druckzentrum, Ruhr-Universität Bochum.

Perrin-Glorian, M. J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques: l'exemple du concept de milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(3), 279-321.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning* *of Mathematics*, *17*(1), 26-33.

Radford, L. (2005). Body, tool, and symbol: semiotic reflections on cognition. En E. Simmt & B. Davis (Eds.). *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 111-117). Edmonton, Canadá: CMESG.

Radford, L. (2016). Mathematics education as a matter of labor. En M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory*. P. Valero and G. Knijnik, Editors. Singapur: Springer.

Robertson, I. (1977). *Sociobiology*. Nueva York: Worth Publishers Inc.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Simon, M. A. (1997). Developing new models of mathematics teaching: an imperative for research on mathematics teacher development. En E. Fennema & B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 55-86). Hillsdale, EEUU: Lawrence Erlbaum Associates.

Referencias de los autores

Luis Ángel Bohórquez Arenas, Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”, Colombia, labohorqueza@correo.udistrital.edu.co

Bruno D’Amore, NRD Universidad de Bologna, Italia, bruno.damore@unibo.it

Mathematics teacher’s teaching-learning process: factors that support or limit changes in the students’ conceptions

Luis Ángel Bohórquez Arenas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bruno D’Amore, NRD Universidad de Bologna

The question, formulated more than a decade ago by Pehkonen (2006), regarding the conditions under which changes in the beliefs and conceptions of the teacher take place, still remains in force. The research has the objective of changing the students’ conceptions about teachers' teaching-learning process who take part in a teaching training final exam. The results allow us to identify changes in the conceptions that stem from the increase in the number and type of activities students are exposed to. This result is linked to the features of prospective teachers training courses, that support the change in the students’ conceptions, while their previous experiences regarding problem solving limit such changes. Identifying changes in student conceptions about the teacher’s teaching-learning process at the end of an intervention is an important result of research because Pehkonen (2006) and Bobis et al. (2016) have shown that it is possible to trigger changes in both mathematics teachers’ conceptions and students’ conceptions about teachers. In fact, our results show that innovative training environments and prospective teachers raining courses affect the changes of conceptions as the results of Leder, Pehkonen and Törner (2002) and Pehkonen, (2006) have shown. The most important result in this research is that

it can be extended to students who develop the conpetence "professional noticing" since it is linked to their conception of the teaching-learning process.

Working as mathematics teacher educators at the meta-level (to the focus of the teachers on developing their teaching)

Laurinda Brown, University of Bristol, UK

Tracy Helliwell, University of Bristol, UK

Alf Coles, University of Bristol, UK

Recibido el 9 de enero de 2018; aceptado el 3 de abril de 2018

Working as mathematics teacher educators at the meta-level (to the focus of the teachers on developing their teaching)

Abstract

The professional learning of the authors, three mathematics teacher educators, is illustrated in relation to: 1) differences between being a mathematics teacher and being a mathematics teacher educator, 2) the way that novices and experts can learn in the same way through dwelling in the detail of experiences to allow new awarenesses to arise linked to new actions. The theoretical perspectives that inform the discussion are enactivism, meta-communication and relentless consistency. The practices of the three mathematics teacher educators in responding to discussions from their perceptions are at a meta-level to the pre-service teachers and support them in meta-commenting about the process of learning to the children in their classrooms. The one-year postgraduate course has served its community of schools for around 30 years in this style with relentless consistency of practices that serve creativity.

Keywords. Professional learning; teaching mathematics; teaching teachers of mathematics; awareness; meta-communication.

Trabajando como formadores de profesores de matemáticas en un meta-nivel (centrando a los profesores sobre el desarrollo de su enseñanza)

Resumen

El aprendizaje profesional de los autores, tres formadores de profesores de matemáticas, se ilustra en relación a lo que significa: 1) ser profesor de matemáticas y ser formador de profesores de matemáticas, y 2) la forma en la que noveles y expertos pueden aprender de la misma manera viviendo en detalle experiencias que permitan desarrollar una nueva consciencia vinculada a nuevas acciones. Las perspectivas teóricas desde las que se realiza la discusión son el enactivismo, la meta-comunicación (comunicación sobre la comunicación) y ser reiteradamente consistente. Las prácticas de los tres formadores de profesores de matemáticas se caracterizan porque sus respuestas a las interacciones en el aula, desde lo que ellos perciben, están en un meta-nivel para los estudiantes para profesor mediante comentarios de segundo nivel sobre el aprendizaje de los niños en sus aulas. Se describen un curso de pos-graduación de un año de duración impartido durante 30 años e implementado de manera reiterada siguiendo estos principios (en relación a las prácticas que fomentan la creatividad).

Palabras clave: Aprendizaje profesional; enseñanza de las matemáticas; enseñando a los profesores de matemáticas; ser conscientes; meta-comunicación.

Para citar: Brown, L.; Helliwell, T. y Coles, A. (2018). Working as mathematics teacher educators at the meta-level (to the focus of the teachers on developing their teaching). *Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 13, 105 - 122.*

Trabalhando como formador de professores em um meta-nível (de modo a que o professor se foque em desenvolver a sua prática)

Resumo

O desenvolvimento professional dos autores, três educadores matemáticos, é ilustrado com relação a dois aspetos: 1) diferenças entre ser professor de matemática e ser formador de professores de matemática, 2) a forma como formadores em uma etapa inicial e formadores mais experientes podem aprender, de uma mesma forma, através de um hábito de detalhar as experiências de modo a permitir que uma nova sensibilidade possa surgir relacionada com novas ações. As perspectivas teóricas que informam a discussão são a enatividade, meta-comunicação e relentless. As práticas dos três formadores de professores de matemática ao responderem às discussões das suas percepções encontram-se a um meta-nível para os futuros professores e servem de suporte para pensarem sobre, e comentarem, o processo de aprendizagem dos alunos em suas salas de aula. A pós-graduação de um ano tem servido, desta forma, a comunidade de professores nos últimos 30 anos com uma consitência nas práticas que tem promovido a criatividade.

