



ABRAHAM IBN EZRA. **Juan-Miguel Gracia Melero** • LA GANADERÍA BRAVA EN CORTES DURANTE LA PRIMERA MITAD DEL SIGLO XVII. DATOS PARA SU HISTORIA. **Ramón I. Villanueva Sáenz** • “MÁS ALLÁ DEL SALÓN DEL CASINO”. LA VIDA SOCIAL AL MARGEN DEL SISTEMA DE LA RESTAURACIÓN EN LA RIBERA DE TUDELA. **Francisco Santos Escribano** • PEDRO JORDÁN, ESCULTOR. **José M<sup>a</sup> Muruzábal del Solar** • ETNOVETERINARIA TRASHUMANTE NAVARRA. UN NEXO DE UNIÓN ENTRE LOS PASTORES DE LA MONTAÑA Y LA BARDENA REAL. **Pablo M. Orduna Portús y M<sup>a</sup> Rosario Mateo Pérez** • SITUACIÓN ACTUAL DE LAS ESPECIES DE CARACOLES TERRESTRES PRESENTES EN BARDENAS REALES DE NAVARRA CON NOTAS SOBRE SU RECOLECCIÓN Y CONSUMO. **L. J. Chueca; A. Caro; B. Gómez-Moliner.**

## ABRAHAM IBN EZRA

Juan-Miguel Gracia Melero

### INTRODUCCIÓN

Nací en la calle Magallón de Tudela (Navarra) en 1945; estudié en Madrid y trabajé cuatro años en Pamplona. De allí, a los 29 años me fui a trabajar a Vitoria donde me jubilé a los 70 años. En el año 2015 regresé a Tudela. Con todo, durante los 52 años en que estuve ausente de Tudela, solamente me perdí sus Fiestas un año por luto. Volví a mi pueblo con suma frecuencia; al menos, una vez cada mes.

### COMBINATORIA

Corría el año de 1998 cuando me enteré, a través de un artículo de Doron Zeilberger [18], de que había existido un hombre llamado Abraham Ibn Ezra (también conocido por Abenezra), nacido en Tudela en 1089 (o 1092) (donde aprendió árabe y hebreo), que trabajó con números binómicos algunos siglos antes de que se inventaran las actuales notaciones. Ezra calculó las combinaciones de siete elementos tomados de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc. Lo habéis leído bien. Ezra, uno de los más importantes astrólogos de todos los tiempos, estaba interesado en hallar el número de posibles alineaciones de los siete cuerpos celestes siguientes: el Sol, la Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Asumimos que Ezra utilizaría el sistema geocéntrico de Ptolomeo, quien en el siglo II planteó un modelo del Universo con la Tierra en el centro. En este modelo se suponía que la Tierra permanecía fija mientras que los planetas, la Luna y el Sol describían órbitas complicadas alrededor de ella. Así pues, Ezra sabía calcular los números  $\binom{7}{3}$ ,  $\binom{7}{4}$ , etcétera. El método que usó puede verse en el artículo de Ginsburg y Smith [6]. ¡Ostras! Lo de brutos, más brutos... y de Tudela, no debió ser cierto hace 900 años. Indagué, busqué,... y me llevé una sorpresa morrocotuda. ¿Qué hizo Ezra? En este artículo intento responder un poco esta pregunta.

## EL CERO

Permitidme antes que os plantee una cuestión: ¿Cómo multiplicaríais dos números romanos? Imaginad, por ejemplo,  $\text{MCCLXXXIII} \times \text{MMMLIX} = 1283 \times 3059 = 3924697$ . Así pues, la respuesta es  $\overline{\text{III}} \overline{\text{CMXXIVDCXCVII}}$ . Pero, ¿cómo lo haríamos sin usar el sistema decimal? Ezra introdujo en Europa las cifras indo-arábigas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y divulgó el uso del cero 0 al que llamaba *galgal*, es decir, rueda. Ezra tradujo al hebreo textos árabes y, así, hizo llegar estos conocimientos a los judíos de Italia, Francia e Inglaterra, que no sabían árabe. Su *Libro del Número* es un manual de aritmética de carácter pedagógico que tenía como objetivo explicar el *sistema de numeración de posición* introduciendo el concepto del cero y su uso desinhibido.

