UNIVERSIDAD SANTO TOMAS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA

Comunicaciones en Estadística
Diciembre 2017, Vol. 10, No. 2, pp. 281–295

Una falacia en probabilidad ilustrada vía teoría de cópulas[1]

A fallacy in probability illustrated via copula theory

Jarles Andrés Marimon Hernández[a]
jamarimonh@correo.udistrital.edu.co

Luis Alejandro Másmela Caita[b]
lmasmela@udistrital.edu.co

Resumen

En cursos básicos de probabilidad, al abordar el tema de vectores aleatorios se demuestra que las distribuciones marginales de tales vectores pueden obtenerse de manera única a partir de la distribución conjunta. El recíproco de esta afirmación no necesariamente se tiene. Este artículo de tipo divulgativo, pretende, mediante un contraejemplo tomado de Embrechts et al. (2002), y que hace uso de la teoría de cópulas, ilustrar la falacia: "Distribuciones marginales y correlación determinan la distribución conjunta".

***Palabras clave*:** coeficiente de correlación, distribución conjunta, distribución marginal, distribución normal bivariada, teoría de cópulas, vectores aleatorios.

Abstract

In basic probability courses, addressing the issue of random vectors shows that the marginal distributions of such vectors can be obtained in a unique way from the joint distribution. The reciprocal of this affirmation does not necessarily have. This article of informative type, tries, by means of a counterexample taken from Embrechts et al. (2002), and that makes use of the theory of copulas, to illustrate the fallacy: " Marginal distributions and correlation determine the joint distribution ".

***Keywords*:** correlation coefficient, joint distribution, marginal distribution, bivariate normal distribution, copulation theory, random vectors.

[1]DOI: http://dx.doi.org/10.15332/s2027-3355.2017.0002.05
Marimon, J.,Másmela, C. (2017) Una falacia en probabilidad ilustrada vía teoría de cópulas. *Comunicaciones en Estadística*, **10**(2), 281-295.

[a]Matemático Egresado. Integrante del Semillero IPREA-UD. Proyecto Curricular de Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas

[b]Profesor Asistente. Líder del Semillero IPREA-UD. Proyecto Curricular de Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas

1. Introducción

En cursos básicos de probabilidad, un tema de bastante interés se refiere a los vectores aleatorios, y relacionados con ellos están sus distribuciones de probabilidad que los caracterizan de manera única. Se especifica en la teoría que, dada la distribución conjunta de un vector aleatorio, es posible obtener de manera única sus distribuciones marginales aplicando el concepto de límite y haciendo uso de las propiedades de estas funciones.

Al respecto, se afirma en Blanco et al. (2012) que:

> *Si la función de distribución acumulada de las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ se conoce entonces las distribuciones marginales también se conocen. El recíproco, sin embargo, no siempre es cierto.*

Sobre la parte del recíproco en la afirmación, se podría pensar en la posibilidad de obtener la distribución conjunta de manera única, dadas las distribuciones marginales. Esta proposición con bastante frecuencia se asume como un argumento válido, pero no lo es, en lógica se habla de una falacia. Dar en matemáticas un contraejemplo es una forma de demostrar que una proposición es una falacia.

En Embrechts et al. (2002) se establece un contraejemplo que refuta la proposición considerada. La construcción de este contraejemplo se basa en la distribución de probabilidad normal bivariada y la teoría de cópulas. Los autores enuncian la falacia en su artículo como: "Distribuciones marginales y correlación determinan la distribución conjunta". El objetivo propuesto en este documento busca hacer énfasis en la teoría que soporta la construcción del ejemplo que demuestra la falsedad del enunciado, específicamente en la teoría de cópulas.

El documento está dividido en tres secciones, la primera sección se basa en la teoría expuesta en Blanco et al. (2012) y presenta los conceptos básicos de vectores aleatorios restringido al caso bivariado, de manera particular se trata la distribución normal bivariada; la segunda sección está dedicada a la teoría de cópulas, específicamente a los conceptos requeridos para la construcción de distribuciones conjuntas a partir del conocimiento de marginales y se basa principalmente en la teoría expuesta en Nelsen (2006). La tercera sección expone la construcción del contraejemplo que ilustra la falacia de interés y que se presenta en Embrechts et al. (2002). Por último, se dan algunas conclusiones que surgen del desarrollo teórico del artículo.