Palavras chave: Aprendizagem professional; ensino de matemática; formação de professores de matemática; sensitividade; meta-comunicação.

Travailler comme formateurs d'enseignants de mathématiques au niveau méta (pour porter l'attention des enseignants sur le développement de leur enseignement)

Résumé

Le développement professionnel des auteurs, trois professeurs d'enseignement des mathématiques, est illustré en lien avec: 1) les différences entre être enseignant de mathématiques et être formateur d'enseignant de mathématiques, 2) la façon dont novices et experts peuvent apprendre de la même manière, en s'attardant aux détails des leurs expériences afin de faire de nouvelles prises de conscience menant à de nouvelles actions. Les perspectives théoriques qui orientent la discussion sont l'énactivisme, la méta-communication et la cohérence incessante (relentless consistency). Les pratiques des trois formateurs d'enseignants en mathématiques en réponse aux discussions de leurs perceptions sont au niveau méta, afin d'aider les futurs enseignants à formuler des méta-commentaires à propos des processus d'apprentissage des enfants dans leurs classes. Ce cours au supérieur d'une durée d'un an est offert depuis environ 30 ans dans cette approche, une pratique de constance incessante au service de la créativité.

Mots clés: Développement professionnel; enseignement des mathématiques; formation des enseignants de mathématiques; conscience; méta-communication.

1. Background

The three authors of this paper have spent a substantial amount of time in their careers teaching mathematics in schools to secondary school children (from 11-18 years old). They have all taken the role that, in England, is usually termed Head of the Faculty or Department of Mathematics and all have mathematics degrees. At some point, they were appointable to academic posts at the University of Bristol, a leading UK and world university, to work, as part of their teaching commitments, with a one-year postgraduate course leading to qualified teacher status (Postgraduate Certificate of Education, PGCE). For Laurinda, this happened around 1990, for Alf, 2010 and for Tracy 2016. Tracy's post became available when Laurinda stepped down from PGCE to begin a three-year process of flexible retirement. This paper explores the theoretical perspectives and methods behind the Bristol PGCE course and the differences between teaching mathematics and teaching teachers of mathematics. What awarenesses are needed in the move from being a teacher of mathematics to being a mathematics teacher educator within this context? What theoretical perspectives support us in our development as mathematics teacher educators? How do we work individually, collaboratively and through the structures of the PGCE course?

Research on becoming a mathematics teacher educator is relatively uncommon and only a few studies on mathematics teacher educator learning exist. It is, however, an area with growing interest (see *e.g.*, Nicol, 1997; Tzur, 2001; Zaslavsky and Leikin, 2004; Even, 2005). According to Jaworski (2008), "teacher educators as researchers take mainly an outsider position in reporting their research; only a few reflect the insider position of teacher educator learning and its impact on their practice" (p. 7). Volume 4 of The International Handbook of Mathematics Teacher Education: The mathematics teacher educator as a developing professional (Jaworski and Wood (eds.), 2008) is one response to this gap in research and it is the second section of this volume, "Reflection on developing as a mathematics teacher educator", where the focus is overtly on "the mathematics teacher educator as an insider researcher developing practice through research in and on practice" (Jaworski, 2008, p. 7), which fits most closely with the subject matter of this article.

The paper begins by introducing the three authors in a mathematics teaching context where our length of experience is similar. We are considered to be expert mathematics teachers. The theoretical ideas underpinning our research and the Bristol PGCE course are then discussed, followed by a more extended piece of writing from each author to explore how the theoretical ideas fit with our developing practice as mathematics teacher educators. These perspectives, from a relatively novice teacher educator through to one with nearly thirty years' experience, are then discussed before conclusions.

2. The context of mathematics teaching and learning

In this section, the focus is three pieces of writing that introduce us as teachers of mathematics. How do we each do this?

2.1. Tracy: Matrices and transformations

I started teaching mathematics in secondary classrooms in 2002. The school where I began teaching as a newly qualified teacher was recognised as being innovative in terms of the approach to the curriculum, with year 7 (11-12 years old) and year 8 (12-13 years old) taught in mixed prior attainment groups through a series of what were called "common tasks". These may be described as projects or rich tasks that students would work on over a series of weeks.

One such project was known to teachers in the department as 'Matrices and transformations' I would always begin by displaying the same six-sided shape (Brown, 1991, see Figure 1). I would then ask, "What do you see?" to which students would usually respond in unison, "A church!" I would go on to reveal that we would be transforming the church using what we call a matrix (sometimes this would involve some conversation about the film which included this word in its title!), and that we would start by using the matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

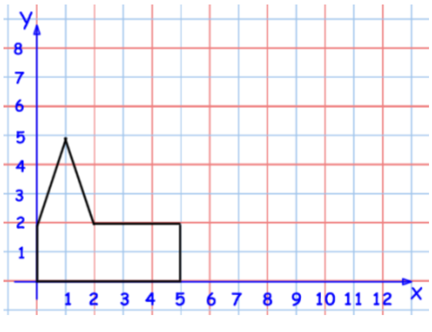


Figure 1. "A church!"

I would label each vertex of the shape with a letter alongside the coordinate of that vertex, mentioning that for this particular project we would be writing coordinates vertically. I would then ask students to watch carefully as I demonstrated the following process for multiplying the matrix by the uppermost vertex of the shape:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \times 1) + (1 \times 5) \\ (0 \times 1) + (1 \times 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

We would then plot the point $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ on the grid and students, when they were able to do so independently, would apply the same matrix multiplication to the other five vertices and plot the new points to form a newly transformed shape (see Figure 2).

