Funções reais de variável real: Estudo de funções afim e quadrática

Real functions of real variable: Study of related and quadratic functions

JORGE DUARTE[1]

PAULA SOUSA CRUZ[2]

SIDNEI CRUZ[3]

Resumo

A Matemática é de extrema importância na vida de todos e desempenha um papel importante para o desenvolvimento da sociedade e da tecnologia. No entanto, constata-se que ela é uma disciplina com elevado insucesso escolar, apesar dos esforços para reverter isso. O trabalho tem como objetivo desmistificar a ideia que a matemática só está ao alcance e compreensão de alguns, através de um estudo feito com um grupo de alunos repetentes na disciplina de Matemática que frequentam formação numa instituição de ensino superior em Cabo Verde. Os participantes foram desafiados com tarefas exploratórias sobre o estudo das funções reais de variável real com enfoque nas afim e quadrática utilizando o GeoGebra, proporcionando-lhes uma experiência diferente e apresentando a Matemática de forma interativa e atrativa.
Palavras-chave: *Funções Afim e Quadrática; Software GeoGebra*

Abstract

Mathematics is extreme important for everyone's life and has an important role in the development of society and technology. However, it was found, that despite efforts to change this issue, such subject has high level of school failure. This paper aims to demystify the idea that mathematics is only within the reach and comprehension of some, throughout a study done with a group of students, that attend training in an institution of higher education in Cape Verde, and had fail it. Participants were challenged with exploratory task on the study of real-variable real-world functions with a focus on affine and quadratic using GeoGebra, providing them with a different experience and presenting Mathematics in an interactive and engaging way.
Keywords: *Afim and Quadratic Functions; GeoGebra Software*

Introdução

Nesta comunicação, procurou-se com o auxílio do GeoGebra demonstrar que é possível

[1] Instituto Universitário da Educação (IUE) - jhad.poul@gmail.com
[2] Universidade de Cabo Verde (UNICV) - paula.cruz@docente.unicv.edu.cv
[3] Universidade de Cabo Verde (UNICV) - sidnei.cruz@docente.unicv.edu.cv

despertar o interesse e estimular a aprendizagem de uma disciplina, considerada difícil, por muitos e, igualmente temida por alguns, recorrendo a uma metodologia mais atrativa, dinâmica e interativa.

Muito se tem debatido nos últimos tempos acerca das vantagens e desvantagens na introdução de tecnologias informáticas no ensino. Para Gatti (1993, *apud* PAGOTTO, 2015, p.2),

> A incorporação das inovações tecnológicas só tem sentido se contribuir para a melhoria da qualidade do ensino. A simples presença de novas tecnologias na escola não é, por si só, garantia de maior qualidade na educação, pois a aparente modernidade pode mascarar um ensino tradicional baseado na receção e na memorização de informações.

No que se refere a importância das tecnologias informáticas e as relações com a Matemática, D’Ambrosio (1996, *apud* SANTOS, 2011, p.40), comenta que

> … ao longo da evolução da humanidade, Matemática e tecnologia se desenvolveram em íntima associação, numa relação que poderíamos dizer simbiótica. A tecnologia entendida como convergência do saber (ciência) e do fazer (técnica), e a matemática são intrínsecas à busca solidária do sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto ser dissociada da tecnologia disponível.

As preocupações a volta do insucesso em Matemática, aumentam quando se reflete sobre as elevadas taxas de insucesso registadas em diferentes países e que, segundo Ponte (2002, p.1):

> Desde há muito que existe polémica e descontentamento à volta do ensino da Matemática. Tanto os intervenientes directos (professores e alunos), como todos os que se interessam pelo assunto, manifestam invariavelmente frustração e preocupação. No entanto, as razões invocadas são muito diversas. Por detrás da frase “os alunos não sabem Matemática” escondem-se significados e desejos de mudança muito diversos, por vezes contraditórios. Por isso, a questão do insucesso em Matemática não pode ser abordada de um prisma puramente “técnico”.

Em Cabo Verde o ensino da matemática tem sido feito essencialmente de forma expositiva, bastando ao professor recorrer a um quadro negro e através expor os conteúdos programáticos. Na perspetiva de Cabral (2006, p.12):

> Nesta concepção de ensino, em nenhum momento durante o processo de ensino/aprendizagem são criadas situações em que o aluno precisa ser criativo ou onde ele esteja motivado a solucionar um problema. Normalmente, a matemática aplicada nas escolas não oferece ao aluno a oportunidade de se expressar e participar do processo de construção

do conhecimento, o exclui de uma possível aplicabilidade destes conteúdos em sua vida fora da escola.

Atualmente, muito se tem falado na informatização das escolas como forma de melhorar a aprendizagem dos alunos. Mas, sabe-se que a tecnologia por si só, não consegue fazer tudo, pelo que deverá ser um trabalho mútuo entre professores e alunos.

Nesta perspectiva, para a materialização do trabalho convidou-se um grupo de dez estudantes repetentes na disciplina de Matemática que frequentam formação numa instituição de ensino superior em Cabo Verde.

Apesar de serem estudantes que não obtiveram aproveitamento na Unidade Curricular (UC) eles demonstraram entusiasmo e motivação ao longo das sessões realizadas, pois reconhecem a importância que a Matemática representa nas suas vidas e no curso que frequentam.