2. Vectores aleatorios

El concepto de variable aleatoria es piedra angular en el desarrollo de la teoría de la probabilidad. Dado el resultado del experimento aleatorio, el interés recae en la medición que se hace sobre el mismo. El concepto se puede generalizar cuando se trata de realizar más de una medición sobre él mismo resultado del experimento y sus valores son organizados en un vector denominado vector aleatorio. En adelante se hará referencia a vectores aleatorios bivariados.

2.1. Función de distribución conjunta

Definición 2.1 (**vector aleatorio**). Sean X_1, X_2 variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{J}, P)$ A la función $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{X}(\omega) := (X_1(\omega), X_2(\omega))$$

se le llama un vector aleatorio bidimensional y en adelante simplemente vector aleatorio.

Asociado al concepto de vector aleatorio está su función de distribución, esta distribución lo caracteriza de manera única y se trata de una función que describe el comportamiento simultáneo de todas las variables que lo componen.

Definición 2.2 (**función de distribución conjunta**). La función de distribución bivariada de un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{J}, P)$ está definida para todo x_1, x_2 en $\mathbb{R}$ por

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

Ya que la distribución del vector aleatorio queda completamente determinada a partir de su función de distribución, es posible extraer de ella el comportamiento univariado de las variables aleatorias que lo componen, esto es de X_1 y X_2. Mediante un razonamiento sencillo, es posible concluir que las distribuciones de cada variable se obtienen aplicando el concepto de límite como sigue:

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2 \to \infty} F(x_1, x_2),$$

$$F_{X_2}(x_2) = \lim_{x_1 \to \infty} F(x_1, x_2)$$

A cada función F_{X_j} se le llama la **función de distribución marginal** de la variable $X_j, j = 1, 2$.

El siguiente resultado establece las propiedades más importantes para la función de distribución conjunta. Su demostración puede consultarse en Blanco et al. (2012).

Teorema 2.1 (**propiedades de la función de distribución conjunta**)**.** Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio. La función de distribución conjunta F de las variables X_1, X_2 tiene las siguientes propiedades:

1. $$\Delta_a^b F := F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) \geq 0$$
   donde $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ con $a_1 \leq b_1$ y $a_2 \leq b_2$
2. F es continua a derecha en cada componente.
3. $$\lim_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0 \text{ y } \lim_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$$
4. $$\lim_{(x_1, x_2) \to (\infty, \infty)} F(x_1, x_2) = 1$$

Siempre que exista una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

se dirá que el vector aleatorio (X_1, X_2) es absolutamente continuo y se llamará a f la función de densidad de las variables aleatorias X_1, X_2. Una característica de f que se obtiene de la condición 4 en el Teorema 2.1 es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 1$$

También, como consecuencia directa del teorema fundamental del cálculo es posible obtener el siguiente teorema.

Teorema 2.2. Sea X_1 y X_2 variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta F. Entonces la función de densidad de probabilidad f está dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}$$

para todos los puntos (x_1, x_2) donde $f(x_1, x_2)$ sea continua.

2.2. Coeficiente de correlación ρ

Un estudio de mucho interés desde la estadística trata sobre el modelamiento de dependencia entre fenómenos, específicamente referido a la dependencia de tipo lineal. Se definen a continuación dos conceptos importantes asociados a la dependencia lineal entre dos variables aleatorias, estos son la covarianza y el coeficiente de correlación. Para abordar estos conceptos se hace uso de la esperanza matemática y la varianza de una variable aleatoria X notadas por $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$ respectivamente, más detalles sobre las definiciones y propiedades de estas cantidades se pueden consultar en Blanco et al. (2012).