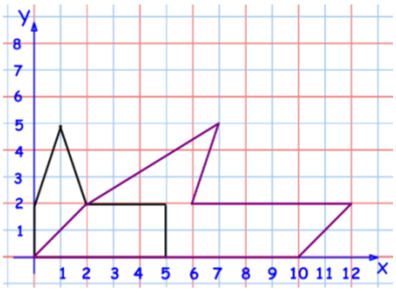


Figure 2. Transformed church

Some discussion of the transformation itself would follow. This discussion was an opportunity to introduce mathematical terminology as well as allow students to begin conjecturing about matrices and corresponding transformations or vice versa. There was a challenge for the students over the coming weeks of, "given any 2×2 matrix, can you predict the transformation without doing the calculations?" Matrices as a topic did not, and still does not, feature on the Key Stage 3 (11-14 years old) or Key Stage 4 (14-16 years old) programme of study in England. However, I saw matrices as a meaningful context through which children could explore transformations at the same time as gaining practice with syllabus items such as plotting coordinates and drawing shapes.

Through working with students on common tasks, I was able to establish a culture with each class where an overall aim of the year was linked to "becoming a mathematician". Over many years of teaching the same tasks, I became attuned to hearing comments and observing actions linked to this aim. A powerful tool in this culture-building was the commentary that I developed alongside the doing of the mathematics. If I observed a student systematically changing the elements of the 2×2 matrix in order to test a conjecture, I would be likely to make a meta-comment along the lines of, "Great, this is a really organised approach to testing this conjecture, what do you think will happen next?" For students being less systematic in their approach, I might comment, "One thing mathematicians do is only change one variable at a time and try to understand this before changing a different variable". Through this type of meta-commentary, it became apparent that students were motivated, asking their own questions and working on their own conjectures, to follow their own lines of inquiry as well as share ideas with peers in what would feel like a joint venture toward a common challenge.

2.2. Alf: Pick's theorem

I have collaborated for a number of years with a charity (https://5x5x5creativity.org.uk) who place artists in schools to run projects, drawing inspiration from the practice of the Reggio Emilio pre-schools (Rinaldi, 2006). I have acted as a mathematician/artist in several primary schools. In the story that follows, a school invited me to instigate work in a classroom that was being given over to be a 'house of imagination' for the students. The story is reconstructed from notes made at the time. The walls were covered in plain paper for the students to write on and I had a projector at the front of the room, displaying a square dot grid.

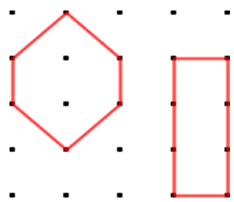


Figure 3. Two 8-dot shapes

I introduced the students to the room (not their usual classroom) commenting, "In this space you are invited to engage in "becoming a mathematician"", which I explained as meaning they ask questions, look for patterns and use their imagination. I then drew on the board two shapes (see Figure 3) and said, "These are both 8-dot shapes. Someone come and draw me another, different, 8-dot shape."

Students came to the board and, without comment, I indicated if the shape was 8-dot or not. The distinction I needed the students to make, in this closed section of the task, was that shapes are labelled by adding up the number of dots inside and on the outside (perimeter). I also used this closed phase of the activity to set up the structure that, whenever students draw a shape, they need to write next to it, I (for the number of dots 'inside'), O (for the number of dots 'outside') and A (for the area of the shape).

After several shapes had been drawn on the board that I classified as "8-dot shapes", I invited the class to look at what had been drawn and comment on patterns or similarities and differences. One student commented that if the number of dots inside is zero ($I = 0$) then the area was three ($A = 3$), for the shapes on the board. I wrote this down as "Abi's conjecture: with 8-dot shapes, if $I = 0$, then $A = 3$". I collected all comments and wrote them on the board. I invited students to plan what they would like to work on within this problem. Some students wanted to try and find 8-dot shapes with more dots inside (I prompted them to try and find the biggest number of dots inside). Some wanted to try shapes with more dots and I first constrained them to stick with 8-dot shapes and see what patterns they could notice so that they had some predictions to test out before attempting other numbers. If they were not sure, they were directed to test out Abi's conjecture. The students then broke off and work continued on tables, with patterns, questions, conjectures and any tables of results written up on the walls.

In reflecting on this lesson start, I introduced several layers of meta-communication. The broadest and most abstract is around an overall purpose for the work, linked to the idea of "becoming a mathematician". The next level down is a set of words around the mathematical processes students are invited to engage with, in particular, that this activity will be driven by the students' "conjectures", i.e., the things they notice that can be turned into predictions. These two layers of meta-communication are independent of the specifics of the task offered to the class. There is then a further set of meta-communications about this particular task, for example, that students must always write down I =, O =, A = for each shape they draw and that they must stick to 8-dot shapes initially. These communications from me about the work the students are about to do, are, from my experience working with this task, important in terms of making it likely students will generate patterns that can be noticed.

2.3. Laurinda: How many squares on a chessboard? (adapted from Brown, Reid & Zack, 1998, p. 50)

Starting to teach, I did not notice the detail of what was happening because I was too busy responding to what the children brought up. The more I used a problem, the more I was aware of all sorts of strands and possibilities, being amazed by original insights and extensions. I was able to place my attention in the learning of the students rather than in the complexities of the problem. Instead of looking for the stimulus of a new problem, dealing with the complexity allowed use of my experiences with the problem, using awarenesses that made interventions and conversations more and more absorbing.

When I taught mathematics to a new group of 11-year-olds, I always used the problem 'How many squares on a chessboard?' When I was the Head of Department, new teachers would sometimes ask, "Doesn't it get boring using the same problem again and again?" I used to say that this was my security. I liked the way the problem could be used to introduce the children to my way of working, which was based on using their ideas.

At the start of the year, the mathematics teachers who worked with the 11 year olds met and talked about what they were going to do with their classes. New teachers to the school would be a part of this group so that they could gain a sense of how the rest of us worked. One year a new teacher joined us. Later, he said that when listening to the conversation he had thought that we were quite strange and working in a way that he had neither experienced nor been trained for. Once he had worked on the squares on a chessboard for himself, he decided to see what would happen with his class. Another thing that helped him make this decision was the discussions between staff in which experiences with the problem had been described, suggesting that the beginnings of the interaction with the class were somewhat predictable.

He took in a chessboard because, he said, that made him feel more secure, although some of the rest of us got children to describe one first. When he asked, "How many squares?", what happened was what he had been led to expect (~ student; - teacher):

~ Sixty-four

- Other suggestions? [Thinking silence]

~ Sixty-five

- Why?