O trabalho consistiu na realização de seis sessões onde se dedicou ao estudo das funções reais de variável real, em particular as afim e quadrática.

A noção de função foi-se construindo e aperfeiçoando ao longo de vários séculos. O estudo de função não é restrito apenas aos interesses da Matemática, igualmente fazem parte do nosso quotidiano e estão presentes na realização das coisas mais elementares que fazemos[4]. Aires (2013) exemplifica:

- A distância que um peixe percorre depende do tempo durante o qual nada;
- O número de bactérias numa amostra depende da dimensão dessa amostra.

Rézio (2009) define uma função como sendo uma correspondência entre duas variáveis, em que cada valor da variável independente corresponde um e um só valor da variável dependente. É uma correspondência unívoca.

1. Metodologia

Visando a implementação do projeto optou-se por uma investigação quantitativa, descritiva e exploratória, neste sentido aplicou-se ao grupo de estudantes um teste diagnóstico escrito e dois questionários:

[4] Disponível em http://www.grupoescolar.com/pesquisa/a-historia-das-funcoes.html

- Com o teste, tinha-se como objetivo realçar as dificuldades de aprendizagem que normalmente os alunos apresentam aquando do estudo do conteúdo função real de variável real;
- Os questionários visavam indagar sobre a opinião dos estudantes a respeito da disciplina de Matemática no geral e, em particular, sobre o processo de ensino-aprendizagem que vêm sendo submetidos ao longo do percurso académico.

A familiarização com o software GeoGebra, contemplou duas sessões onde foram aplicadas duas fichas, cujos conteúdos visavam a exploração de Menus, e o conhecimento das Folhas Algébrica e Gráfica 2D, bem como a utilização da Barra de Entrada.

Em três sessões posteriores, trabalhou-se as funções Afim e Quadrática, a partir de uma ficha intitulada "Inserção e Análise de algumas funções no GeoGebra". A ficha foi estruturada para que o estudante, partindo do estudo de uma função, afim ou quadrática, incompleta, fosse introduzindo os parâmetros até se chegar na forma canónica e, paulatinamente, fossem comparando as funções conseguidas com a inicial.

Por último, o teste diagnóstico foi resolvido recorrendo ao software, onde se pode verificar o desempenho dos estudantes após as sessões de trabalho e as respostas disponibilizadas em papel. Igualmente, responderam a um questionário para conhecer a opinião de cada estudante acerca da experiência.

2. Apresentação e discussão de resultados

Após a aplicação do teste diagnóstico e do questionário, deu-se a apresentação do GeoGebra e também foi-lhes mostrado a página que dá acesso ao download grátis do mesmo. De seguida, distribui-se a 1ª ficha de trabalho ''Explorando o GeoGebra'' que lhes permitia trabalhar com as opções dos menus, selecionar a vista "quadriculado", definir segmentos de retas, construir polígonos, intersectar retas, utilizar as ferramentas de medição de ângulos, perímetros, áreas, diagonais e também responder às questões formuladas acerca de cada tarefa.

O primeiro contacto com o software foi uma alegria geral e houve quem afirmasse que futuramente não ia ser necessário o uso de cadernos e assim poupar papel.

Com muito entusiasmo e motivação nas sessões seguintes, trabalhou-se as fichas de tarefas sobre funções Afim e Quadrática e por último foi aplicado um teste e um questionário.

Estudo da função afim

Uma função é afim $f: R \rightarrow R$ quando existem constantes a e b que pertencem ao conjunto dos números reais. É uma função cuja expressão analítica é do tipo:

$f(x) = ax + b$

para todo o $x \in R$.

- **Casos Particulares da Função Afim**

Função Identidade

Dada a função $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x$, para todo o $x \in R$ e

$a \neq 0$ e $b = 0$:

- Para **a positivo**, o gráfico da função $f(x) = x$ traduz-se numa reta que passa na origem e bisseta os quadrantes ímpares;
- Para **a negativo**, o gráfico da função $f(x) = -x$ traduz-se numa reta que passa na origem e bisseta os quadrantes pares;

A Figura 1 mostra o gráfico da função identidade.

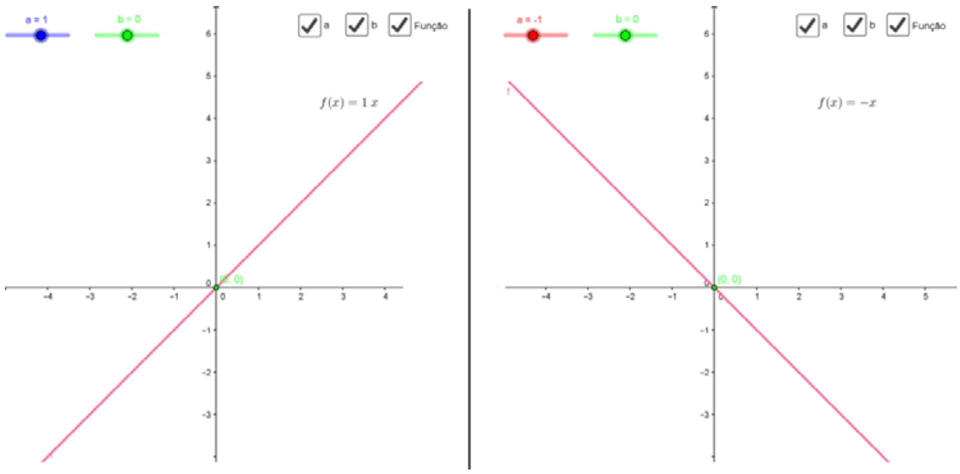


Figura 1:Função identidade

Fonte: Os Autores

Função Linear

Temos a função $f: R \to R$ definida por $f(x) = ax$, para todo o $x \in R$ e $a \neq 0$ e $b = 0$.