## PROBLEMA DE JOSEFO

Abraham Ibn Ezra no solo trató de problemas de aritmética. Es tradición que en cierta ocasión Ezra salvó su vida y la de sus discípulos resolviendo *avant la lettre* una generalización del problema combinatorio de Josefo (“Josephus”):

“En un bote hay quince personas buenas y otras quince malas, arrecia una tormenta, y es imprescindible aligerar peso arrojando por la borda a quince de estas personas: ¿cómo colocar a 30 personas en un círculo, para que si decidimos que cada novena persona debe ahogarse, sean precisamente los canallas los que se ahogan?”

El problema de Josefo tiene una curiosa historia con la que tuvo relación personal. Este problema en su forma original se remonta al historiador romano de origen judío Flavio Josefo (37-100).

En el año 67, durante la primera guerra judeo-romana (66-73), los romanos tomaron la ciudad de Jotapata cuyo comandante era Josefo. Él y 40 compañeros escaparon y se escondieron en una cueva. Sabedores de la suerte que correrían si eran capturados decidieron matarse. A Josefo y un amigo les parecía tremendo eso de suicidarse y propusieron darse muerte de la manera siguiente: Se colocarían todos en un círculo y contando alrededor del círculo en el mismo sentido siempre, se debería dar muerte a uno de cada tres hombres hasta que solo quedase un superviviente, quien debería darse muerte a sí mismo. El caso fue que habiendo elegido las posiciones 31 y 16 en el círculo, Josefo y su amigo quedaron los últimos y, en vez de darse muerte, se fugaron. (Más tarde Josefo llegó a ser historiador romano, pero eso es harina de otro costal).

Durante los años 1970 a 1974 trabajé en la Universidad de Navarra. Transcurría el año 1972 cuando apareció por allí David Woodhouse, matemático australiano. Vino a pasar seis meses de su licencia sabática. Por las mañanas iba a la universidad y por las tardes hacía excursiones por los Pirineos. Trabajaba en el problema de Josephus (Jose... ¿qué?). Yo no había oído hablar de un problema tal. Él había hecho una tesis sobre teoría de grupos finitos (una rama del álgebra). De Australia se había traído un montón de casos particulares del problema de Josefo, hechos con ordenador. Por aquella época, no había ordenadores de sobremesa, ni portátiles, ni esas lindezas. Ni se conocían los sistemas operativos MS-DOS, ni Windows, ni los ordenadores tenían monitores, ni pantallas, ni *flowers*. Los ordenadores eran unos enormes mamotretos, puestos a buen recaudo en unas salas con aire acondicionado y cuidados con mimo. Los datos y los programas de cálculo se introducían en unas tarjetas de cartón perforadas y el ordenador devolvía los cálculos en inmensas ristras de papel continuo, con rayas blancas y azules (papel pijama). Allí estaba el bueno de Woodhouse con sus mazos de papel pijama llenos de cálculos, sobre los que él meditaba y pensaba. Hacia el final de su estancia, redactó su solución al problema de Josefo, con  $n$ ,  $m$ ,  $p$  y  $q$  en lugar de 41, 3, 31 y 16. David Woodhouse especulaba con ironía que Josefo habría hecho experimentos con piedrecitas en algún lugar oculto antes de formular su propuesta.

Años más tarde, este problema llegaría a ser muy popular entre los informáticos. Incluso yo lo propuse como ejercicio de programación a alumnos míos en el Colegio Universitario de Álava hacia 1979, donde disponíamos de una computadora Hewlett-Packard (HP) que tenía una pantalla en la que solo cabía una línea, y su único programa se llamaba BASIC. Hasta ver ordenadores con pantallas en blanco y negro y sobre los que se pudieran ejecutar diversos programas sobre el sistema operativo MS-DOS faltaban algunos años. ¡Fijaos en el mérito de Abraham Ibn Ezra atacando el problema generalizado de Josefo! Algunas referencias sobre los trabajos matemáticos de Ibn Ezra son [2], [7], [13], [14] y [18].