Definición 2.3 (covarianza). Sean X_1 y X_2 variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad y tales que $\mathrm{E}(X_1^2) < \infty$ y $\mathrm{E}(X_2^2) < \infty$. La covarianza entre X_1 y X_2 está definida por:

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{E}\{[X_1 - \mathrm{E}(X_1)][X_2 - \mathrm{E}(X_2)]\}$$

Algunas propiedades de la covarianza son:

- $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{E}(X_1X_2) - \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2)$
- $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{Cov}(X_2, X_1)$
- $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Cov}(X_1, X_1)$
- $\mathrm{Cov}(aX_1 + b, X_2) = a\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$

Un resultado adicional surge de la primera propiedad antes mencionada y es que si X_1 y X_2 son independientes, entonces $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$, esto debido a que $\mathrm{E}(X_1X_2) = \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2)$ dada la independencia entre las variables aleatorias X_1 y X_2. Sin embargo, el recíproco de esta afirmación no se tiene en general.

Una forma alterna para obtener la covarianza se da en el siguiente teorema que establece la que se conoce como identidad de Höffding.

Teorema 2.3 (identidad de Höffding). Si (X_1, X_2) tiene función de distribución conjunta F y marginales F_1 y F_2, entonces la covarianza de X_1 y X_2 siempre que sea finita está dada por

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2))dx_1dx_2 \tag{1}$$

Demostración. Ver McNeil et al. (2005, pág 203). □

Haciendo uso del concepto de covarianza, es posible establecer una medida adicional que es libre de la escala de medida de las variables aleatorias que se involucran, de manera intuitiva puede tratarse como un índice que mide el grado de relación de dos variables siempre y cuando ambas sean cuantitativas, se habla del coeficiente de correlación.

Definición 2.4 (coeficiente de correlación). Si X_1 y X_2 son variables aleatorias con $0 < \mathrm{Var}(X_1) < \infty$ y $0 < \mathrm{Var}(X_2) < \infty$, el coeficiente de correlación entre ellas está dado por

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2)}}$$

Este coeficiente toma valores en el intervalo $[-1, 1]$ y cumple que si las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes $\rho(X_1, X_2) = 0$ como consecuencia de que $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$. Si hay dependencia lineal perfecta entre las variables, es decir, $X_2 = aX_1 + b$ o $P[X_2 = aX_1 + b] = 1$ para $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ entonces $\rho(X_1, X_2) = \pm 1$; por último, cuando hay dependencia lineal imperfecta, $-1 < \rho(X_1, X_2) < 1$.

2.3. Distribución normal bivariada

A manera de ejemplo, y ya que se hará uso de esta distribución en la última sección, se presentará la distribución normal bivariada junto con sus principales características.

Una distribución normal bivariada o también conocida como distribución gaussiana bivariada es una generalización de la distribución normal univariada. Se dice que el vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ tiene una distribución normal bivariada con vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$, que se nota como

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2) \stackrel{\mathrm{d}}{=} N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

si su función de densidad de probabilidad conjunta está dada por la expresión

$$f(\mathbf{x}) := \frac{1}{2\pi}(\det \boldsymbol{\Sigma})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T\right].$$

Más específicamente, si

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

con

$$\sigma_1^2 := \mathrm{Var}(X_1),\ \sigma_2^2 := \mathrm{Var}(X_2)$$
$$\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2$$

donde ρ representa el coeficiente de correlación y

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2) \text{ con } \mu_1 := \mathrm{E}(X_1) \text{ y } \mu_2 := \mathrm{E}(X_2)$$

Se tiene que

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}Q\right), \tag{2}$$

donde

$$Q = \frac{1}{(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right].$$

La familia de distribuciones normal multivariada es, en todo sentido, una familia ya que sus marginales y condicionales son también distribuciones normales. En lo que respecta al caso bivariado, las dos marginales del vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ son normales univariadas, así

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

y

$$f(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

Ejemplo 2.1. Los gráficos que se presentan en la figura 1 corresponden a dos distribuciones normales bivariadas. En la parte superior de la figura se observan, el gráfico de la densidad y al lado, sus respectivas curvas de nivel para una distribución normal bivariada con vector de medias

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$$

y matriz de varianzas y covarianzas

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la parte inferior de la Figura 1 se observan, gráficos de la densidad y sus respectivas curvas de nivel para una distribución normal bivariada con vector de medias

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$$

y matriz de varianzas y covarianzas

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2}\times 2\times 0.7 \\ \sqrt{2}\times 2\times 0.7 & 4 \end{pmatrix},$$

esta última matriz aparece escrita así para identificar fácilmente el coeficiente de correlación, sabiendo que $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_1 \times \sigma_2 \times \rho$.