A Figura 2 mostra o gráfico da função linear $f(x) = ax$. Graficamente, traduz-se numa recta que passa na origem do referencial.

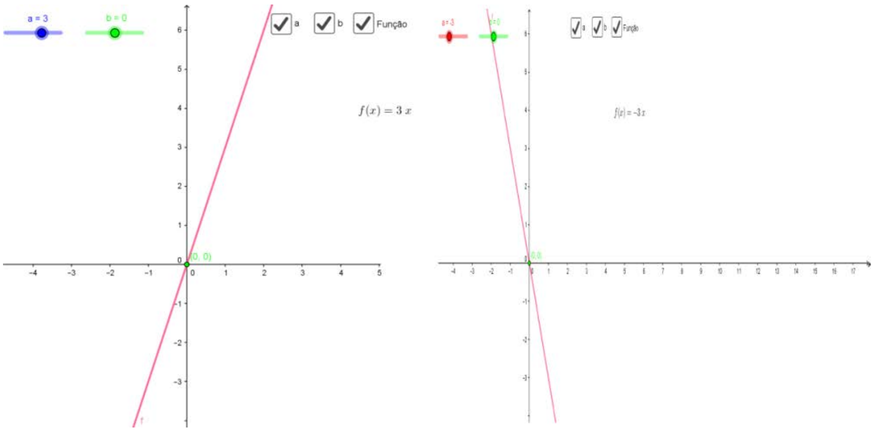


Figura 2:Função linear $f(x) = ax$

Fonte: Os Autores

Função Constante

Temos a função $f: R \to R$ definida por $f(x) = b$, para todo o $x \in R$ e $a = 0$ e $b \neq 0$.

O gráfico da função constante, traduz-se numa recta paralela ao eixo OX, ou seja, uma recta horizontal, conforme Figura 3.

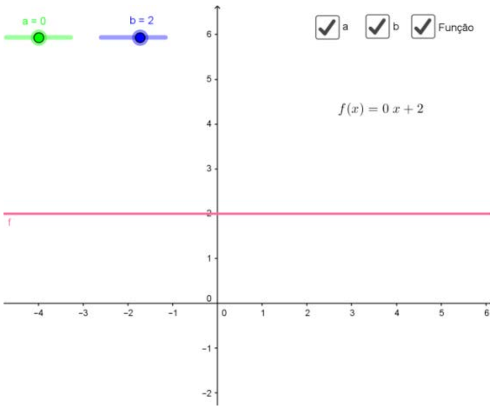


Figura 3:Função constante $f(x) = b$

Fonte: Os Autores

Para o estudo de função afim, os estudantes exploraram as seguintes funções, $f(x) = x$; $g(x) = x + 2$; $h(x) = x - 3$; $t(x) = 2$, tendo-lhes sido solicitado a análise do comportamento dos respetivos gráficos.

Demonstrando limitações de comunicação escrita, os estudantes responderam as questões, apresentando as suas conclusões que, de um modo geral, refletem os ganhos alcançados ao nível da análise e da capacidade de interpretação do comportamento dos gráficos, a medida que iam introduzindo os parâmetros.

Das diferentes respostas dos estudantes, o exemplo da Figura 4 ilustra a tendência das mesmas:

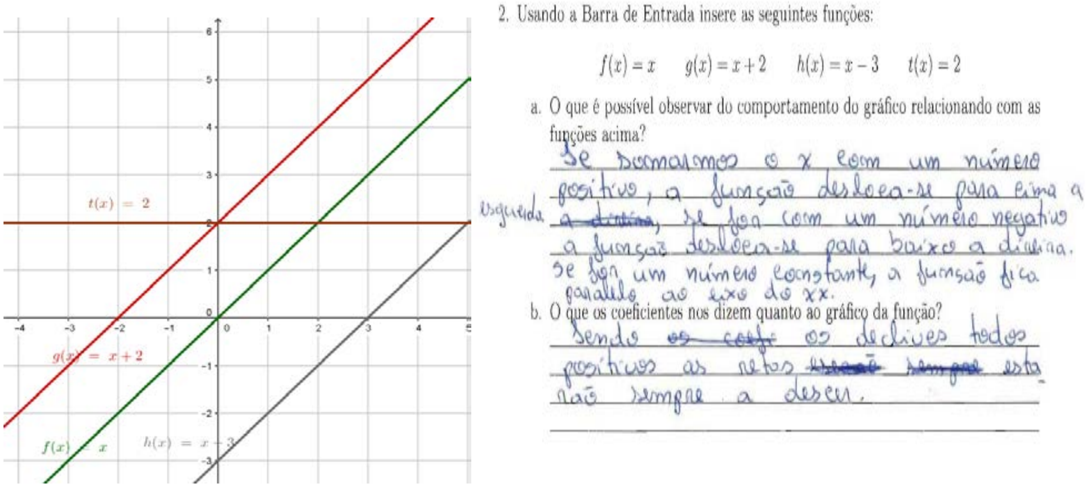


Figura 4. Resposta do aluno A1 à questão 2 da ficha 4

Fonte: Os Autores

Pode-se constatar que o aluno, a sua maneira, percebeu a alteração ocorrida nos gráficos com a introdução dos termos independentes positivos e negativos, bem como da eliminação do termo dependente na função.