## AJEDREZ

El primer Reglamento de Ajedrez, Ajedrez Antiguo, estilo árabe, fue creado hacia 1140 en forma de poema por el rabino judío de Tudela, Abraham Ibn Ezra, poeta, matemático, médico, filósofo, astrónomo, astrólogo, gramático, lingüista, exégeta de la Biblia y la Torá. Autor de más de 100 libros, escritos con su característico estilo polemista. En resumidas cuentas, Ezra fue un polímata (*poli-varios*, *mata-conocimientos*): sabio en diversas disciplinas. Hay un bonito cuento de cómo Ezra ayudó al judío Maimónides (1135-1204) en una partida

de ajedrez contra el rey musulmán de Egipto; partida en la que estaba en juego convertirse a la religión del ganador (véanse [11] y la página web *Cuentos de un pueblo raro* [16]). Por cierto, Maimónides fue muy crítico con la astrología en general, y la de Ezra en particular.

Ezra vería los mismos cabezos, gozaría del mismo cierzo vivificador y de los mismos calores de la canícula, de los que nosotros gozamos. Pero, qué había en Tudela para que de ese ambiente cultural saliera un sabio de esa naturaleza. Cuando Ezra nació, Tudela pertenecía al emirato musulmán de Zaragoza. El 25 de febrero de 1119 el rey Alfonso I el Batallador conquistó Tudela a los musulmanes. El mito de la convivencia de las tres culturas —musulmana, cristiana y judía— fue eso: un mito. Las relaciones eran más complicadas. Los judíos eran testigos involuntarios de las guerras entre moros y cristianos. Ya entonces andaban errabundos anhelando volver a Israel. En las reglas de ajedrez de Ezra luchaban moros (piezas negras) contra cristianos (piezas rojas) y la partida arrancaba con un primer movimiento que correspondía a las negras. Ezra llamaba irónicamente a la Cristiandad el reino de Edom; curiosamente, edom en hebreo significa “rojo”.

## ASTRONOMÍA

Ezra advirtió que las tablas astronómicas que predecían las conjunciones planetarias contenían errores, porque suponían un movimiento uniforme de los planetas. Señaló la necesidad de tener en cuenta los errores experimentales de medición. Ezra calculó la longitud de una cuerda de un arco de círculo, así como el área del segmento circular comprendido entre el arco y la cuerda. Sus Tablas Astronómicas, las *Tablas Pisanas*, gozaron de autoridad para Roger Bacon (1214-1294), Nicolás de Cusa (1401-1464) y Pico della Mirandola (1463-1494).

## NUESTROS TRES JUDÍOS

El poeta y filósofo judío tudelano Yehuda Ha Levi (1075-1141) era consuegro (*mehutan*[1]) de Abraham Ibn Ezra [17]. De hecho, una hija de Yehuda Ha Levi estaba casada con un hijo de Ezra, Isaac Ibn Ezra. La vida de Abraham Ibn Ezra estuvo ensombrecida por la tragedia. Isaac se convirtió al Islam (aunque se cree que solo en apariencia) y murió antes que su padre. Abraham Ibn Ezra pasó mucho tiempo formándose en Lucena (Córdoba), ciudad a la que adoraba. No debemos confundir a Abraham Ibn Ezra con Moisés Ibn Ezra (ca. 1055-1135), poeta y filósofo nacido en Granada que tuvo relación con nuestro hombre, aunque no eran parientes. Abraham Ibn Ezra fue un “ju-

dío errante” arquetípico, un erudito viajero impenitente que iba recorriendo comunidades judías de Italia, Francia e Inglaterra, enseñando, aprendiendo y escribiendo libros. Benjamín de Tudela (1130-1173) dejó testimonio preciso del número de familias judías que habitaban en muchas de esas comunidades. Deseo mencionar que el apellido Ezra significa “aquel que ayuda”, “al que Dios ayuda”, “Gentil”, “con Donaire”, “con Gracia”; algo que le cuadraba a nuestro hombre como anillo al dedo. Era pobre. Viajaba con una capa llena de agujeros (“una criba”) y un astrolabio. Cuando llegaba a los sitios se producía una expectación para oírle y estar con él.