3. Resultados básicos de la teoría de cópulas

Las cópulas han generado particular interés en probabilidad por ser un punto de partida sin precedentes para la construcción de familias de distribuciones bivariadas, estas son, desde un punto de vista general, funciones que unen las distribuciones multivariadas de un vector aleatorio con sus distribuciones marginales. Un

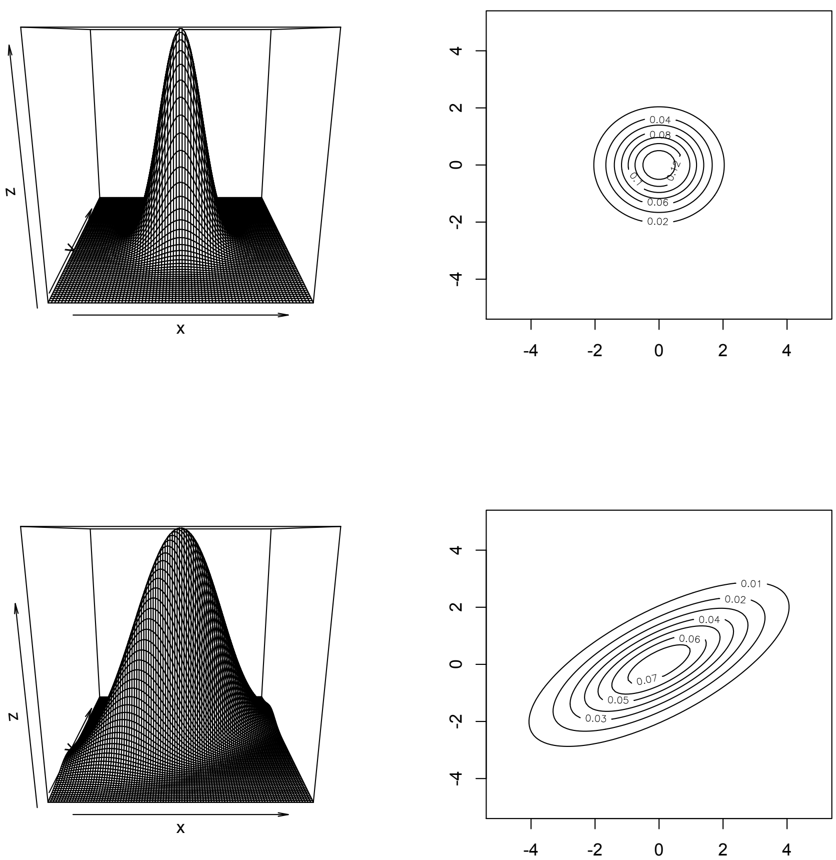

Figura 1: *Densidades y contornos de dos distribuciones normales bivariadas. Fuente: elaboración propia.*

estudio introductorio pero muy detallado sobre cópulas se encuentra en Nelsen (2006).

Definición 3.1 (cópula). Una cópula C es la función de distribución de un vector aleatorio sobre $[0,1]^2$ con marginales uniformes-(0,1). Alternativamente una cópula es una función $C : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}$ con las siguientes propiedades:

1. $C(u, v)$ es no decreciente en cada componente.
2. Para cualquier $u, v \in \mathbb{I} := [0, 1]$

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v),$$

$$C(u,1) = u, C(1,v) = v$$

3. Para cualesquiera $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{I}$ tales que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$

$$C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0$$

3.1. Teorema de Sklar

Se atribuye al matemático Abe Sklar el haber enlazado por medio de una cópula la función de distribución de un vector aleatorio y sus distribuciones marginales; el resultado que lleva su nombre se considera uno de los más importantes de la teoría de cópulas y jugará un papel importante porque, además, proporciona un método para construir cópulas dada una función de distribución bivariada.