Considerando o declive negativo, em geral, os alunos demonstraram ter compreendido que a mudança de posição ocorrida nos gráficos, deveu-se ao sinal do declive.

O exemplo de resposta da Figura 5 ilustra esse entendimento por parte dos alunos.

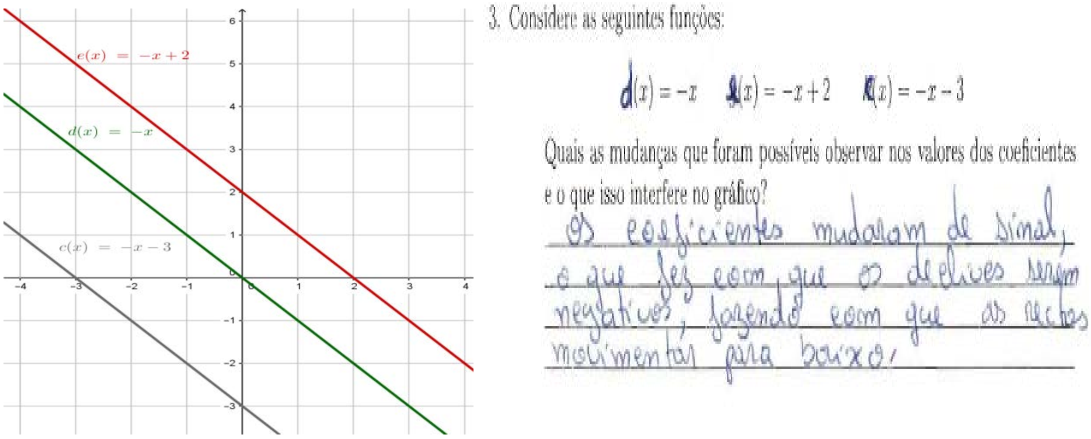


Figura 5. Resposta do aluno A1 à questão 3 da ficha 4

Fonte: Os Autores

Para finalizar o estudo da função afim, foi-lhes lançado o desafio de criarem uma função genérica, $f(x) = ax + b$, em que os parâmetros a e b foram definidos como seletores com o intuito de verificarem as alterações dos gráficos, a medida que iam variando os parâmetros.

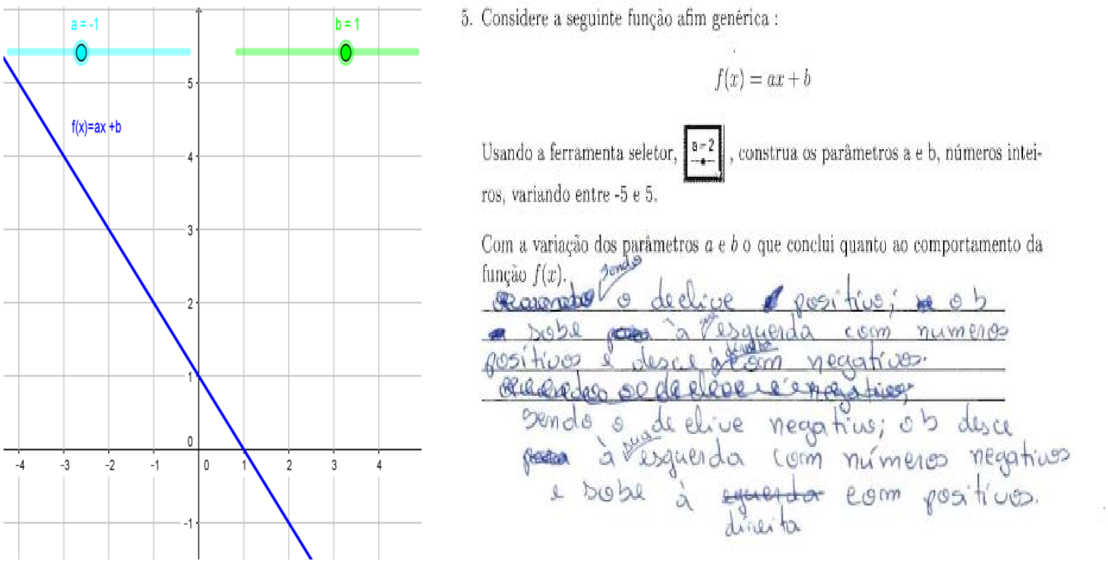


Figura 6. Resposta do aluno A1 à questão 5 da ficha 4

Fonte: Os Autores

Em jeito de conclusão, poder-se-á afirmar que os estudantes ultrapassaram algumas dificuldades antes apresentadas e espera-se que a experiencia venha a contribuir para uma mudança de atitude face a disciplina de Matemática.