~ The one itself.

~ Oh, lots!

Now there was a problem that they could work on answering together, through looking at simpler cases or seeing the general in the particular 8x8 square in small groups before sharing ideas. He reported that he had been nervous until "sixty-five" came and then he thought, “They have been here before. They know what they are doing”, and relaxed. He was able to learn the problem actively through the students and compare his own attempts with theirs given the support of the other teachers’ experiences.

My role as a teacher seemed to be to respond not through giving answers but by asking questions that could lead to exploration of deeper ideas in mathematics. For instance, “There’re two hundred squares on a chessboard, Miss”, might get a reply, “How do you know you’ve got them all?” Ideas of proof, generality and algebraic ideas seemed always to be around. My motivation is related to working with the children to support their doing of mathematics. It is not the problem itself that is the important focus, rather it is the teaching and learning of mathematics. For new mathematics teachers working within a culture of experience with problem solving, joining in discussions sharing experiences of using a problem can allow them to notice and respond in their classrooms even when it is a new problem for them. It seems important in this context that there has been some work done on the mathematics first.

2.4. Discussion of the contexts of mathematics teaching and learning

The pieces of writing about teaching and learning mathematics reveal some patterns and differences. First, experience is important for the teachers working with a problem that they have used repeatedly: Laurinda “always” uses the chessboard problem with a new group of 11 year olds; Alf’s communications to students about the work are from his experiences of using the task; Tracy “always” begins her task using “the same six-sided shape.” Another pattern is the fact that learning is from experienced others. Tracy uses a problem from her departmental scheme of work that Laurinda had used and makes it her own while recognising “A church!” Laurinda describes how a new teacher commits to using a task through working with more experienced others and recognises “sixty-five”. Alf is the experienced teacher-in-residence, with awareness from experience that introducing the notation I, O, A is useful. Regarding meta-communication, Alf describes several layers of meta-commenting, that is, talking about the students’ work, e.g., “becoming a mathematician.” Tracy also explicitly mentions meta-communication, e.g., mentioning, “becoming a mathematician” as a purpose for the year for her students. Laurinda talks about responding with, “How do you know you’ve got them all?” leading to ideas of proof, which feels like a comment that would support “becoming a mathematician”. Moreover, all three teachers work with what the children bring to the situation, however structured the start of the activity, commenting on patterns observed.

In the next section, some theoretical background to these observations will be given, followed by the application of the ideas to the design of the University of Bristol PGCE course.

3. Theoretical perspectives

We discuss three ideas linked to our theoretical perspectives arising out of the reflections on the three initial pieces of writing: meta-commenting, enactivism and relentless consistency.

3.1. Meta-commenting

Both Alf and Tracy explicitly mentioned meta-communication in their pieces of writing. This idea has become embedded in our practice as mathematics teachers and for Alf and Laurinda as mathematics teacher educators. For Tracy, being able to meta-comment as an expert teacher does not lead to the awareness of how to respond as a new mathematics teacher educator. She is researching her own practice to learn how to respond in this new situation.

Pimm (1994) described some teaching as being “constantly organized [sic] by meta-comments, namely that the utterances made by students are seen as appropriate items for comment themselves” (p. 165). In this writing, we would add that the behaviours of the students in mathematics classrooms are also appropriate items for comments, e.g., “being organised”.

From their study of animal behaviour, Ruesch and Bateson (1951) introduced the term meta-communication. Described as “an entirely new order of communication” (p. 209) and defined as “communication about communication”, this new order allowed them to explain some complex and paradoxical attributes of social interaction. Any instance of interpersonal communication has a “report” (p. 179) and a “command” aspect. According to Watzlawick, Beavin and Jackson (1967), the report aspect of a message conveys information whereas the command aspect concerns how the communication is to be taken and therefore to the “relationship between the communicants” (p. 33). The relationship aspect of communication is “identical with the concept of metacommunication” (p. 34). The ability to meta-communicate appropriately “is not only the condition sine qua non of successful communication, but is intimately linked with the enormous problem of awareness of self and others” (p. 34). Using meta-communication in classrooms allows the children to know how to act in the moment in relation to the teacher, their peers and the community that is being built. As mathematics teacher educators, we need to meta-comment to pre-service teachers so that they know how to act when meta-commenting to the children learning mathematics in their lessons.

3.2. Enactivism

Laurinda, with Alf and with another collaborator, David Reid, have written many papers related to enactivist ideas (*e.g.*, Brown & Coles, 2011; Reid & Mgombelo, 2011). There is not space in this paper to describe enactivist principles but Laurinda and Alf have described how novices and experts in their professional learning can use practices of “deliberate analysis”. Novices do not have to behave in different ways from experts when they learn. The process is of staying with the detail of an experience without judgement or justification to allow new awarenesses to arise. The key is to locate moments of ineffective action and then attempt to locate the “intelligent awareness” that led to that action, which do not suit the teacher’s aims. Locating the awareness that led to the action requires a non-judgmental dwelling in the detail, to locate the possibilities for acting differently; initially what might have been done differently at the moment in question and then, crucially, what might be done differently in the future.

Enactivism comes from a biological basis of being where we see the world through our experiences, our history of interactions with it. We do not see what is really there but see what we have come to notice as important to our survival or interest. The frog catches the fly through experience, in an embodied act that happens too quickly for there to be conscious control. For us enactivism is about seeing more and seeing differently through multiple perspectives in interaction with the environment, including the people in it and what we see is related to what we do, because what we do patterns our world.

3.3. Relentless consistency

After working with the UK government to implement the National Strategies for numeracy and literacy, Fullan applied his learning to the raising of standards in literacy and numeracy in Ontario, Canada. His learning was distilled in *Six secrets of change* (2008). The six secrets are statements related to the process of working as leaders of change rather than anything to do with the content of the change process. There is no mention to literacy or numeracy, for instance. In the fourth secret, “Learning is the work”, Fullan discusses the importance of what he calls “relentless consistency” within the system, not to dampen creativity but to allow the rethinking and redoing cycle that seems to be so important. For us, what seems important is the process of using the same task to support the shift to the teacher being able to focus on the relational meta-communication about the work the children are doing on the mathematics. In enactivist terms, we act out of our history of structural coupling with the world.