Teorema 3.1. Sea F una función de distribución conjunta bivariada con marginales F_{X_1} y F_{X_2}. Entonces existe una copula $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

$$F(x_1,x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \tag{3}$$

Si F_{X_1} y F_{X_2} son continuas, entonces C es única; en cualquier otro caso, C está determinada de forma única sobre el conjunto $RanF_{X_1} \times RanF_{X_2}$. También, si C es una copula y F_{X_1} y F_{X_2} son funciones de distribución univariadas, entonces la función F definida mediante (3) es una función de distribución conjunta bivariada con marginales F_{X_1} y F_{X_2}.

Se puede ver que

$$C(u_1,u_2) = F(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2))^1 \tag{4}$$

es una cópula cuando se evalúa $x_i = F_{X_i}^{-1}(u_i), i \in \{1,2\}$ en (3) y se suponen las $F_{X_i}, i = \{1,2\}$ continuas. Esto quiere decir que se puede usar la expresión (4) para construir cópulas cuando se conoce la función de distribución y sus marginales.

3.2. Cópula gaussiana

Si el vector aleatorio (X_1, X_2) tiene función de distribución normal estándar bivariada, entonces de la expresión (2) se sabe que su función de distribución está dada por

$$\Phi_2^{\rho}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-(y_1^2 - 2\rho y_1 y_2 + y_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dy_2 dy_1,$$

donde $-1 < \rho < 1$ es el coeficiente de correlación entre las variables X_1 y X_2.
Como consecuencia de (4) se define la cópula gaussiana $C_{\rho}^{Ga}(u,v) = \Phi_2^{\rho}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$,

[1] $F_{X_i}^{-1}$ es la función cuantil de F_{X_i}, esto es, $F_{X_i}^{-1}(u) := \text{ínf}\{x : F_{X_i}(x) \geq u\}, i \in \{1,2\}$.

la cual está dada explícitamente por

$$C_\rho^{Ga}(u,v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho)^{1/2}} \exp\left\{ \frac{-(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1-\rho^2)} \right\} dsdt, \quad (5)$$

Aquí la función Φ es una distribución normal estándar. Se concluye entonces que, variables con función de distribución $C_\rho^{Ga}(\Phi(x), \Phi(v))$ son variables normal estándar bivariada con coeficiente de correlación ρ. La Figura 2 ilustra el comportamiento de la cópula gaussiana y su función de densidad.

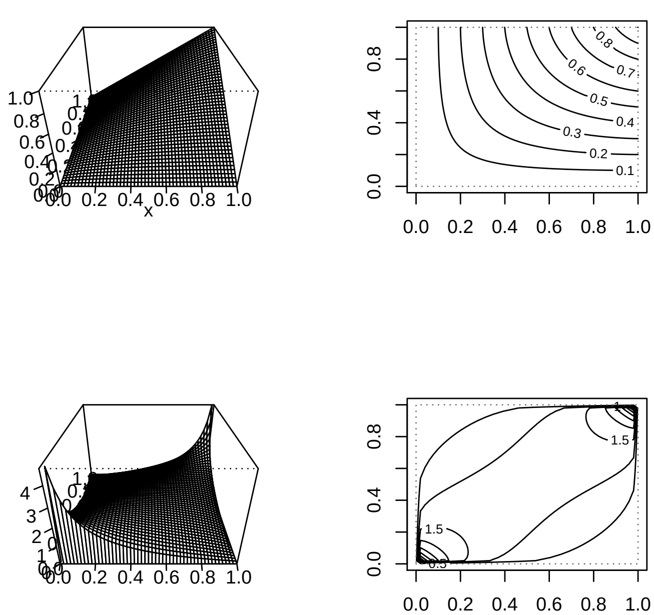

Figura 2: *Arriba: Gráfica y contorno de la cópula Gaussiana con* $\rho = 0.5$. *Abajo: Gráfica y contorno de la función de densidad de la cópula Gaussiana con* $\rho = 0.5$. *Fuente: elaboración propia.*

3.3. Un método para construir cópulas

El siguiente es un método de construcción de cópulas propuesto en Embrechts et al. (2002), el cual se encuentra desarrollado con más detalles en De la Peña et al. (2006).

