Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX. IV. La matemática de los transvases 1960–1990[1]

Fernando Zalamea[2]

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá

Este cuarto artículo completa las entradas de nuestra serie *Cátedra Granés* 2008 ligadas al resumen de obras de matemáticos mayores, transformadores de la disciplina en el siglo XX (los dos artículos finales explorarán los panoramas de Medallistas Fields y Premios Abel). Los textos exploran tres frentes —*(i)* elucidación de núcleos conceptuales y problemáticas centrales en la matemática de la época, *(ii)* descripción de entornos históricos correspondientes, entrelazando matemática y cultura, *(iii)* determinación de temáticas filosóficas que emergen paralelamente a los avances técnicos— ilustrando así *instancias de desarrollo del pensamiento matemático*, inscritas dentro de la cultura como un todo. En esta cuarta entrega, ligada a la emergencia de grandes programas dialécticos —atentos a diversos transvases entre lo global y lo local: geométricos, aritméticos, combinatorios— enfatizaremos ejemplos alrededor de Grothendieck, Langlands y Shelah.

Palabras claves: esquemas, topos, modularidad, automorfismos, no estructura, teoría pcf.

We study the development of main mathematical ideas, 1960–1990, in connection with philosophical trends of the period. The work of Grothendieck, Langlands and Shelah is, in particular, examined.

Keywords: schemes, topoi, modularity, automorphisms, non structure, pcf theory.

MSC: 01A60

Recibido: 15 de marzo de 2012 Aceptado: 15 de mayo de 2012

[1] Las tres partes anteriores de esta entrega han sido publicadas en Boletín de Matemáticas, **16**(2), 95 (2009), **17**(1), 13 (2010) y **18**(2), 143 (2011).

[2] www.docentes.unal.edu.co/fzalameat

1 La época del desliz

La década 1960–1970 propone importantes cambios de paradigma, conceptuales, culturales, sociales. Merleau–Ponty, en sus escritos finales de comienzos de los sesenta (*El ojo y el espíritu*, *Lo visible y lo invisible*) estudia las mediaciones de la mirada y los transvases parciales entre sujeto y objeto. El fenomenólogo francés considera el "desliz del suelo" como nueva condición fundamental para el hombre, un desliz encarnado en el cuerpo mismo —frontera entre el yo y el mundo—, lugar de *tránsito* al que cualquier epistemología debe adecuarse. El conocimiento se da *desde* el movimiento, desde un estar *relativo*, desde un progresivo *devenir*, sin fundamentaciones absolutas. En *Diferencia y repetición* (1968), Deleuze consuma las rupturas iniciadas por su maestro: la *identidad* del sujeto se rompe y desaparece, lo real se entiende como una red impersonal, indefinida, sin referencias al yo. Década de múltiples teorizaciones del tránsito, del desliz, de la disolución, los años sesenta se inscriben en realidad como continuación natural de la década anterior, donde habían emergido la "desaparición" de la pintura (expresionismo abstracto norteamericano, con sus amplias zonas "vacías" de significado) y la "desaparición" misma de la música (*4'33"* de Cage, obra donde el intérprete debe mantener un silencio absoluto durante los cuatro minutos y treinta tres segundos de duración de la pieza). Por su lado, los movimientos contra–culturales inundan la escena norteamericana y europea, llevando a las grandes "disoluciones de valores" propugnadas por los hippies y el mayo francés.

En la matemática de los sesenta, la obra revolucionaria de Grothendieck transforma a su vez todo el panorama. Grothendieck propugna una visión de la matemática a través de universos *relativos* (topos), con *cambios de base* que codifican la riqueza de los objetos. Los objetos ya no son entendidos "en sí", o en algún inexistente "absoluto", sino a través de sus incesantes *transvases*: entre topología y álgebra, entre teoría de números y variable compleja, entre geometría y combinatoria, etc. Mientras mayor sea la capacidad extrínseca de *tránsito* del objeto, mayor será su riqueza intrínseca. La matemática se *desliza* entonces en una incesante dialéctica ("yin–yang" en términos de Grothendieck), representada a través de los avances técnicos de la teoría de categorías, en buena medida impulsados por el matemático francés. De esta manera, se acercan algunas de las mayores tendencias de la época, y no habrá vuelta atrás: no sólo, desde los cuarenta, con los teoremas de incompletitud de Gödel, los *fundamentos de la matemática* tenían ya que ser necesariamente relativos, sino que, a partir de Grothendieck, la *matemática misma* se torna relativa, al axiomatizar los tránsitos (funtores) entre regiones (categorías) y los tránsitos de los tránsitos (equivalencias naturales), y al reelaborar —a partir de ese "desliz del suelo"— nuevas nociones fundamentales de número (esquemas), de espacio (topos) y de forma (motivos).

Recordemos la "tabla fenomenológica" que guía esta serie.

tránsito matemático

qué	*cómo*	*por qué*	*cuándo*	*dónde*
objetos	modos	razones	momentos	lugares
ejemplos *problemas*	*transformaciones* *regulaciones*	*obstrucciones* *singularizaciones*	*diagramas* *temporales*	*diagramas* *culturales*
ontología	epistemología	metafísica	historia	geografía

cuestionamiento filosófico y cultural

Tabla IV.1. Perspectivas de la Cátedra Granés 2008–I.

Los objetos centrales ("qué") con los que trabaja la matemática de la época son, a nivel "atómico", las *categorías* y, a nivel "molecular", las relaciones entre conglomerados (tránsitos de categorías, es decir, *funtores*, o tránsitos de tránsitos, es decir, *equivalencias naturales*). Esos conglomerados relacionales son descritos a través de axiomas categóricos: categorías conjuntistas y algebraicas (Lawvere), categorías abelianas (Grothendieck, Freyd), categorías topológicas (Schlomiuk), etc. El siguiente paso consiste en introducir la variabilidad y la invarianza (conexiones galoisianas) para los conglomerados relativos. En particular, el *paso de lo local a lo global* ("pegamiento" de coherencias relativas) se convierte en un problema central, resuelto en gran medida gracias a la *teoría de haces* ("qué"), desarrollada en Francia en la década de los cincuenta (Seminario Cartan). Elevándose sobre la teoría de haces, Grothendieck inventa los *esquemas* y los *topos*, para generalizar las nociones clásicas de número y espacio.