## LITERATURA

Ezra fue considerado un precursor del filósofo holandés del siglo XVII Spinoza, que también cuestionó que Moisés hubiese escrito todo el Pentateuco (los cinco primeros libros del Viejo Testamento). En la Inglaterra victoriana Ezra fue el modelo que inspiró el poema “Rabbi Ben Ezra” en forma de monólogo dramático de Robert Browning, cuya filosofía reflejaba firme esperanza y alegría, pese a una vida de adversidades. No fue una biografía de Abraham Ibn Ezra. Como todos los poemas históricos de Browning, fue una interpretación libre de la paradoja teísta “Dios conoce el mal, pero no lo evita”, que la vida y la obra de Ibn Ezra sugirieron a Browning. El poema fue publicado en su libro *Dramatis Personae* en 1864. El primer verso de este poema “Grow old with me” (“Envejece conmigo”) ha sido el nombre de una de las canciones finales escritas por el *beatle* John Lennon. Ibn Ezra tenía el talento de hacer de su mala suerte un tema de broma en el que él sería la víctima, pero una víctima que toma distancia de sus desgracias, con un agudo sentido del humor:

Si fabricara velas, el Sol no se pondría nunca.  
Si fabricara sudarios, nadie se moriría.  
Si fuera a buscar agua al mar, estaría seco.  
Si vendiese armas, no habría guerras.

Ezra fue el creador de uno de los personajes claves del humor judío: El Shlemiel, a quien nada le sale bien. El escritor estadounidense Bernard Malamud (1914-1986) hace recitar este poema a Yakov Bok, personaje central de su novela *El reparador* (*The Fixer*), también traducida al español con el título de *El hombre de Kiev*. Novela que fue llevada al cine en 1968 por John Frankenheimer. Esta obra relata el caso real del judío Mendel Beiliss, injustamente acusado de asesinar ritualmente a un niño cristiano, en la Rusia zarista de comienzos del siglo XX [10], [15, pág. 84].

## ¿TOLEDO O TUDELA?

Hay una cuestión que debo mencionar para acabar. Históricamente se ha pensado que fue Toledo, y no Tudela, el lugar de nacimiento de Abraham Ibn Ezra. Yo he encontrado el nombre de Tudela en las referencias más recientes, que están numeradas como [1], [5] y [17]. Consulté esta cuestión a Doron Zeilberger, enviándole un mensaje electrónico en el año 2000. Me contestó que Ibn Ezra era de Tudela, pero que erróneamente se pensaba que Tudela era el nombre hebreo de Toledo. Al parecer, ignorando las vocales, TUDELA sería TDL y TOLEDO sería TLD; de donde resultaría fácil confundir TDL con TLD. Lo cierto es que el hebreo antiguo solo tenía consonantes.

## LUGAR DE LA MUERTE

Según Fleischer, citado por Irene Lancaster [9], Abraham Ibn Ezra murió en Londres asesinado por “hordas anárquicas” en uno de sus viajes. Otros autores sitúan su muerte en Calahorra (véase el artículo bellamente escrito [3]). Hay unanimidad en la edad que tenía al morir: 75 años. Pero, el noticiario israelí “Arutz Sheva”, que he visto en Internet, dio el 22 de marzo de 2017 la noticia del hallazgo de una posible tumba de Ezra en un antiguo cementerio de Tzfat, ciudad del norte de Israel. La página web incluye un vídeo y una foto en los que se ven la tumba y la inscripción “anciano sabio, el doctor Avraham Ben Ezra” sobre la lápida [5]. Visto el culto que tienen en Israel a los intelectuales judíos sefarditas del siglo XII, no sería incompatible el hallazgo de esa tumba y la muerte de Ezra en otro lugar.