Si se tienen dos funciones $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $\int_0^1 f(x_1)dx_1 = \int_0^1 g(x_2)dx_2 = 0$ y $f(x_1)g(x_2) \geq -1$ para todo $x_1, x_2 \in [0,1]$. Se puede generar una variedad de cópulas teniendo en cuenta que $h(x_1, x_2) = 1 + f(x_1)g(x_2)$ es una función de densidad bivariada sobre $[0,1]^2$. Por lo cual,

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} h(u_1, u_2)du_2du_1 \\ &= \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} 1 + f(u_1)g(u_2)du_2du_1 \\ &= x_1x_2 + \left(\int_0^{x_1} f(u_1)du_1\right)\left(\int_0^{x_2} g(u_2)du_2\right) \end{aligned} \tag{6}$$

es una cópula. Este método será usado más adelante.

4. La falacia

El principal objetivo de este documento es construir, con base en la teoría desarrollada, un contraejemplo mediante el cual se pueda verificar que la siguiente proposición es una falacia.

Falacia. Distribuciones marginales y correlación determinan de manera única la distribución conjunta.

Lo que se comprobará es que se pueden construir infinitas funciones de distribución bivariadas dada la correlación y el comportamiento marginal de dos variables aleatorias; particularmente, se tomarán variables aleatorias con distribución normal, lo cual también evidenciará los riesgos de asumir normalidad en el proceso de construcción.

Si X_1, X_2 son variables aleatorias con distribuciones normales estándar $\Phi(x_1)$ y $\Phi(x_2)$ respectivamente, y $\rho(X_1, X_2) = \rho$; entonces se sabe de la expresión (5) que la función de distribución de (X_1, X_2) está dada por

$$F(x_1, x_2) = C_\rho^{Ga}(\Phi(x_1), \Phi(x_2))$$

Por tanto, cualquier otra cópula $C \neq C_\rho^{Ga}$ proporcionará una distribución bivariada cuyas marginales tienen distribución normal estándar, pero que no será normal bivariada con correlación ρ.

Se construirá entonces una cópula C como en (6) donde las funciones f y g sean:

$$f(x_1) = \mathbf{1}_{\{(\gamma, 1-\gamma)\}}(x_1) + \frac{2\gamma - 1}{2\gamma}\mathbf{1}_{\{(\gamma,1-\gamma)^c\}}(x_1)$$

$$g(x_2) = -\mathbf{1}_{\{(\gamma, 1-\gamma)\}}(x_2) - \frac{2\gamma - 1}{2\gamma}\mathbf{1}_{\{(\gamma,1-\gamma)^c\}}(x_2),$$

En donde, $\frac{1}{4} \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$ y

$$\mathbf{1}_{\{(a,b)\}}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \in (a,b) \\ 0, & \text{si } \alpha \notin (a,b). \end{cases}$$

Luego $h(x_1, x_2) = 1 + f(x_1)g(x_2)$ es una función de densidad, pues f y g satisfacen las condiciones requeridas, es decir,

- $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $\int_0^1 f(x_1)dx_1 = 0 = \int_0^1 g(x_2)dx_2$,
- Además $f(x_1)g(x_2) \geq -1$ para todo $x_1, x_2 \in [0,1]$.

La función de distribución de $h(x_1, x_2)$ es la cópula que se obtiene, la cual con dominio $\Phi(x_1)$ y $\Phi(x_2)$ tiene la forma

$$\begin{aligned} C(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) &= \int_0^{\Phi(x_1)} \int_0^{\Phi(x_2)} h(u_1, u_2) du_2 du_1 \\ &= \Phi(x_1)\Phi(x_2) + \left(\int_0^{\Phi(x_1)} f(u_1) du_1 \right) \left(\int_0^{\Phi(x_2)} g(u_2) du_2 \right). \end{aligned}$$

Resulta del teorema de Sklar que $C(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) = F(x_1, x_2)$, donde la función de distribución F tiene marginales $\Phi(x_1)$ y $\Phi(x_2)$. Desde luego se puede encontrar su función de densidad conjunta $f(x_1, x_2)$, la cual está dada por