Los *problemas* ("qué") asociados redundarán ampliamente en el desarrollo de las matemáticas hasta hoy en día: *(i) controlar los transvases* entre forma y estructura, incitando a la búsqueda de *arquetipos universales* ("uno") para el pensamiento matemático ("múltiple"): motivos detrás de las cohomologías (Grothendieck), grupos detrás de alternativas lógicas (Zilber), subsistemas de segundo orden detrás del escalafón de pruebas matemáticas (Simpson), etc.; *(ii) suavizar el desliz del suelo*, eliminando obstrucciones y singularidades atípicas: topología moderada (Grothendieck), correspondencia modular (Langlands), teoría *pcf* (Shelah), principio *h* (Gromov), etc.; *(iii)* reentender las *geometrías genéricas* *de las limitantes* matemáticas: no estructura (Shelah), no conmutatividad (Connes), no linealidad (Girard), etc.

En la *metodología* asociada ("cómo") ocurre a su vez un muy interesante *desliz* de perspectivas: los objetos pasan a ser *cuasi–objetos* ("objetos en tránsito", Badiou) y sus ocurrencias pasan a ser *bimodales* ("a la vez fijas y en movimiento": Petitot). La riqueza de la creatividad —los "tanteos" y los "choques" celebrados por el joven Galois— se incorpora entonces dentro de la *técnica misma de observación* del quehacer matemático. Las razones profundas ("por qué") de un tal estado de cosas nos son aún desconocidas, aunque es probable que se deban a un profundo *cambio de modelo* en el entendimiento global de las matemáticas (paso de *el árbol de Hilbert* a *la nube de Gromov*: remitimos al quinto artículo de esta serie). Lo cierto es que, en buena medida, el lugar de entendimiento de esas razones se sitúa actualmente bajo la égide de las *escuelas francesa y rusa* en matemáticas ("dónde", "cuándo"), asombrosos centros de inventividad en las dos últimas décadas, tal como lo observaremos en los dos artículos finales de la serie.

2 Grothendieck. Los transvases universales

Presentamos en lo que sigue algunos aspectos imprescindibles de la obra de Grothendieck. Debe observarse que si esta sección se extiende más allá de lo usual en nuestra serie, esto se debe a que, muy probablemente, Grothendieck resulta ser el matemático más importante del siglo XX (medible en riqueza intrínseca de la obra, influencia extrínseca, visión revolucionaria, posteridad renovada, etc.) Alexander Grothendieck nace en Berlín (1928) y se educa allí en su media infancia (1933–39) bajo el cuidado de un ministro luterano (Heydorn), mientras sus padres se dedican a una agitada actividad política. Entre 1940 y 1942, Alexander es internado con su madre en el campo de concentración de Rieucros, de donde sale para seguir, en Chambon, bajo el cuidado de otro padre protestante (Trocmé) hasta el final de la guerra. De nuevo reunido con su madre, Alexander realiza su Carrera de Matemáticas en la Universidad de Montpellier, donde alguno de sus maestros subraya su "extraordinaria capacidad, desequilibrada por el sufrimiento". Es la época en la que el brillante joven, descontento con el cálculo que le enseñan en la Universidad, propone una completa teoría de la integración que, sin saberlo, resulta ser equivalente a la teoría de Lebesgue. Desde entonces, Grothendieck *hace* incesantemente matemáticas, más que estudiarlas. Se inicia a las altas matemáticas participando (1948) en el Seminario Cartan de la *École normale supérieure*, realiza su tesis doctoral bajo Dieudonné y Schwartz en Nancy entre 1949 y 1953 (según Dieudonné —conocedor del análisis si lo ha habido— la tesis de Grothendieck sólo podría ser comparable con los trabajos de Banach), y visita luego América (Sao Paulo, 1953–54; Kansas, 1955) convirtiéndose en un reputado especialista en espacios vectoriales topológicos. Inventa luego la K–teoría en 1957 y propone una generalización profunda del teorema de Riemann-Roch, con consecuencias notables en la matemática de fines de los cincuenta y comienzos de los sesenta. También en 1957 publica su famoso artículo/tratado *Sobre algunos puntos del álgebra homológica* [Grothendieck 1957] donde lanza su programa de renovación de la geometría algebraica.

En la década de los años sesenta, el IHES, con Grothendieck a la cabeza, se convierte en el primer centro de investigación en matemáticas a nivel mundial. Resulta ser la década de creación de las ideas-motores centrales de Grothendieck —*(i)* esquemas, *(ii)* topos, *(iii)* motivos—, con la producción de las dos grandes series de escritos que renovarán completamente la matemática de la época: los *Elementos de Geometría Algebraica* (EGA) [Grothendieck & Dieudonné 1960–1967] y el *Seminario de Geometría Algebraica* (SGA) [Grothendieck *et. al.* 1960–1969]. Grothendieck recibe la Medalla Fields en 1966 y su espectro de influencia dentro del panorama de los medallistas sucesores es amplísimo (influencia directa sobre Deligne, Faltings, Atiyah, Connes, Drinfeld, Kontsevich, Voevodsky; indirecta sobre muchos otros). Aunque se retira sorpresivamente del mundo matemático en 1970 (¡a los 42 años! después de haber dejado una obra que cohortes enteras de matemáticos difícilmente generarían en un siglo), continúa con la producción de grandes manuscritos matemáticos y con la escritura de inacabables reflexiones (auto) críticas sobre el mundo matemático y teológico. En total, Grothendieck deja una obra gigantesca, tanto en profundidad (la matemática del periodo 1970–2000, particularmente el panorama Fields, puede verse en buena medida como una suerte de "comentario" a Grothendieck), como en cantidad (cerca de diez mil páginas manuscritas).