## DECLARACIÓN

En el año 2000 intenté dar una conferencia en Tudela sobre aspectos matemáticos en la obra de Abraham Ibn Ezra, pero el intento no prosperó. Para escribir este artículo, he consultado Internet, Wikipedia, YouTube, etc. He quedado anonadado por la inmensa cantidad de información que existe sobre Ezra. He leído libros, artículos. He visto vídeos. He encontrado contradicciones, baile de fechas, incógnitas. Tengo claro que no puedo tener pretensiones históricas. Estimados lectores: sed indulgentes conmigo. Hablando en términos modernos éste sería un trabajo transido por la lógica difusa y la incertidumbre. En él se cuenta una historia, basada en lecturas contrapuestas, y en argumentos de autoridad (“lo dice Fulano”). He tratado de dar el crédito debido en las referencias que he puesto al final. Pero no he querido salpicar este texto con citas fehacientes, para no hacerlos insufrible su lectura. Aunque separando el trigo de la paja, creo sinceramente que aparece un retrato del célebre personaje.

Dijo un historiador de arte que es tonto el que da más de lo que tiene. Mucho me temo que éste podría ser mi caso. No sé hebreo, ni árabe. Soy consciente de que existen multitud de artículos y libros de especialistas en la cultura hispano-judía (filólogos, historiadores, orientalistas) sobre Abraham Ibn Ezra [4], [8]. Mención especial merece el pionero J.M. Millás Vallicrosa (1897-1970). Incluso, hubo un congreso celebrado en 1989 en Tudela y Toledo, con motivo del aniversario noningentésimo del nacimiento de Ezra (véase una reseña del libro de Actas en [12]). Solo he escrito este artículo de divulgación con la única pretensión de renovar su conocimiento en Tudela y alentar a mis paisanos a dedicarle una calle, instituto o estatua. ¡Qué menos!

## REFERENCIAS

- [1] ABRAMSON, H. Who was Abraham ibn Ezra? [https://www.youtube.com/watch?v=7PRmKv\\_EuDg&t=500s](https://www.youtube.com/watch?v=7PRmKv_EuDg&t=500s), 2018. 24 oct. 2017.
- [2] AMIR-MOEZ, A. Comparison of the methods of Ibn Ezra and Karkhi. *Scripta Mathematica* 23 (1957), 173-178.
- [3] DE MIGUEL REBOLES, M. T. Calahorra, el último baluarte de Abraham Ibn Ezra. *Kalakorikos* 13 (2008), 165-173.
- [4] DÍAZ ESTEBAN, F., Ed. *Actas del simposio internacional Abraham Ibn Ezra y su tiempo* (Madrid, 1990), Asociación Española de Orientalistas. Celebrado en Tudela y Toledo los días 1 al 8 de febrero de 1989.
- [5] DOMB, Y. Has Rabbi Avraham Ibn Ezra's grave been discovered? [http://www.israelnationalnews.com/News/News.aspx/227141?fb\\_action\\_ids=12555s79954559349&fb\\_action\\_types=og.comments](http://www.israelnationalnews.com/News/News.aspx/227141?fb_action_ids=12555s79954559349&fb_action_types=og.comments). Consultado el 22 de agosto de 2018.
- [6] GINSBURG, J., y SMITH, D. E. Rabbi Ben Ezra on permutations and combinations. *The Mathematics Teacher* 15, 6 (Oct. 1922), 347-356.
- [7] GOLDSTEIN, B. R. Astronomy and astrology in the works of Abraham Ibn Ezra. *Arabic Sci. Philos.* 6, 1 (1996), 3,5,9-21.
- [8] JIMÉNEZ-PATÓN, L., y SÁENZ-BADILLOS, A. *Sefer Moznayim. Libro de la balanza. Gramática hebrea*. Ediciones El Almendro, Córdoba, 2002.
- [9] LANCASTER, I. *Deconstructing the Bible: Abraham ibn Ezra's Introduction to the Torah*, first ed. Routledge, Taylor and Francis Group, 130 Milton Park, Abingdon, Oxon OX14 4SB, UK, 2007.