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[\Phi(x_1)\Phi(x_2) + \left(\int_0^{\Phi(x_1)} f(u_1) du_1 \right) \left(\int_0^{\Phi(x_2)} g(u_2) du_2 \right) \right] \\ &= \Phi'(x_1)\Phi'(x_2) + f(\Phi(x_1))\Phi'(x_1) g(\Phi(x_2))\Phi'(x_2) \\ &= \Phi'(x_1)\Phi'(x_2)[1 + f(\Phi(x_1)) g(\Phi(x_2))] \\ &= \Phi'(x_1)\Phi'(x_2) + h(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \end{aligned}$$

donde

$$\Phi'(x_1)\Phi'(x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp^{\frac{-(x_1^2 + x_2^2)}{2}}.$$

La función $h(x, y)$ se anula sobre el cuadrado $[\gamma, 1-\gamma]^2$, por tanto, la función de densidad $f(x_1, x_2)$ también lo hace en el intervalo $[\Phi^{-1}(\gamma), \Phi^{-1}(1-\gamma)]^2$, es decir, en el centro como se ilustra en la Figura 3; esto implica que C para $\gamma < \frac{1}{2}$ y $F(x, y) = C(\Phi(x), \Phi(y))$ no será una distribución normal bivariada. Además, para cada $1/4 \leq \gamma \leq 1/2$ se obtiene una función de distribución distinta, lo que permite asegurar que las marginales dadas determinan infinitas funciones de distribución

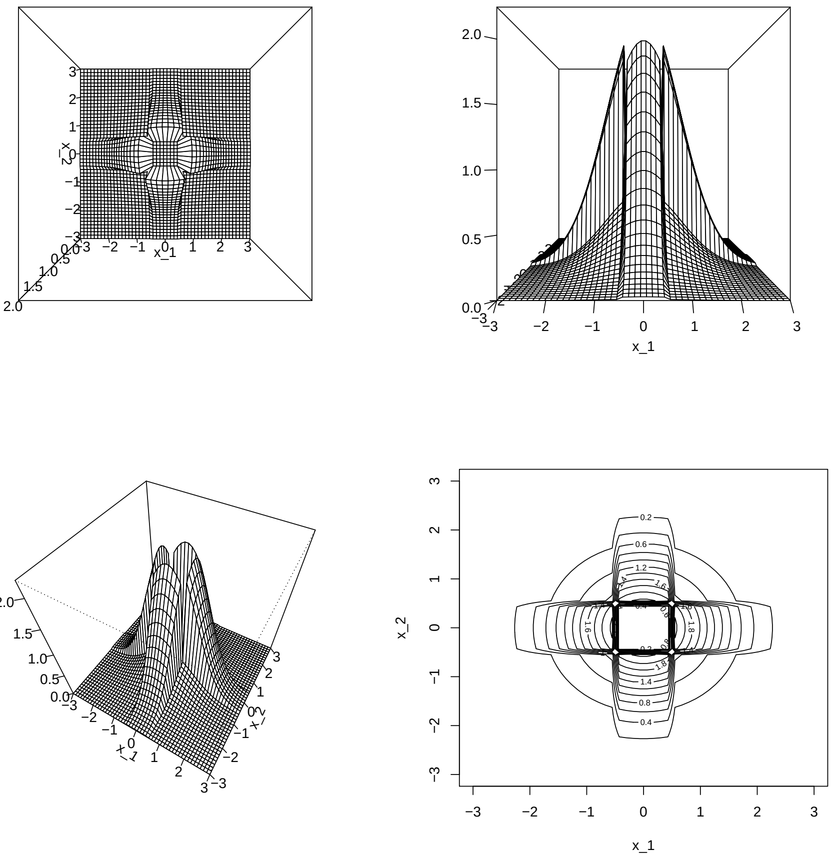

Figura 3: *Densidad y contorno de una distribución que no es normal bivariada pero que tiene marginales normal estándar. Fuente: elaboración propia.*

conjunta.