Después de la notable década de los cincuenta (espacios nucleares, K–teoría, álgebra homológica), la primera gran idea–motriz de Grothendieck en el periodo áureo del IHES sirve de impulso a una profunda renovación de la geometría algebraica. Situándose dentro de lo que luego llamaría Thom la "aporía fundadora de las matemáticas" —es decir, dentro de la *irresoluble dialéctica contradictoria* discreto/continuo—, Grothendieck inventa sus *esquemas* como una herramienta muy potente para intentar resolver las Conjeturas de Weil (1949) (ver segundo artículo de nuestra serie). Dwork (1960) demuestra la racionalidad de las funciones zeta, Grothendieck (1966) la ecuación funcional que las gobierna y Deligne (1974), el mayor alumno de Grothendieck, la adecuada distribución de sus ceros (lo que da lugar al control combinatorio de los puntos en la variedad). El resultado de Deligne es un verdadero *tour de force* técnico que le valdrá la medalla Fields.

La matemática moderna, en la primera mitad del siglo XX, culmina con la sorprendente prospección de Weil; impulsado por una muy fina intuición concreta y por una inusual capacidad para develar analogías en el cruce entre variedades algebraicas y topología, Weil logra *enunciar* muy precisamente sus conjeturas. La matemática contemporánea, en la segunda mitad del siglo XX, emerge en la obra de Grothendieck, y crea todo el aparataje de geometría algebraica que permite en cambio *resolver* esas conjeturas. Mientras que las topologías de Zariski sirven de mediaciones en el cruce [variedades algebraicas / topologías], y permiten enunciar las conjeturas, las cohomologías ("étale", ℓ–ádica) de Grothendieck y de su escuela sirven de mediaciones en el cruce [esquemas / topos], permitiendo ahora resolverlas. Al extender las variedades algebraicas al ámbito de los esquemas, la riqueza de la *invención genérica* grothendickiana no procede gratuitamente. La generalización no se realiza nunca sin adecuadas particularizaciones en mente, y se trata en realidad de un complejo proceso de *ascenso y descenso* que resulta estar siempre gobernado por consecuencias concretas del más alto valor matemático.

De hecho, con la creación de sus esquemas, Grothendieck entronca dos de las corrientes mayores de la matemática moderna: *la visión de Riemann*, que permite entender una curva X mediante el anillo $M(X)$ de las funciones meromorfas sobre la curva, y *la visión de Galois–Dedekind*, que permite entender una variedad algebraica V mediante el espectro $Spec(V)$ de sus ideales maximales. En efecto, Grothendieck generaliza la situación para poder *englobar* ambas visiones, y propone entender un anillo (conmutativo, unitario) *arbitrario* mediante una jerarquía de tres objetos de gran riqueza matemática: el espectro de sus ideales primos, la topología de Zariski sobre el espectro de primos y los haces naturales sobre el espectro topologizado. Esos haces, con algunas condiciones adicionales sobre las fibras, resultan ser los *esquemas* ("schémas") de Grothendieck, quien consigue entonces, no sólo unir algunas de las intuiciones más profundas de la matemática moderna (Galois, Riemann), sino *ampliar la concepción misma del espacio*, en el cual no importan ya los puntos, sino las posiciones y el movimiento (secciones en el haz).

De la obra de Grothendieck se desprende un paradigma fundamental, que podríamos denominar *la práctica de una matemática relativa* (para una presentación más extensa y detallada de la obra de Grothendieck, véase [Zalamea 2009, pp. 77–97]). Las estrategias de Grothendieck pueden entenderse, de hecho, en un sentido conceptual, como cercanas a las modulaciones relativas introducidas por Einstein en la física. Tanto

Einstein como Grothendieck manejan, de manera técnica, el marco del observador y las dinámicas parciales del agente en el conocimiento. En particular, en el hacer de Grothendieck, puede observarse, primero, una introducción de una red de incesantes *transvases* —traslados, traslaciones, traducciones— de conceptos y objetos entre regiones aparentemente distantes de la matemática, y, segundo, una búsqueda igualmente incesante de *invariantes*, *proto–conceptos* y *proto–objetos* detrás de esa red de movimientos. Los haces y los esquemas permiten encarnar, en sus definiciones técnicas, tanto el flujo, como el reposo. Más allá de los haces como objetos singulares, la "proto–geometría" que subyace a ciertas *clases* de haces da lugar entonces a los *topos* de Grothendieck.

Los topos de Grothendieck (1962) son categorías de haces provenientes de ciertas topologías naturales abstractas. Suerte de *universos paralelos* para el desarrollo de las matemáticas, los topos son entornos categóricos lo suficientemente amplios para poder desarrollar toda una tecnología sofisticada de lo relativo. Generalizando la acción de ciertos grupoides sobre las fibras de un haz, Grothendieck pretende *mover los topos* (ya no sólo entornos conjuntistas, sino topológicos, algebraicos, diferenciales, combinatorios, etc.) y estudiar en forma genérica las acciones de variados funtores sobre clases muy amplias de topos. Los resultados no se dejan esperar, y *en el ámbito geométrico genérico de los topos es donde ciertas obstrucciones cohomológicas desaparecen*: donde Grothendieck y su escuela pueden desarrollar la cohomología "étale" que permite a Deligne resolver las conjeturas de Weil. En los topos, los objetos dejan de estar "fijos", y se "desenvuelven a lo largo del tiempo": se trata de *conjuntos variables* cuyos progresivos ajustes paramétricos permiten resolver una multitud de obstrucciones que en una matemática puntual, clásica o estática, parecían irresolubles. Puede intuirse desde ya el enorme impacto filosófico que puede tener así una tal *matemática relativa*, una matemática atenta al *desliz* pero con la capacidad de detectar invariantes detrás del flujo, una matemática que va en contravía de supuestos fundamentos últimos, de verdades absolutas, de estabilidades inamovibles, pero que es capaz de establecer en cambio *redes asintóticas* de verdad.