4. The design principles of the Bristol PGCE course

The course that Laurinda designed around 1995 and Tracy and Alf now work on is the Bristol mathematics PGCE course. In the UK, prospective secondary mathematics teachers will have a degree in mathematics or a mathematics-related subject and apply to a university education department for a one-year PGCE course either directly after completing their degree or later in life, after having worked in such careers as being an actuary, engineering, ICT professional or even managing a pub or tree-felling! Showing how metacommunication, enactivism and relentless consistency are built into the design of the course will support the reading of writing where each of the authors writes about their learning and research as mathematics teacher educators.

The PGCE course has times in the university and periods where the pre-service teachers teach in schools. The University tutors visit the schools where the pre-service teachers are placed. The University tutors and school mentors form a community of learners where many of the mentors themselves did the course. Both Alf and Tracy have been mentors when they were in school and Tracy did the course herself.

We interview and offer places to those students who contribute to the widest spread of age; experience; and views and applications of mathematics as possible. The multiplicity of views and the fact that we, as tutors, do not believe that there is one way of teaching mathematics lead to a learning environment where the interactions and sharing between the group of prospective teachers is central. Their task, given to them at the start of the year, is to become the teacher that is possible for them. The importance of the group interactions is often commented on as part of our end-of-year evaluations. Given that our prospective teachers already have their mathematics related degrees, we do not teach them advanced mathematics as such. We do, however, spend time in workshops where they transform their learning of mathematics to extend the range of their possible offers to their pupils through listening to and working with the ways their fellow prospective teachers have of solving mathematical problems or of presenting activities to students. These ways of working consistently provide positive learning experiences from course and inspectorial evaluations. Our role during times with the group is to orchestrate the learning environment, meta-commenting at the various levels introduced by Alf in his first piece of writing, *e.g.*, in relation to the purpose for the year, to a range of responses heard, to what has not been heard and in previous years have been.

We describe the course, for students, at a meta-level. In the timetable for the Autumn Term of the course, structures emerge. On Friday mornings, there are ‘Groups’, where we split the cohort into two or three tutor groups dependent on personnel. The groups have the tutor who will visit them in school and work with them in reflecting time on Friday mornings at the university. Monday mornings are workshops where we work at some mathematical activities together as a class and then develop our thinking on issues that arise. Similarly, there are patterns that emerge over the year, *e.g.*, when the prospective teachers arrive back from a period of school practice, they sit in reflecting teams of three to discuss their developing practice using the details of their experiences to distil out issues. The way the course works is through the rethinking and redoing cycles of relentless consistency.

During the group sessions on Friday, we are explicit about a way of working where they share details of their practices and listen to others to extend their range of strategies, not judge what someone else offers. Over time, the group learns to trust this process and shares more openly in learning conversations. From the details of practice arise issues such as, how do we get children sharing responses to an activity? The group then develops strategies to tackle such an issue from both their observations of other teachers in the schools and their own teaching. So, the relentless consistency of these practices does not dampen creativity but supports the prospective teachers in both seeing the strategies they use as valuable to others, whilst also seeing more and differently in that they are opened up to strategies they were not aware of that become possibilities for future action for themselves. The sharing is in relation to teaching strategies that support the children to learn effectively. This is the responsibility of the pre-service teachers and they are commenting about their children’s learning, whilst the university tutors are meta-commenting on these comments. As leaders of the group, we keep repeating what matters, e.g., “no right or wrong action, just what you did and reflecting on it”, and there do not seem to be many of these statements. As our student teachers learn to learn about the children in their classrooms as mathematics learners, we learn about the patterns related to becoming a teacher of mathematics. The student teachers have the task of learning to teach mathematics, however, we cannot do it for them.

During the Spring Term, the pre-service teachers are in school and in the Summer Term they identify issues that they want to work on. It is during the Summer Term that Tracy engaged the group with the matrices and transformations task above, realising that she was not so comfortable beyond meta-commenting on the mathematics. There was a space created where meta-comments on the process of becoming a teacher would be possible with more experience.

The PGCE course was designed on enactivist principles, “seeing more, seeing differently”. We are working to support the pre-service teachers in extending their range of practices and to do this they have to become aware of what they are not doing. This can happen through the opportunities to work in groups with peers discussing school experiences and their perceptions of the same university experiences. These “nots” are important for the pre-service teachers’ learning and for our learning as teacher educators (see Alf’s writing in the following section).

5. Theoretical perspectives in practice

In this section, one piece of writing from each of us illustrates how we work on our professional development as mathematics teacher educators, using the language of our theoretical perspectives.

5.1. Tracy: Working on my awarenesses through my data (PhD related)

Having moved, almost two years ago, into a teacher-educator role, I find myself reflecting on similarities and differences between my previous mathematics classroom and the room where I work alongside a group of pre-service teachers of mathematics. In planning sessions working with pre-service teachers, a useful question for me has been, "What is the purpose of this session, beyond working on the activity itself?" I decided to work with the group on the matrices-and-transformations task. In reflecting on the matrices session with the group of pre-service teachers, one issue that arose for me was around hearing and responding. Having been attuned to hear and respond to comments in a mathematics classroom, I was able to respond as a teacher but was not quite sure how to respond as a teacher educator. The purpose of the activity was "creating a culture of inquiry" on the timetable for the pre-service teachers, so I had some sense of what the session was about other than just sharing the activity. What I was less confident with was how to respond in-the-moment and what, other than my classroom-attuned responses, I could be meta-commenting upon (Helliwell, 2017). The problem of not knowing how to respond to pre-service teachers of mathematics led to me developing a research project for my doctoral studies on becoming a mathematics teacher educator, where my focus is learning how to respond to teachers of mathematics.