- [10] MALAMUD, B. *El hombre de Kiev*. Sexto Piso, 1966, 2007.
- [11] ROMERO CASTELLÓ, E. Abraham Ibn Ezra y Maimónides en la narrativa tradicional judía. In *Actas del simposio internacional Abraham Ibn Ezra y su tiempo* (Madrid, 1990), Asociación Española de Orientalistas, pp. 269-278. Celebrado en Tudela y Toledo los días 1 al 8 de febrero de 1989.
- [12] SCHIPPERS, A. Abraham Ibn Ezra y su tiempo/Abraham Ibn Ezra and his age. Actas del Simposio Internacional/Proceedings of the International Symposium [edited of: F. Díaz-Esteban (1990)]. <http://hdl.handle.net/11245/1.113182>, 1995. Consultado el 20 de agosto de 2018.
- [13] SCHUMER, P. The Josephus problem: Once more around. *Mathematics Magazine* 75, 1 (Feb. 2002), 12-17.
- [14] SMITH, D. E., y GINSBURG, Y. Rabbi Ben Ezra and the Hindu-Arabic problem. *American Mathematical Monthly* 25 (1918), 99-108.
- [15] STORA-SANDOR, J. *De Job a Woody Allen. El humor judío en la literatura*. Biblos, Almagesto, Buenos Aires, 2000.
- [16] VENTURA, J. J., y MÉNDEZ, S. Cuentos de un pueblo raro. <http://www.cuentosdeunpuebloraro.com>, 2018. Consultado el 16 de agosto de 2018.
- [17] WEINBERGER, L. J. *Twilight of a golden age. Selected poems of Abraham Ibn Ezra. (El ocaso de una edad dorada)*. The University of Alabama Press, Tuscaloosa, Alabama, USA, 1997.
- [18] ZEILBERGER, D. La astrología combinatoria del rabino Abraham Ibn Ezra. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 1, 3 (1998), 382-385.

**JUAN-MIGUEL GRACIA MELERO**

Licenciado y doctor en Matemáticas. Jubilado. Ha sido catedrático de Matemáticas en la Universidad del País Vasco. Ha publicado 48 artículos en revistas de matemáticas y un libro. Asimismo, ha escrito varios textos *culturales* sobre historia reciente de matemáticas y sobre la búsqueda semántica latente con Google. Ha contribuido a prestigiar en España el álgebra lineal y el análisis matricial, tema que arrostraba cierto malditismo. Convive como puede con la teoría de perturbación espectral de matrices desde hace años, estando a la expectativa de ver demostradas o refutadas algunas de las conjeturas por él formuladas.

**RESUMEN**

El autor, tudelano, describe la forma en que conoció la existencia del celeberrimo judío tudelano Abraham Ibn Ezra que vivió en el siglo XII, así como la inmensa alegría que le produjo esta noticia. Ante la extrañeza de no ver reconocidos como se merecen los méritos de Ezra en la Tudela actual, este artículo pretende divulgar su valía entre sus paisanos. Lo hace mediante una pincelada de las matemáticas que nuestro sabio cultivó, amén de la huella que dejó en la literatura de siglos posteriores, que ha llegado hasta nuestros días.

**Palabras clave:** combinatoria, sistemas de numeración, problema de Josefo, siglo XII, judíos sefarditas, ajedrez, literatura, Robert Browning.

**ABSTRACT**

The author, from Tudela, describes the way in which he learned about the existence of the famous Tudelan jew Abraham Ibn Ezra who lived in the 12th century, as well as the immense joy that this news brought to him. Due to the strangeness of not seeing recognized the merits of Ezra in the current Tudela as they deserve, this article aims to disclose them among his countrymen. The author does it by means of a brushstroke of the mathematics that our sage cultivated, in addition to the trace he left in the literature of later centuries, which has survived to this day.

**Keywords:** combinatorics, numeral systems, Josephus problem, 12th century, Sephardi jews, chess, literature, Robert Browning.