En Grothendieck, los objetos tienden a estar situados sobre ciertas "bases" (el haz sobre su espacio topológico subyacente, el esquema sobre su espectro, el topos sobre el clasificador de subobjetos), y muchos problemas importantes surgen cuando se realizan *cambios de base*. La matemática "relativa" adquiere entonces una gran incisividad técnica, al preguntarse qué propiedades se trasladan al realizar los cambios de base (*teoría del descenso*: *(i)* búsqueda de condiciones para poder realizar traslados; y su contraparte, *(ii)* detección de condiciones de obstrucción en los cambios de base). En esos procesos de translación/traducción surgen de manera natural condiciones de coherencia y de pegamiento abstractas, que sólo resultan ser definibles con comodidad en los topos de Grothendieck. En particular, el "sitio" de Zariski que había permitido enunciar las conjeturas de Weil es reemplazado por el sitio "étale" (liso, sin protuberancias, proveniente de una imagen de Victor Hugo), en donde Grothendieck construye la cohomología que Deligne necesitará posteriormente para la resolución de las conjeturas. El uso metafórico de "étale" por Grothendieck condensa la idea de lo *no ramificado*, donde Grothendieck combina —una vez más— algunas ideas centrales de Galois y Riemann: las extensiones de campos no ramificadas (separabilidad de Galois) y las superficies de Riemann no ramificadas, englobadas dentro de un concepto unificador genérico.

En realidad, la dinámica conceptual de los topos supera con mucho los primeros objetivos técnicos de la teoría, por más brillantes que éstos fueran. De hecho, detrás de los topos de Grothendieck emergen los *topos elementales* de Lawvere, donde se observa cómo las consideraciones de teoría de números, álgebra, topología y geometría adelantadas por Grothendieck poseen también unas sorprendentes contrapartes *lógicas* (ver el artículo anterior de esta serie). Los *cambios de base en las lógicas subyacentes* dan lugar entonces a un complejo panorama —podríamos llamarlo lógica relativa— que permite regresar a los orígenes históricos de la lógica matemática (la "lógica de relativos" de Peirce) y que permite reentender con nuevos ojos muchas de las problemáticas acerca de los fundamentos abordadas en forma convencional por la filosofía analítica.

La atención grothendickiana al movimiento de los conceptos y objetos matemáticos va acompañada de una búsqueda oscilante de *arquetipos* para la razón y la imaginación matemática. Entre lo *uno* (la "forma") y lo *múltiple* (las estructuras: esquemas, topos, etc.), Grothendieck descubre e inventa apropiados invariantes de la forma: las cohomologías. Aunque los grupos de homología y cohomología para la topología algebraica tienden a verificar ciertas condiciones de univocidad, al pasar a la geometría algebraica las posibilidades de invarianzas cohomológicas se multiplican (Hodge, de Rham, cristalina, "étale", ℓ–ádica, etc.) Grothendieck propone entonces sus *motivos* como hondas estructuras genéricas subyacentes a las distintas cohomologías. Vale la pena leer directamente a Grothendieck:

> Este tema [de los motivos] es como el *corazón* o el alma, la parte más escondida, la que se sustrae más a la mirada, dentro del tema de los esquemas, que se encuentra a su vez en el corazón mismo de mi nueva visión. (...) Contrariamente con lo que sucede en la topología ordinaria,

> nos situamos [en la geometría algebraica] ante una abundancia desconcertante de teorías cohomológicas diferentes. Se tenía la impresión muy nítida de que, en un sentido aún vago en un principio, todas esas teorías debían "resultar siendo lo mismo", de que todas "daban los mismos resultados". Es para llegar a expresar esa intuición de "parentesco" entre teorías cohomológicas diferentes, que he despejado [dégagé] la noción de "*motivo*" asociado a una variedad algebraica. Con este término, entiendo sugerir que se trata del "motivo común" (o de la "*razón* común") subyacente a esa multitud de invariantes cohomológicos diferentes asociados a la variedad, gracias a la multitud de todas las teorías cohomológicas posibles *a priori*. Estas teorías cohomológicas diversas serían como suertes de desarrollos temáticos diferentes —cada uno en el "*tempo*", en la "llave" y en el "modo" ("mayor" o "menor") que le fuese propio— de un mismo "motivo de base" (llamado "teoría cohomológica *motívica*"), que sería a la vez la más fundamental, o la más "fina", de todas esas "encarnaciones" temáticas diferentes (es decir, de todas esas cohomologías posibles). Así, el motivo asociado a una variedad algebraica constituiría un invariante cohomológico "último", "por excelencia", del cual todos los otros se deducirían, como suertes de "encarnaciones" musicales, o de "realizaciones" diferentes. Todas las propiedades esenciales de "*la* cohomología" de la variedad ya se "leerían" (o se "escucharían") en el motivo correspondiente, de tal manera que las propiedades y estructuras familiares de los invariantes cohomológicos particulares (ℓ–ádicos o cristalinos, por ejemplo) fuesen sencillamente el reflejo fiel de las propiedades y estructuras *internas del motivo*. [Grothendieck 1985–1986, pp. 45-46]