Estudo da função quadrática

Uma função $f: R \rightarrow R$ designa-se por quadrática quando existem números reais $a, b\ e\ c$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in R$. O gráfico é uma parábola cujo sentido varia conforme o sinal do coeficiente a**:**

- Quando $a > 0$, a parábola tem a concavidade virada para cima.
- Quando $a < 0$, a parábola tem a concavidade virada para baixo.

A Figura 7 ilustra um exemplo do gráfico de uma função quadrática.

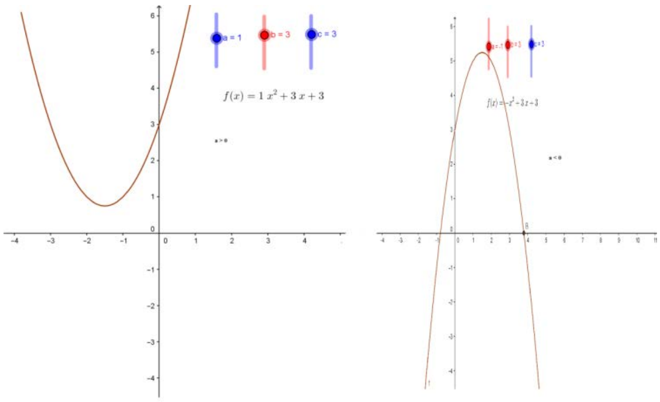


Figura 7. Função quadrática

Fonte: Os Autores

Em relação ao estudo da Função Quadrática, os estudantes analisaram o comportamento dos gráficos das funções, $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + 3$; $h(x) = 9x^2$, tendo-lhes sido solicitado que indicassem, justificando, as razões das alterações ocorridas nos gráficos a medida que os parâmetros eram alterados.

De um modo geral, os estudantes puderam identificar as transformações ocorridas nos gráficos e, acima de tudo, compreenderam o porquê de tais alterações. Para ilustrar esta análise, apresenta-se um exemplo de resposta de um dos estudantes:

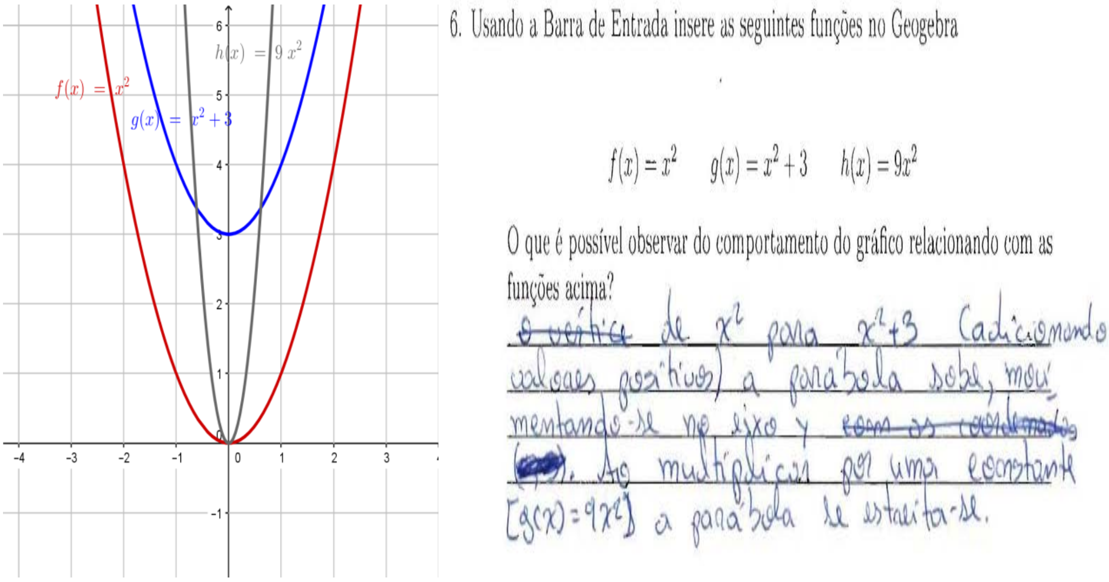


Figura 8. Resposta do aluno A1 à questão 6 da ficha 4

Fonte: Os Autores

Na tarefa seguinte, solicitou-se que alterassem o sinal do termo de segundo grau e que inferissem quanto as alterações ocorridas nos gráficos. O exemplo de resposta que se segue na Figura 9, demonstra o entendimento que a maioria dos alunos teve na análise dos gráficos, percebendo que, com a mudança de sinal, o sentido da concavidade do gráfico muda.