I am currently working with a group of ten secondary school teachers of mathematics who come together to talk about ways of developing the mathematical reasoning of the children in their classrooms. My role in the group is to facilitate a discussion where the teachers talk about what they have been doing in their schools and classrooms related to mathematical reasoning. They share ideas and stories and learn from one another. I have worked with this group of teachers for just over a year and we have met as a group five times up to this point of writing.

I am interested in how I use verbal meta-communication when responding to teachers talking about teaching, and in the process of learning to meta-communicate in-the-moment. I am in the early stages of considering my responses. Having transcribed the second discussion of the group of mathematics teachers, my analysis so far has consisted of musing over what makes a response at a meta-level distinctive to a response that is not at a meta-level, but rather at the level of the discussion. Succinctly, is the response: a) a communication about a communication or b) in the frame of the discussion? Consider the four responses in Table 1 (from the second of the recorded discussions with the group of mathematics teachers, X denotes a teacher, T denotes myself). I have included the comment immediately prior to each response.

Table 1. *Examples of responses to mathematics teachers*

Response A	
X4	Um, yeah, from what I thought would be kind of do and review of something at quite a low level and I'd have to really go over here's how you do area, here's how you do perimeter, actually it then turned into they did it all themselves, and you know in the class you get hands up all the time, it was wasn't sir help me, it was sir look at this, look at this, look at this I did it

T	Oh, that's nice, so the difference was in hands
X4	Yeah
Response B	
X6	That does definitely happen with high-ability kids as well, I was just thinking of a time a couple of weeks ago when I was doing conversions and um… We were doing area and volume conversions, but part of the starter was just simple conversions and a kid from a top set was convinced that to get from mm to cm, you times by ten and even putting examples up he still was convinced no it was times by ten. So even though he knows there are ten mm in one cm, he still was convinced you times by ten so I don't really understand how to…
T	Well it is, isn't it, you kind of are timesing by ten, it's ten times bigger, I guess maybe that's where that's coming from

Considering each response as either a) a communication about a communication or b) in the frame of the discussion, I would suggest, on first inspection, that response A is at a meta-level and that responses B is at the discussion-level. In a recent BSRLM paper, I wrote in some detail about my reaction to response A:

> I begin by considering whether "Oh, that's nice, so the difference was in hands"… qualifies as metacommunication, or, in other words, is the utterance a communication about a communication? One difficulty here is possibly with the word *about* which needs further clarification. "Oh, that's nice" is ambiguous in that the use of "that" makes it difficult to evaluate what it is that is labelled "nice". However, the second part of the utterance, "so the difference was in hands" offers an indication as to what I was valuing in that moment, using "so" as the link would suggest the "nice" was in recognition of the previous speaker's acknowledgement of an observed difference, in this case, a different reason for hands going up. Is this communication about communication? Having made the comment myself, I do of course have an insider perspective. One awareness that I know I have is when a teacher talks about a change in their behaviour or that of their students. When this happens, I find myself wanting to highlight that a difference has been noticed and how this difference has been observed. (Helliwell, 2018, pp. 5-6)

Deep in the process of analysing my responses in this detailed way, and through the act of writing, I come to a new awareness. As a head of a mathematics department, I worked hard to change the teaching of the mathematics teachers in my department to develop the type of culture across all mathematics classrooms that I had worked so hard to develop in my own through the use of meta-commentary. As a new mathematics teacher educator, my focus has become one of self-change, so that I am better prepared to support others in making changes in themselves, through the use of a different type of meta-commentary.

5.2. Alf: Awareness of "nots"

A prospective teacher (in my tutor group) emailed me to ask if we could meet after school one day to discuss difficulties he had been experiencing at his placement school. By way of background, this teacher was in the middle of a 12-week placement at a high-achieving city school. He had previously spent a six-week placement at a rural school with much more mixed levels of attainment. At that first school, he had been judged as being at a “Pass” level by the school mentors at one of the 4 Review Points of the PGCE course.

We met soon after the email and I invited the prospective teacher to talk to me about the difficulties he was experiencing. This provoked a number of stories of incidents in school. I was aware of listening with a sense of what I might be able to offer. I suspect I made little comment in between the description of incidents. I have lost the details of these stories except for the one that provoked a response in me. This story concerned an incident with another mathematics teacher in the staff room and what the prospective teacher expressed as being on the receiving end of a social rudeness. With this, an awareness crystallised: in all the stories of incidents, one thing he was not talking about was the students he was teaching. I expressed this awareness with the suggestion, it was as if his concerns were all centred around his relationships with the other teachers. I advised that he place energy and attention in his relationships with the students he teaches and forget about how he thinks the other teachers are reacting to him. Soon after expressing this awareness, our meeting ended.

I had no further contact from this prospective teacher, in relation to difficulties in school. His profile (as judged by the school) improved over the next (and final) two assessment points. Towards the end of the year I asked him what, if anything he felt had changed in the second half of the course. He mentioned several factors as having made it easier for him to deal with issues and incidents in school and teach more effectively: one was meeting a friend who had some similar difficulties he had experienced; and, one was the meeting described above.

One aspect of taking a meta perspective is listening to student teachers in a way that pays attention to whether communications feel in the “right” place, and are of the “right type.” What is “right” in different circumstances will be different and I am aware of having had to work to educate my intuitions (Brown & Coles, 2000; Fischbein, 1987) of what feels “right”, mainly through reflection and discussion, after teaching. An example of what I mean by a “type” of communication is that, in working on video, I will insist on a phase of “reconstruction” of events before moving to any analysis (Jaworski, 1990; Coles, 2014). In order to establish these two phases of communicating, I need to be aware of when participants are not talking within the particular discussion norm (i.e. not offering the “type” of communication required) and act to make them aware of this also. In other contexts, for example on our teacher education course, there will be explicit discussion norms of teachers offering a story from their recent classroom practice, where they have to avoid any evaluation or judgment related to the incident. Again, I will act to intervene if a story begins to slip into, for example, the teacher commenting on what they thought someone else was thinking (which is unknowable). To be able to act, to intervene, and highlight communications that are not within a desired discussion norm, involves paying attention to the content but also to the type of content, or the kind of thing being said (I have written about this previously as a “heightened listening” (Coles, 2014)).