Las homologías —construcciones matemáticas que ayudan a solventar la "aporía discreto/continuo" (Thom) y que consisten en cadenas de grupos abelianos con las cuales se captura una amplia información del objeto topológico bajo estudio—, así como las cohomologías —construcciones duales que involucran límites conjuntistas mejor conocidos (productos, pullbacks, etc.)— se convierten, gracias a Grothendieck, en algunos de los 'más potentes instrumentarios del siglo'. Al final de su estadía en el IHES, después de sus trabajos en esquemas y topos, Grothendieck vislumbra un difícil y ambicioso *programa motívico*. Al retirarse del mundo matemático y al dejar de publicar, las líneas mayores de desarrollo del programa sólo circulan entonces en manuscritos, y muchas de las sugerencias de Grothendieck se consideran demasiado "vagas". No obstante, Voevodsky ha introducido la *cohomología motívica* (1990–2000), un aporte que responde en parte a las esperanzas de Grothendieck, y que le ha valido la Medalla Fields (2002). En vez de trabajar, como en topología algebraica, con cirugías algebraicas del espacio (cohomología singular, anillo de grupos de cohomología), Voevodsky ha propuesto una colección más delicada de *cirugías de una variedad algebraica*, al introducir nuevas formas de topología para los objetos algebraicos (topologías finas de Grothendieck sobre sitios de esquemas) y al definir una sofisticada *categoría concreta* para las homologías $H(V)$ asociadas funtorialmente a variedades V. Un *tronco central de las cohomologías* ha empezado entonces a "despejarse", concordando con la extraordinaria intuición matemática de Grothendieck.

3 Langlands. Los transvases aritméticos y complejos

La continuidad entre todas las "regiones" del saber matemático queda fuertemente resaltada gracias a la obra de Robert Langlands (Canadá, n. 1936). El *programa de Langlands* consiste de hecho en una extensa red de conjeturas que interrelaciona de manera precisa la teoría de números, el álgebra y el análisis, eliminando supuestos compartimientos estancos entre las subdisciplinas. El programa emerge en una larga carta (1967) del joven (y desconocido) Langlands al emimente maestro de la época, André Weil. La carta se encuentra llena de sugerencias que acercan *funtorialmente* el mundo de la variable compleja y el mundo de las extensiones algebraicas por medio de acciones apropiadas de grupos. Los acercamientos sorpresivos provienen del seguimiento de precisas elevaciones en acciones de grupos dentro del ámbito de las construcciones "ideales" en matemáticas (Galois, Riemann, Kummer, Hilbert, etc.) La intuición de Langlands surge de la *contemplación correlativa* de dos caminos ascendentes: *(i)* el tránsito de las formas modulares (funciones analíticas de variable compleja que respetan ciertas acciones del grupo $SL_2(\mathbb{R})$) a las formas automorfas (funciones analíticas que respetan acciones de grupos de Lie), pasando por acciones intermedias del grupo Fuchsiano sobre las formas modulares de Poincaré y del grupo simpléctico sobre las formas modulares de Siegel; *(ii)* el tránsito en la jerarquía de L–representaciones del grupo de Galois de una extensión algebraica.

Las correspondencias entre las *formas de esos transvases* llevan a enunciar la célebre *correspondencia de Langlands*: las formas automorfas asociadas al grupo lineal $GL(n : K)$ corresponden (funtorialmente) a las L–representaciones de dimensión n del grupo de Galois $Gal(K^* : K)$. La serie de conjeturas así conseguida concreta de manera notable la continuidad del pensamiento matemático. De la misma manera en la cual Grothendieck detecta la existencia de motivos subyacentes a las diversas apariciones de las cohomologías, Langlands detecta la existencia de *formas estructurales de tránsito* subyacentes a diversas apariciones naturales de acciones de grupo en la variable compleja y en la teoría de números. Esto lleva, en la matemática contemporánea, al reconocimiento de una serie de *arquetipos*, de conceptos/estructuras que subyacen en lo profundo del continuo matemático y de donde se desgajan, mediante cortes de representación, muchas otras formas parciales derivables del "arquetipo".

Desde el punto de vista de los conceptos globales en juego, la correspondencia de Langlands propone una equivalencia inesperada entre ciertas estructuras *diferenciables* asociadas a una modularidad extendida (las formas automorfas asociadas al grupo lineal) y ciertas estructuras *aritméticas* asociadas a continuaciones analíticas (las L–representaciones del grupo de Galois). La cercanía profunda de lo diferenciable y lo aritmético —en el contexto acotado de la acción modular y la continuación analítica— constituye un descubrimiento mayor para la matemática contemporánea. De hecho, el programa de Langlands ha impulsado muchos resultados de alta tecnicidad, entre los que se cuentan diversas pruebas de la correspondencia, para todo n y para casos específicos del campo K en consideración: *(i)* cuerpos de series formales sobre campos finitos (Laumon, Rapoport, Stuhler 1993); *(ii)* cuerpos p–ádicos (Harris, Taylor 1998); *(iii)* cuerpos de funciones racionales sobre curvas definidas sobre campos finitos (Lafforgue 2000, trabajo que le valió la Medalla Fields 2002).

No obstante, una *obstrucción formidable* en el programa consiste, por el momento, en abordar los campos "naturales" de característica cero ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), para cuyo estudio no parece haberse construido aún el instrumentario matemático indispensable. Acá, la técnica se enfrenta a uno de esos quiebres conceptuales paradigmáticos que pueden ser de sumo interés para la filosofía de la matemática. Por un lado, el salto a lo analítico (L–funciones) es el que permite entender mejor algunos fragmentos de la teoría de números; pero, por otro lado, una vez efectuado el salto, las obstrucciones mayores se encuentran en el regreso a lo que deberían ser las estructurales naturales de lo analítico (campos de característica cero). Nos encontramos así ante nuevas obstrucciones en el tránsito —cuidadosamente sostenidas, en el ámbito del programa de Langlands, por una sofisticada *teoría de transvases estructurales de las formas*— que revelan una vez más la presencia incesante de la "aporía fundadora de las matemáticas" según Thom, aquella *contradicción* inherente entre lo discreto y lo continuo que impulsa a la disciplina.