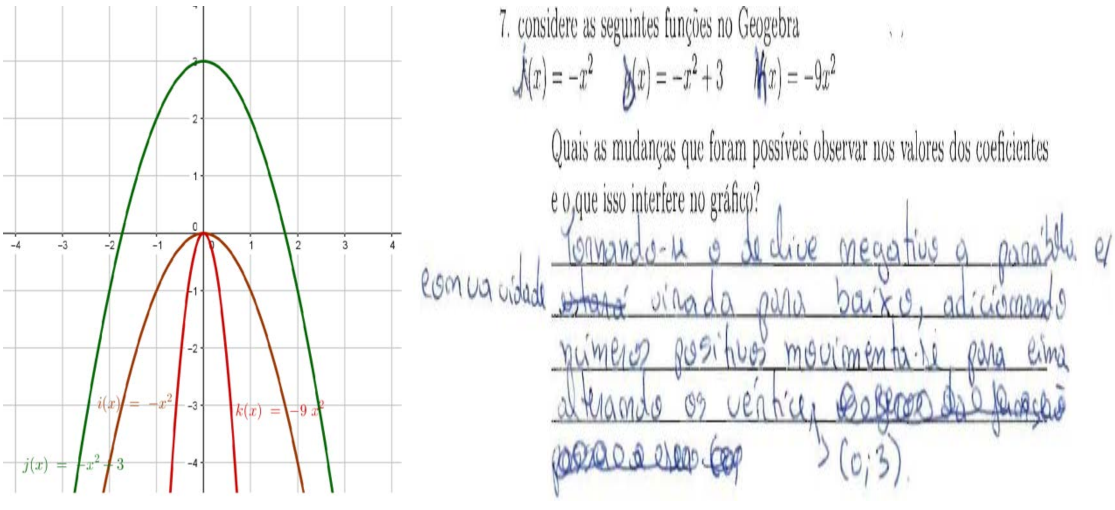


Figura 9. Resposta do aluno A1 à questão 7 da ficha 4

Fonte: Os Autores

Numa função na sua forma canónica, pediu-se aos estudantes que, a partir do gráfico, identificassem zeros, vértice e extremos relativos. Exercício que não constituiu qualquer dificuldade para nenhum dos alunos, tendo todos respondido corretamente.

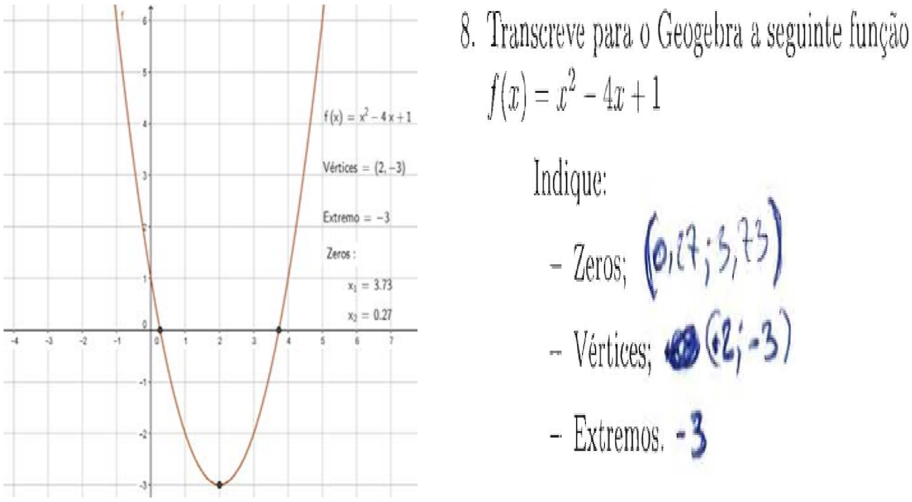


Figura 10. Resposta do aluno A2 à questão 8 da ficha 4

Fonte: Os Autores

Para a generalização do estudo, utilizou-se seletores para definir uma função quadrática genérica. A partir da alteração dos parâmetros, os estudantes iam registando as alterações ocorridas nos gráficos. O exemplo a seguir ilustra a generalidade das conclusões:

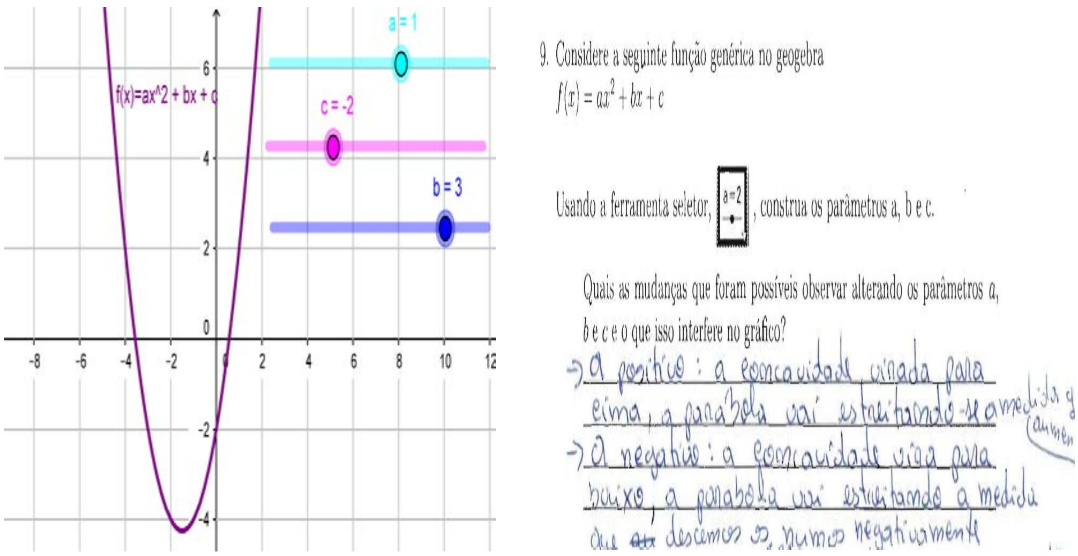


Figura 11. Resposta do aluno A2 à questão 9 da ficha 4

Fonte: Os Autores

3. Análise dos questionários

O questionário aplicado no início da experiência, continha 17 questões estruturadas em três partes que permitiram, respetivamente, caracterizar os participantes, aferir sobre a relação dos estudantes com a Matemática no geral e com as funções reais de variável real em particular.