In the story above, what I notice in relation to being ‘meta’ is that over the course of the conversation an awareness crystallized about the “type” of communication that was taking place. Whereas in establishing a discussion norm about using video, I will act to stop a teacher offering an analysis during the reconstruction phase, in this story my action, reflecting back to the teacher what I was hearing, happened after some time. There was no discussion norm for our conversation, meeting as we were, one-to-one and not at a university or school location. As the conversation was taking place, I was aware of a feeling of discomfort. Something "did not feel right" about the "type" of communication taking place, but I was not able to locate the source of this discomfort. With the story of the staff room incident, this discomfort resolved itself into a label for the kind of communication, it was "not about the pupils."

In working with video, I can prepare myself to impose the distinction between "interpretation" and "observation" and given that these are the two types of communication I care about, I find it is now (having worked with these two ideas for twenty years) relatively easy to impose a discipline of starting with observation before moving to interpretation. In other communications with student teachers, for example in the context above, there is a much broader range of potential 'types' of talk that either do or do not feel "right". Part of my on-going work as a mathematics teacher educator is to educate myself about what I am sensitive to. I am beginning to recognise a pattern that noticing what is "not" being said, is one way of becoming attuned to the type of communication taking place.

5.3. Laurinda: Developing as an experienced mathematics teacher educator

Varela (1999, p. 5) uses the phrase "immediate coping" that has a strong resonance for me. The process of learning as a mathematics teacher educator involves being present in the moment in relation with others and being open to awarenesses as they arise. When Alf and I worked together on the PGCE course, we would often sit and talk about recent experiences and, given that we were providing commentary at the meta-level for each other, this provided a forum for us to learn. In "immediate coping" some processes can become reified, habits become habit forming, and the stories we tell ourselves of what we are doing may possibly be revisited and open up new awarenesses. I will tell one example of this.

I have a self-perception that I am a good listener. In interviewing candidates for places on the PGCE course I had a story that I told myself that I would be listening to what they were saying. However, through our process of each of us interviewing the other, there was a time when I went silent when being interviewed by Alf. Some little time later I said, "What I've been asking myself in the last couple of minutes when I went silent is well what am I listening to if I'm not listening to what he's saying, which I suspect I've always thought I was but I'm not of course." There are two discussions that we have during interviews for the PGCE course, one in relation to "Why teaching?" and the other in relation to "Why mathematics?" I usually interview in a pair, the other interviewer being a teacher from a local school who works with us. I am an experienced interviewer and would have thought that I was listening to the content of what the interviewee is saying. However, what became apparent to me in the interview with Alf was that I do not! I am listening for something else. What?

When interviewing, we are looking for people we can work with. When things are going well, the interviewee is able to talk in detail about their experiences (e.g. visiting a school) and able to shift the level of the discussion to be about their learning. One question is important in our decision-making, "What have you learned about yourself from that visit to the school?" At the start of the interview, we say that if there is something that is blocking our offer of a place we will feed that back and there will be another chance. I am aware of the variation in the possible answers, no two ever the same, but, in the majority of cases there is no issue. These are answers good enough to know someone can learn from experience:

- That's a good question. (long pause) I learnt that I can't just tell them. I was talking with a girl who'd called me over because she was stuck. I told her what to do and she said she did not understand. I asked her to show me how far she'd got and this worked better. She sorted out where the problem was for herself.

- I felt uncomfortable because I didn't know what to do when one of them misbehaves. The next time it happened I decided to try to distract back into the mathematics, "Show me how to do that one?" and it worked. I know I don't want to end up shouting.

These are answers that I have made up. But they are a distillation of my experiences. What about when there are issues? It is hard to know when to ask the question. The issues have arisen before the question is asked, one example of which is when asked to describe a lesson that they had observed when visiting a school, the interviewee talks in terms of judgements. There were bad teachers, shockingly low achievement in the students, and the children talked! We feedback that it is best not to make judgements; rather, it is important to try to focus on what they can learn from this experience. Were all the students misbehaving? It is not until the interviewee begins to describe their experiences, rather than sharing judgements that it feels like asking the question about self is a possibility. Even so, if, "No-one's ever asked me a question like that before" followed by anger or bursting into tears from the frustration of not being able to get in touch with their learning are the responses, then no place is offered.

In some cases, the question is asked at the point where judgements are put aside along with negative emotions and I realise that I am not listening to the context of these messages, but to the process, the meta-messages. There might be the story of an individual child's learning, told with energy, linked for me with the idea of presence. Being here, now, "no memory or desire" (Bion, 1970) and having heard this shift, I would feel able to ask the question. The bombast disappears, with the person who arrived being who they thought we might want them to be and they answer openly, sometimes crying, and what they really fear comes out. The place is offered. I am not listening to the content of what is being said but to presence. There is similarity between Alf's interview question, provoking the awareness/learning in me, and what can happen when I am asking the question of the interviewee.

6. Reflections

A number of patterns arise for us in reading through these pieces of writing. Working at the meta-level, there do seem to be a number of types of responses that we do not want to classify here. However, meta-comments in relation to some overarching purpose that is the underpinning to the relational interactions of the group seem central. We find evidence in the "being a mathematician" backdrop to the classrooms of Tracy and Alf (meta-comments such as "being organised"); the purpose for the year on the PGCE course of becoming the teacher they can be; iii) within the mathematics, the matrices and transformations challenge of knowing what a transformation any 2x2 matrix will perform without doing the calculation.

Another important aspect, to allow the process of "seeing more, seeing differently" is to be aware of the "nots" of the other. What is a child in a classroom not able to do? What is the pre-service teacher not talking about? What is Laurinda not doing? "Nots" are powerful ways in which, if meta-commented upon, or the space opened up, in writing or talking, for reflecting on a new awareness, for professional development to happen.