Dados un grupo algebraico G y una L–función, se puede construir un nuevo grupo ${}^LG$ (grupo de Langlands) que combina el grupo de Galois absoluto sobre el campo subyacente a G y un grupo de Lie complejo asociado a L; se trata de un *mixto*, en el sentido de Lautman, o un constructo *relativo*, en el sentido de Grothendieck, que ayuda a controlar la teoría de representaciones de G. Dentro de ese marco, algunos de los tránsitos subyacentes en el programa de Langlands corresponden al hecho funtorial (plausible, correcto en casos particulares y no demostrado en general) de que todo morfismo ${}^LG \to {}^L G'$ proviene de un morfismo entre las formas automorfas asociadas, que se comporte bien en cada estrato de representación p–ádico, para casi todo p [Langlands 1997]. Estamos aquí ante una situación recurrente en las matemáticas avanzadas, que no puede ser contemplada en contextos matemáticos de menor nivel de complejidad: una situación donde las formas generales del conocimiento (*universalidad*, funtorialidad) y los cálculos acotados subyacentes (*particularidad*, objetos diofantinos) dependen de una compleja jerarquía intermedia que fuerza a estructurar los transvases asociados: tanto el tránsito genérico (hacia lo alto), como la obstrucción específica (hacia lo bajo).

Un revelador comentario de Langlands, acerca de la diferencia entre el Teorema de Taniyama–Shimura[3] y el Teorema de Fermat, muestra la importancia del pensamiento matemático atento a estructuras ideales genéricas: “El Teorema de Fermat es una consecuencia inesperada de otro teorema (Taniyama–Shimura–Weil). Este último pertenece a un marco coherente, en el que creo porque corresponde a un *orden* que estoy acostumbrado a percibir en la teoría de números, y que constituye para mí su *belleza*. Por el contrario, según mi intuición o mi imaginación, el Teorema de Fermat podría haber resultado falso sin que ese orden se hubiese perturbado” [Durand 2000]. Contrapesos generales, oscilaciones pendulares, contrapuntos dentro de un orden abstracto, armonías estéticas escondidas guían entonces al *vidente teórico*, mientras que la particularidad del caso concreto puede llegar a distraerlo. En el *equilibrio* entre la más amplia universalidad abstracta y la más acotada particularidad concreta, es decir, en el amplio registro de las *mediaciones*, es donde emerge con toda su fuerza la inventividad matemática.

[3] La conjetura de Taniyama–Shimura (1955) sugería la equivalencia (módulo L–series) de las curvas elípticas con las formas modulares. Frey (1985) conjeturó que una solución no trivial de tipo Fermat ($x^n + y^n = z^n$) daría lugar a una curva elíptica no modular (“curva de Frey”). Ribet demostró (1986) la conjetura de Frey, estableciendo así la implicación No (Fermat) $\Rightarrow$ No (Taniyama–Shimura), o, lo que es lo mismo, Taniyama–Shimura $\Rightarrow$ Fermat. Wiles (1993–94) demostró la conjetura de Taniyama–Shimura para curvas elípticas semiestables (entre las cuales aparece la curva de Fermat), demostrando así el Teorema de Fermat. La prueba plena de Taniyama–Shimura, para todas las curvas elípticas, fue finalmente obtenida en 1999 (Breuil, Conrad, Diamond, Taylor).

4 Shelah. Los transvases conjuntistas y combinatorios

La obra de Saharon Shelah (Israel, n. 1945) otorga nuevos y profundos argumentos técnicos a la comprensión de una matemática fuertemente estratificada, imbuida de múltiples tensiones *transversales*, y atenta al estudio de las *limitantes estructurales* de la estratificación, tanto en sus niveles horizontales, como a lo largo de su esqueleto vertical. Yendo mucho más allá de los teoremas de incompletitud de Gödel (acerca de las limitantes deductivas de teorías cuyo umbral de complejidad supera la aritmética de Peano), los *teoremas de no estructura* (1980–90) de Shelah develan las limitantes *semánticas* de clases naturales de modelos en las matemáticas avanzadas. Los resultados revelan una inesperada polarización en el estudio de las clases de modelos de una teoría clásica T. Su teorema de la brecha (*Main Gap*) muestra que el número de modelos no isomorfos (de un tamaño dado) de T se enfrenta a una cortante alternativa: *o* estalla literalmente, alcanzando el máximo posible de modelos, *o*, en cambio, resulta ser perfectamente controlable. No hay lugar para un semi–control o para una semi–explosión: *o* la clase de modelos de T no cuenta con ninguna estructura —todos los posibles modelos se dan: todo lo que *posiblemente* es, también *actualmente* es—, *o* la clase puede ser plenamente estructurada —todo lo que actualmente es, también lo es en forma "coordinada" mediante escalas de invariantes—. De hecho, en el fondo, la consecución de una *teoría general de la dimensión* (finos invariantes para el caso estructurado) es la que impulsa las ideas más originales (ver [Shelah 1990]). En particular, su "teoría de la excelencia" —sostén de la parte difícil de la prueba del *Main Gap*, que tardó diez años en ser terminada— requiere una serie de interacciones "algebraicas" en dimensiones finitas arbitrariamente altas, que trasciende con mucho las usuales interacciones en dimensión dos que aparecen en las pruebas de independencia en la geometría algebraica tradicional. Nos encontramos así ante otra situación más en las matemáticas avanzadas, donde un salto de complejidad da lugar a nuevas matemáticas sin reflejos en los estratos inferiores.

Después de detectar la presencia *genérica* de la brecha en el universo conjuntista, la ingente labor de Shelah y de su equipo se concentra entonces en describir múltiples condiciones observables *concretas* para poder detectar si una teoría arbitraria puede clasificarse como de estructura o de no estructura. Las clases de modelos de una tal teoría deambulan, en principio, entre dos extremos: proximidad a un teorema de categoricidad tipo Morley, en donde los modelos resultan isomorfos por estratos, o liberación de cualquier restricción estructural. Una primera dicotomía para clasificar clases de modelos distingue teorías *estables* e inestables. El hondo sentido matemático de las teorías estables proviene de la estructura $\mathbb{C}$ de los números complejos, con *suma y multiplicación*, y de la geometría algebraica que allí puede realizarse; las nociones de dimensión y de algebraicidad corrientes se extienden a las teorías estables, y pueden usarse como invariantes lógico/algebraicos naturales para "coordinar" los modelos de esas teorías. Por otro lado, las teorías inestables son teorías en las que ciertos órdenes genéricos pueden ser definibles; en ese caso, las clases de modelos tienden a desagregarse y la diversidad explota. Un ejemplo actualmente en pleno estudio es la estructura de los complejos, con suma, multiplicación y *exponenciación* añadida; la exponencial compleja introduce de hecho una sofisticada jerarquía de submodelos analíticos que queda por fuera del control de la lógica de primer orden, y la teoría se torna profundamente inestable (ver [Villaveces 2004]).