Os participantes foram na sua maioria do sexo feminino com idades compreendidas entre os 19 e 26 anos, todos estudantes a tempo integral.

Como se referiu anteriormente, apesar dos resultados negativos que os estudantes vêem obtendo na disciplina de Matemática, 80% dos mesmos afirmaram que gostam de Matemática e apontaram algumas justificações para as suas respostas:

- “Ajuda-nos a compreender o nosso raciocínio”
- “Apesar de não ter bons resultados, quando me dedico me entusiasmo.”
- “Porque não tem muita teoria.”
- “Faz-me pensar e testar a minha capacidade.”
- “Porque tudo no nosso dia-a-dia exige matemática.”
- “Gosto mas não estou conseguindo entender essa matemática da universidade”.

E as razões apresentadas por não gostarem de Matemática foram:

- “Porque não gosto de lidar com os números, a minha vocação é mais para as letras.”
- “Quando encontro um exercício difícil tenho tendência em desistir logo a primeira.”

Estas duas afirmações nos interpelam quanto a convicção dos estudantes na escolha dos cursos e na confiança e preparação de base dos mesmos quando chegam no ensino superior. São interpelações que merecem uma análise mais cuidada que poderão ser objeto de estudo numa outra ocasião.

Quando questionados sobre as razões do insucesso na disciplina, como se pode observar na Figura 12, as razões apontadas prendem-se com o tempo disponibilizado para o estudo.