Experts and novices are learning in the same way, rather than, a model where the students copy what the teacher does or the student teachers are given a model of how to teach.

There are some obvious similarities in teaching students of mathematics and pre-service mathematics teachers. There are also important differences, even when running the same task, to the meta-level aspects the communication. For children in classrooms, their focus is the mathematics, the teacher, whilst as a mathematician they may be interested in engaging with the mathematics directly, is supporting their students through comments about their work so that the students come to know what to do in the classroom. The teacher educator's role is similar, but more complex, in that the pre-service teacher or teacher's focus is to support their students in doing the mathematics but the teacher educator's role is to support the teachers by commenting about their experiences in such a way that the teacher learns to comment about their students' doing of mathematics.

There has been a relentless consistency (Fullan, 2008) down the years at the meta-level of the PGCE course so that, even though the way of teaching is not fixed for student teachers, the way of working with university tutors has passed down through the generations of people working at the School of Education and the teachers in school form a learning community.

References

Bion, W. (1970). *Attention and interpretation*. London, UK: Rowman & Littlefield Publishers.

Brown, L. (1991). Stewing in your own juice. In D. Pimm & E. Love (Eds.), *Teaching and learning school mathematics – A reader (for OU course EM236)* (pp. 3-15). London, UK: Hodder and Stoughton & Open University.

Brown, L., & Coles, A. (2000). Complex decision making in the classroom: The teacher as an intuitive practitioner. In T. Atkinson & G. Claxton (Eds.), *The intuitive practitioner: on the value of not always knowing what one is doing* (pp. 165-181). Buckingham, UK: Open University Press.

Brown, L., & Coles, A. (2011). Developing expertise: how enactivism re-frames mathematics teacher development. *ZDM, 43*, 861-873.

Brown, L., Reid, D., & Zack, V. (1998). On doing the same problem. *Mathematics Teaching 163,* 50-55.

Coles, A. (2013). Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(3), 165-184.

Coles, A. (2014). Mathematics teachers learning with video: the role, for the didactician, of a heightened listening. *ZDM, 46*(2), 267-278.

Even, R. (2005). Integrating knowledge and practice at MANOR in the development of providers of professional development for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8(4),* 343-357

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics 3*(2), 9-18.

Fullan, M. (2008). Six secrets of change: what the best leaders do to help their organizations survive and thrive. San Francisco, USA: Jossey-Bass.

Helliwell, T. (2017). Mathematics teacher educator noticing: a methodology for researching my own learning. In F. Curtis (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 37*(2).

Helliwell, T. (2018). Learning to respond: the use of metacommunication as a mathematics teacher educator. In F. Curtis (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 37*(3).

Jaworski, B. (2008) Mathematics teacher educator learning and development: An introduction. In B. Jaworski & T. Wood (Eds), *The international handbook of mathematics teacher education Vol. 4: the mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 1-13). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Jaworski, B. (1990). Video as a tool for teachers' professional development. *Professional Development in Education 16*(1), 60-65.

Nicol, C. (1997) *Learning to teach prospective teachers to teach mathematics*, PhD thesis. The University of British Columbia, Vancouver, Canada. Viewed 15/12/2017 https://dx.doi.org/10.14288/1.0054692

Pimm, D. (1994). Mathematics classroom language: form, function and force. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann, B. (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 159-169). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Reid, D., & Mgombelo, J. (2015). Key concepts in enactivist theory and methodology. *ZDM 47*(2), 171-183.

Rinaldi, C. (2006). *In dialogue with Reggio Emilia: listening, researching and learning*. Oxford, UK: Routledge.

Ruesch, J., & Bateson, G. (1951*). Communication: the social matrix of psychiatry*. New York: WW Norton & Company.

Tzur, R. (2001) Becoming a mathematics teacher-educator: conceptualising the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(4), 259-283.

Varela, F. (1999). *Ethical know-how: action, wisdom, and cognition*. Stanford, USA: Stanford University Press.

Watzlawick, P., Beavin, P., & Jackson, D. D. (1967). *Pragmatics of human communication. A study of interactional patterns, pathologies and paradoxes*. New York: Norton.

Zaslavsky, O., & Leiken, R. (2004) Professional development of mathematics teacher-educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(1), 5-32.

References of authors

Laurinda Brown, University of Bristol (UK), laurinda.brown@bristol.ac.uk

Tracy Helliwell, University of Bristol (UK), tracy.helliwell@bristol.ac.uk

Alf Coles, University of Bristol (UK), alf.coles@bristol.ac.uk

Working as mathematics teacher educators at the meta-level (to the focus of the teachers on developing their teaching)

Laurinda Brown, University of Bristol (UK)

Tracy Helliwell, University of Bristol (UK)

Alf Coles, University of Bristol (UK)

The three authors of this paper have spent a substantial amount of time in their careers teaching mathematics in schools to secondary school children. They have all taken the role that, in England, is usually termed Head of the Faculty or Department of Mathematics and all have mathematics degrees. At some point, they were appointable to academic posts at the University of Bristol, to work, as part of their teaching commitments, with a one-year post-graduate course leading to qualified teacher status (PGCE). For Laurinda, this happened around 1990, for Alf, 2010 and for Tracy 2016. Tracy's post became available when Laurinda stepped down from PGCE to begin a three-year process of flexible retirement. This paper explores the theoretical perspectives and methods behind the Bristol PGCE course and the differences between teaching mathematics and teaching teachers of mathematics. What awarenesses are needed in the move from being a teacher of mathematics to being a mathematics teacher educator within this context? What theoretical perspectives support us in our development as mathematics teacher educators? How do we work individually, collaboratively and through the structures of the PGCE course? The paper begins by introducing the three authors in a mathematics teaching context where our length of experience is similar. We are considered to be expert mathematics teachers. The theoretical ideas underpinning our research and the Bristol PGCE course are then discussed, followed by a more extended piece of writing from each author to explore how the theoretical ideas fit with our developing practice as mathematics teacher educators. These perspectives, from a relatively novice teacher educator through to one with nearly thirty years' experience, are then discussed before conclusions.