En una prospección sobre el futuro de la teoría de conjuntos, [Shelah 2002] considera que las principales fuentes de interés para el desarrollo de la teoría radican en *(i)* su belleza (calificada con "9 puntos"), *(ii)* su generalidad (6 puntos), *(iii)* sus pruebas concretas (5 puntos), *(iv)* su riqueza de desarrollos internos (4 puntos), y apoya esta polémica visión al añadir: "siento, exagerando algo, que la belleza es para la eternidad, mientras que los valores filosóficos siguen las modas". Para Shelah, la belleza radica en "una estructura en donde definiciones, teoremas y pruebas adquieren su lugar en la armonía" (teoría de Galois, teorema de Morley, etc.) Aún cuando muchos de los teoremas mayores de Shelah exhiben, analizan y sintetizan el comportamiento no armónico y no estructurado de ciertas clases de modelos, debe observarse que, *en el todo de su concepción*, existe en cambio un contrapunto pendular entre lo estructurado y lo falto de estructura, y esa oscilación es en sí misma profundamente armónica. Los *transvases* y las obstrucciones de las formas, con equilibrios globales y con incesantes tensiones locales, gobiernan una vez más los lineamientos de una obra determinante en las matemáticas contemporáneas.

Como sucede a menudo con los grandes creadores matemáticos, los avances en una dirección de su pensamiento se contraponen con avances inesperados en una dirección *opuesta*. Después de convertirse en un especialista en resultados de *consistencia relativa* en teoría de conjuntos, y, sobre todo, después de demostrar la muy difícil independencia del problema de Whitehead[4], Shelah *gira* hacia una nueva comprensión de las

[4] El problema de Whitehead (1950) pretendía caracterizar un grupo abeliano *libre* A mediante una condición sobre su comportamiento contextual (condición A residual:

aproximaciones en el infinito, con un ambicioso programa de aritmética cardinal [Shelah 1992, 1994] en el que propone rediseñar invariantes adecuados para las operaciones. En efecto, si la gran *obstrucción* de la aritmética cardinal resulta ser la exponenciación cardinal —debido al comportamiento "salvaje" ("wild") de 2^κ para κ cardinal infinito (resultados de independencia de Cohen, 1963)— Shelah propone buscar entonces un *esqueleto robusto* alternativo para las operaciones infinitarias. Shelah encuentra el sostén de ese esqueleto en su teoría *pcf* (iniciales de "*p*ossible *c*o*f*inalities"), donde introduce una red de *controles algebraicos moderados* para las cofinalidades cardinales, y descubre que, más allá del comportamiento errático o caótico de la exponenciación, subyace un comportamiento *regular* de ciertos productos reducidos con los cuales pueden aproximarse las colas altas de los cardinales. Nos encontramos de nuevo aquí ante la construcción de una jerarquía intermedia que permite, por un lado, adecuar relativamente el tránsito, y, por otro, hallar sus invariantes apropiados.

Una suerte de correlación [*pcf*/cardinales $\equiv$ topología algebraica/topología] se desprende de los trabajos de Shelah. De hecho, la búsqueda de un esqueleto robusto (cofinalidades) y de una calculatoria algebraica moderada (productos reducidos) en la teoría de cardinales singulares corresponde a la idea de buscar invariantes algebraicos naturales (homotopías, homologías) para la topología. Se cierra así uno de los ciclos que abordamos en este artículo. Si los *transvases* permanentes de las formas han sido el *motivo* fundamental, hemos podido contemplar también una rica multiplicidad de *modulaciones* concretas en donde encarna muy diversamente el motivo. La mayoría de estos tránsitos ocurren en un espacio móvil del imaginario matemático, donde las tensiones dinámicas entre los conceptos son fuente de creatividad.

5 Encuentros y desencuentros con la cultura

La época que caracterizamos al comienzo de este artículo como "época del desliz" ha sido denominada a menudo como "postmodernismo". De hecho, en el periodo 1960–1990, en la cultura como un todo, el péndulo de la balanza pareció orientarse hacia dinámicas conjuntivas, diferenciaciones locales, cortes contradictorios, transvases de valores, ambigüedades va-

para todo morfismo g sobre el grupo A, con núcleo $\mathbb{Z}$, existe una sección s tal que $gs = id_A$). Shelah demostró que, para grupos abelianos, la conjetura $\theta : (A\,\text{residual} \Rightarrow A\,\text{libre})$ era *independiente* de la teoría de conjuntos ZF, pues, por un lado, $V = L$ deducía θ (de donde $\mathrm{Con}(ZF + \theta)$), y, por otro lado, $MA + \neg HC$ deducía $\neg\theta$ (de donde $\mathrm{Con}(ZF + \neg\theta)$).

gas, luchas contra lo universal: énfasis característicos de ciertas corrientes postmodernas. Sin embargo, como hemos visto, la matemática de la época no puede situarse solamente en uno de los dos lados de la balanza. *Grothendieck es todo vaivén, dialéctica, equilibrio*, "yin–yang". La matemática evade así los extremos del postmodernismo, y parece situarse más bien en una suerte de "modernidad exponenciada". El "transmodernismo" —término introducido por la filósofa y ensayista española Rosa María Rodríguez Magda [Rodríguez Magda 1989]— recoge esa situación peculiar, ya que propone un enriquecedor *contrapunto* con lo postmoderno: la ruptura, la localidad, la diferenciación, la conjunción de las contradicciones, la muerte, el "todo vale", la imposibilidad de universales —énfasis postmodernos— se contraponen con la revisión, los enlaces local/global, la concepción pendular diferencial/integral, el pegamiento de las coherencias relativas, los renacimientos, el "mucho puede valer", la construcción de universales relativos —énfasis transmodernos—. Podríamos decir entonces que la matemática 1960–1990 es *transmoderna antes de tiempo*, adelantándose, una vez más, a algunos patrones culturales subsiguientes en la evolución de la cultura.