Adicionalmente se tiene que la correlación independientemente de γ es cero. En efecto, si se considera la función I definida sobre $[0,1]$ por

$$\begin{aligned} I(x) &:= \int_0^x f(u)du \\ &= \int_0^x \left[\mathbf{1}_{\{(\gamma,1-\gamma)\}}(u) + \frac{2\gamma-1}{2\gamma}\mathbf{1}_{\{(\gamma,1-\gamma)^c\}}(u) \right] du, \end{aligned}$$

explícitamente estará dada por

$$I(x)=\begin{cases}\left(\frac{2\gamma-1}{2\gamma}\right)x, & \text{si } 0\leq x<\gamma\\ \frac{2\gamma-1}{2}+x-\gamma, & \text{si } \gamma\leq x<1-\gamma\\ \left(\frac{2\gamma-1}{2\gamma}\right)(x-1), & \text{si } 1-\gamma\leq x\leq 1,\end{cases}$$

esta función posee una simetría alrededor de $1/2$ por la forma en que se ha definido f y por tanto satisface que

$$I(1-x)=\int_0^{1-x} f(u)du=\int_0^1 f(u)du-\int_0^x f(u)du=-\int_0^x f(u)du=-I(x)$$

para todo $x\in(0,1/2)$.
Lo anterior permite afirmar que el coeficiente de correlación es 0, dado que según la expresión (1) y teniendo en cuenta que

$$C(x,y)=xy-\left(\int_0^x f(u)du\right)\left(\int_0^y f(v)dv\right),$$

ya que $g(x)=-f(x)$ entonces

$$\begin{aligned}\text{Cov}\{(X_1,X_2)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(C(\Phi(x_1),\Phi(x_2))-\Phi(x_1)\Phi(x_2))dx_1dx_2\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\left(\int_0^{\Phi(x_1)} f(u_1)du_1\right)\left(\int_0^{\Phi(x_2)} f(u_2)du_2\right)\right]dx_1dx_2\\ &= \left[-\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\Phi(x_1)} f(u_1)du_1dx_1\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\Phi(x_2)} f(u_2)du_2dx_2\right]\\ &= \left[-\int_{-\infty}^{\infty}(I(\Phi(x_1)))dx_1\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}(I(\Phi(x_2)))dx_2\right]\end{aligned}$$

Estas últimas integrales se anulan debido a la simetría de la función I, por tanto se concluye que $\text{Cov}(X_1,X_2)=0$ y de ahí que $\rho=0$ independientemente de γ.

5. Conclusiones

El teorema de Sklar constituye una herramienta fundamental en la teoría de cópulas, dentro de sus bondades se resalta la facilidad que brinda para construir modelos multivariados dado el comportamiento marginal y su utilidad para obtener información sobre la estructura de dependencia de un vector aleatorio, la cual se encuentra implícita en su función de distribución conjunta.

Gracias a la teoría de cópulas se logra ilustrar teórica y gráficamente que las distribuciones marginales de un par de variables aleatorias y su coeficiente de correlación lineal no determinan de manera única la función de distribución conjunta, este hecho evidencia la necesidad de ser cuidadosos a la hora de construir modelos multivariados dados los comportamientos marginales. Así, el coeficiente de correlación lineal, de gran uso en la mayoría de estudios en donde el interés recae en la estructura de dependencia de variables aleatorias, no proporciona toda la información de utilidad sobre un vector aleatorio, ya que no es invariante bajo transformaciones crecientes no lineales sobre las variables, además que variables no correlacionadas en general no son independientes.

Recibido: 26 de Octubre de 2016
Aceptado: 19 de Septiembre de 2017

Referencias

Blanco, L., Arunachalam, V. & Dharmaraja, D. (2012), *Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications*, USA: John Wiley and Sons, Inc.

De la Peña, V., Ibragimov, R. & Sharakhmetov, S. (2006), 'Characterizations of joint distributions, copulas, information, dependence and decoupling, with applications to time series', *Optimality* pp. 183–209.

Embrechts, P., McNeil, A. & Straumann, D. (2002), 'Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls', *Risk management: value at risk and beyond* pp. 176–223.

McNeil, A., Frey, R. & Embrechts, P. (2005), *Quantitative Risk Management: Concepts, techniques and tools*, New Jersey: Princeton university press.

Nelsen, R. (2006), *An introduction to copulas*, USA: Springer.