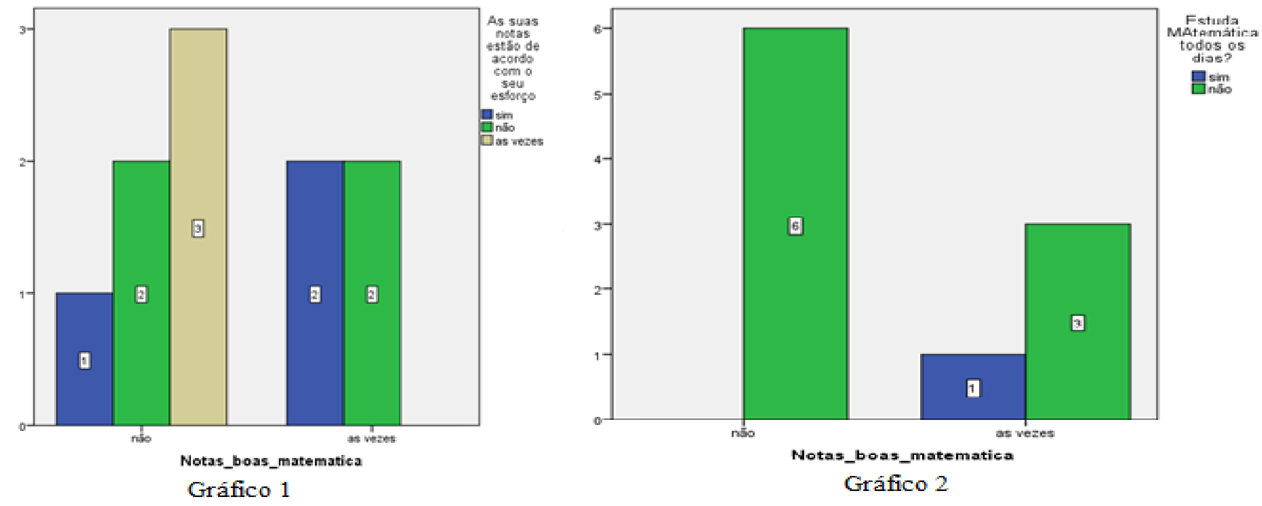


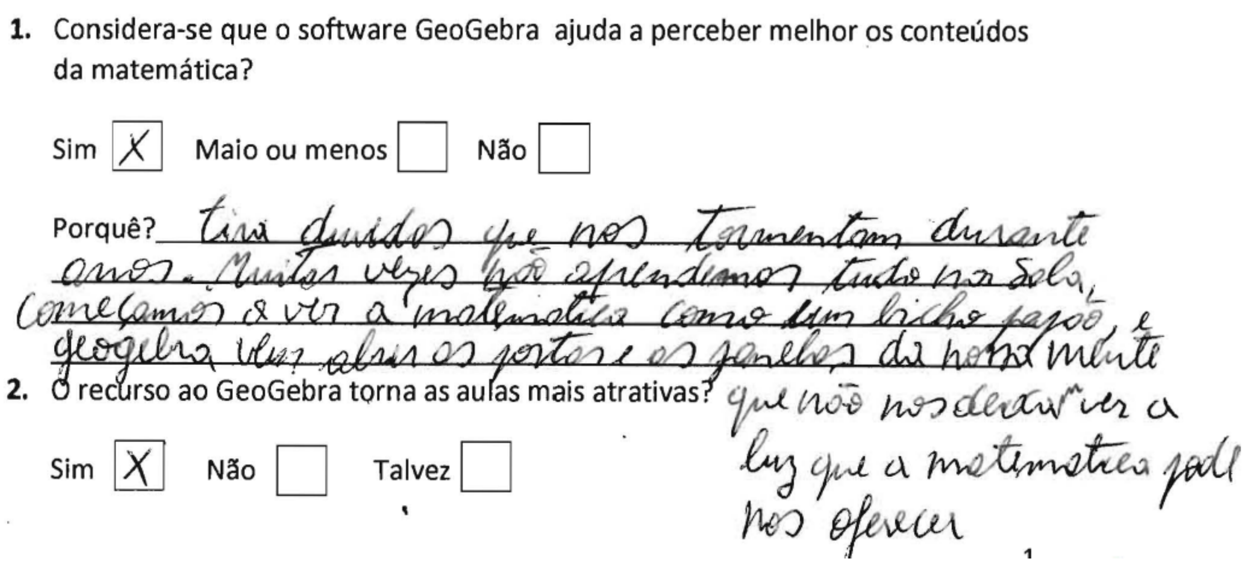
Figura 12. Resultados obtidos do questionário 1

Fonte: Os Autores

No que se refere ao conhecimento ou utilização de softwares no auxílio do estudo da Matemática, dizem desconhecer qualquer software e que o estudo é feito recorrendo aos materiais (normalmente fotocópias) disponibilizados pelos professores e a vídeos e outros conteúdos disponibilizados on-line.

No que diz respeito ao estudo das funções reias de variável real a maior parte não gostou do tema desde os primeiros momentos que abordaram o conteúdo por sentirem imensas dificuldades no estudo da monotonia, concavidade e principalmente no esboço de gráficos. E, mais uma vez, assumem que, entre outras razões, as dificuldades sentidas poderão estar relacionadas com a falta de dedicação ao estudo, já que apenas se dedicam uma a duas horas de estudo da Matemática por semana.

Como forma de se verificar o impacto das sessões de exploração do GeoGebra no estudo de funções aplicou-se aos estudantes um segundo questionário no final da experiência, onde todos, sem exceção, responderam que o software ajudou a perceber melhor os conteúdos matemáticos abordados, contribuindo para uma melhor perceção da matéria, ficando esta mais fácil e interessante. O exemplo de resposta a seguir, ilustra a opinião dos estudantes a respeito da utilização do software:



1. Considera-se que o software GeoGebra ajuda a perceber melhor os conteúdos da matemática?

Sim [X] Maio ou menos [ ] Não [ ]

Porquê? tive duvidas que nos tormentam durante anos. Muitas vezes não aprendemos tudo na sala, começamos a ver a matemática como um bicho papão, e geogebra vem abrir as portas e as janelas da nossa mente que não nos deixavam ver a luz que a matemática pode nos oferecer

2. O recurso ao GeoGebra torna as aulas mais atrativas?

Sim [X] Não [ ] Talvez [ ]

Figura 13. Resposta do aluno A10 à questão 1 e 2 do questionário

Fonte: Os Autores

Conclusão

O desenvolvimento do presente trabalho constituiu uma experiencia rica e aliciante, enquanto docentes de Matemática, e permitiu explorar uma nova abordagem do ensino da Matemática, onde os estudantes são parte integrante das suas aprendizagens, favorecendo o melhoramento futuro dos resultados da disciplina.

Quanto aos resultados alcançados, os mesmos refletem nos dados recolhidos nos testes e nos questionários aplicados e que foram apresentados ao longo do trabalho.

Da análise dos questionários pode-se constatar que os estudantes têm uma opinião positiva quanto a utilização de softwares no ensino-aprendizagem da Matemática e, em particular, na utilização do GeoGebra para o estudo de funções.

No tocante aos testes, as dificuldades refletidas no teste diagnóstico confirmaram as lacunas que muitos estudantes acumulam ao longo do percurso escolar no estudo de funções, em particular no tocante a elaboração e análise de gráficos.

Estes resultados nos estimulam para uma planificação mais cuidada do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, com a introdução do GeoGebra como recurso pedagógico, visando contribuir para mitigação das dificuldades dos estudantes.

Referências Bibliográficas

AIRES, L. (2013). Conceitos de Matemática: Fundamentos para as ciências da vida. Lisboa, Portugal: Edições Sílabo.

CABRAL, M. (2006). A utilização de jogos no ensino da Matemática. Monografia (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. Recuperado de http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/jogos/Marcos_Aurelio_Cabral.pdf

PAGOTTO, M. (2015). A importância da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem. Recuperado de http://www.webartigos.com/artigos/a-importancia-da-tecnologia-no-processo-de-ensino-e-aprendizagem/138381/#ixzz4l9Fnyoh3

PONTE, J.(2002). O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa. Artigo apresentado na Conferência realizada no Seminário sobre “ O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas”, Lisboa.

RÉZIO, A. (2009). Dicionário ilustrado da matemática. Lisboa, Portugal: Dinalivro.

SANTOS, M. (2011). Novas Tecnologias no ensino de matemática: Possibilidades e desafios,. Recuperado de http://pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/artigos/tics/101092011085446.pdf