El *diferenciar para luego integrar* es uno de los motores centrales de la teoría de categorías. Después de reconocer y estudiar las propiedades de ciertas *regiones* matemáticas (categorías concretas: conjuntos, grupos, anillos, espacios topológicos, órdenes, variedades diferenciales, etc.), las propiedades *universales* en categorías abstractas explican la unidad de lo diverso. De la misma manera, los *esquemas* de Grothendieck unen a Riemann y Galois, expanden la noción de número, integran las diferencias aparentes. Los *topos* acercan los conjuntos y la geometría, entroncan los haces de Cartan con los cubrimientos y los cambios de base de Serre, y proveen un ámbito universal para reentender el espacio. Los *motivos* reintegran las diversas cohomologías. De esta manera, las fuerzas más vivas del *transmodernismo* actúan, antes de tiempo, en la mente de uno de los mayores genios de la historia matemática. De forma más general, las escuelas del periodo (ver la figura) son escuelas siempre *transgresoras*, abiertas a la exploración de un concepto y de sus contrapartes, para luego establecer redes correlativas de tránsito entre las polaridades que se vayan abriendo.

Los *transvases* propuestos por Grothendieck y sus pares tienen, en el fondo, un cierto sabor "cinematográfico". En efecto, *los cuasi–objetos* matemáticos están en devenir, son conjuntos variables en el tiempo, y se entienden mejor a lo largo de una "cinta" movible que como una "instantánea" fotográfica. De manera similar, muchas de las notables producciones cinematográficas de la época parecen coincidir con varias de las temáticas matemáticas que hemos venido señalando. *Stalker* (1979) de Tarkovski se sumerge en la transversalidad incesante de aquellas investigaciones que pretenden revelar lo universal detrás de lo concreto: los debates de los tres personajes sobre la *trans*–substanciación, las diluciones y las reconstrucciones de la memoria a lo largo de las aguas estancas donde se descomponen los recuerdos, la búsqueda de una cámara primigenia que permita explicar la diversidad del mundo. 2001*, Odisea en el espacio* (1968) de Kubrick constata la aparición de inesperados invariantes en el flujo cósmico: el monolito recurrente, las iteraciones temporales y geométricas en el vals (Strauss) de curvas espaciales, los re-nacimientos finales del astronauta. *El proceso* (1962) de Welles explora una infinitud circulante, anticipadora de muchos movimientos de Shelah: los reflejos espirales de las oficinas, las intuiciones de lo no estructural en las arquitecturas contradictorias, los elusivos tejidos de signos que permiten "coordinar" el desahucio del protagonista. *La noche* (1961) de Antonioni se erige en obra pionera que abre dos décadas prodigiosas de acontecer fílmico y que parece responder punto a punto a las grandes ensoñaciones grothendickianas: juegos de cristales y espejos, desdoblamientos de la trama, atmósferas naturales que ablandan las caparazones de los personajes (en correspondencia con la metáfora de la marea subiente y la nuez en [Grothendieck 1985–1986, pp. 552-553]), arquitectónica reticular y abierta, dialéctica de la luz y la sombra, etc. El entramado general de la cultura sigue desarrollándose así como un ser vivo, con múltiples osmosis entre sus sinuosos tentáculos.

Bibliografía

[Durand 2000] S. Durand et R. Langlands, *Un explorateur de l'abstrait* (Québec Science, 2000). Disponible en: http://www.crm.umontreal.ca/math2000-1/pub/langlands.html

[Grothendieck 1957] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. Journal **9**, 119 (1957).

[Grothendieck 1985–1986] A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, manuscrito inédito (1985–1986).

[Grothendieck & Dieudonné 1960–1967] A. Grothendieck (redactado en colaboración con J. Dieudonné), *Éléments de Géométrie Algébrique*, 4 volúmenes (8 partes) (IHES, París, 1960–1967).

[Grothendieck *et. al.* 1960–1969] A. Grothendieck *et. al.*, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie*, 7 volúmenes (12 partes), fascículos originales multicopiados, 1960–1969 (Springer, Berlín, 1970–1973).

[Langlands 1997] R. Langlands, *Where Stands Functoriality Today*, en *Representation Theory and Automorphic Forms*, editado por T. N. Bailey & A. W. Knapp, Proc. Symp. Pure Math. **61**, 457 (American Mathematical Society, Providence, 1997).

[Rodríguez Magda 1989] R. M. Rodríguez M., *La sonrisa de Saturno. Hacia una teoría transmoderna* (Anthropos, Barcelona, 1989).

[Shelah 1990] S. Shelah, *Classification Theory and the Number of Non-isomorphic Models* (North Holland, Amsterdam, 1990).

[Shelah 1992] S. Shelah, *Proper and Improper Forcing* (North Holland, Amsterdam, 1992).

[Shelah 1994] S. Shelah, *Cardinal Arithmetic* (Oxford University Press, Oxford, 1994).

[Shelah 2002] S. Shelah, *The Future of Set Theory* (2002). Disponible en: http://arxiv.org/pdf/math.LO/0211397.pdf

[Villaveces 2004] A. Villaveces, *La tensión entre teoría de modelos y análisis matemático: estabilidad y la exponencial compleja*, Bol. Mat. **XI**, 95 (2004).

[Zalamea 2009] F. Zalamea, *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas* (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2009).