Problema de Dirichlet para una ecuación de difusión no local con fuente

Mauricio Bogoya[1]
Luz Maricel Elorreaga[2]

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá

Se estudia el problema de Dirichlet para una ecuación de difusión no local con fuente en un dominio acotado y con frontera suave en $\mathbb{R}^N$. Primero se estudia la existencia y unicidad de las soluciones y luego un principio de comparación válido para las soluciones del problema. Además se analiza el fenómeno de explosión de las soluciones del problema con algunas fuentes dadas.

Palabras claves: difusión no local, condiciones de Dirichlet, explosión.

We consider the Dirichlet boundary value problem for a nonlocal diffusion nonlinear operator with source term in a domain bounded in $\mathbb{R}^N$ with a smooth boundary. First, we prove existence and uniqueness of the solutions and next the validity of a comparison principle for solutions of these problem. Moreover, we analyze the phenomenon of blow–up for the solutions of the problem for some given sources.

Keywords: nonlocal diffusion, Dirichlet conditions, blow–up.

MSC: 35K57, 35B40.

Recibido: 9 de marzo de 2012 Aceptado: 17 de mayo de 2012

[1] mbogoyal@unal.edu.co
[2] lmelorreagar@unal.edu.co

1 Introducción

La descripción matemática de una gran variedad de fenómenos que aparecen en áreas como la biología, la química y la física puede ser presentada usando ecuaciones en derivadas parciales. Tal descripción puede ser expresada como un modelo de difusión. Ecuaciones de la forma

$$u_t(x,\,t) = J * u - u(x,\,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)\,u(y,\,t)\,dy - u(x,\,t)\,, \tag{1}$$

y variaciones de ella han sido estudiadas como modelos de procesos de difusión; ver [1, 3, 6]. La ecuación (1) es una ecuación de difusión no local, ya que la difusión de la densidad $u(x,t)$ no depende solamente de x, sino que depende además de una vecindad de x. En estos modelos $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función no negativa, suave, simétrica ($J(r) = J(-r)$), decreciente radialmente, con soporte compacto en la bola unitaria y $\int_{\mathbb{R}^N} J(r)dr = 1$. Si $u(x,t)$ representa la densidad de una especie de individuos, ubicados en la posición x en un tiempo t y $J(x-y)$ representa la distribución de probabilidad de saltar de la posición y a la posición x, entonces $(J * u)(x,t) = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)u(y,t)dy$ es la razón con la cual los individuos llegan a la posición x desde las otras posiciones. En forma análoga $-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}} J(y-x)u(x,t)dy$ es la razón con la cual los individuos en la posición x viajan a cualquier otra posición [6]. Estas consideraciones, en ausencia de fuentes externas, inmediatamente llevan a que la densidad $u(x,t)$ satisfaga la ecuación (1). Esta ecuación comparte muchas caracteristicas similares con la ecuación del calor $u_t = \Delta u$, tales como: las soluciones en estado estacionario son contantes, se satisface el principio del máximo y la propiedad de propagación con velocidad infinita entre otras.

Cortázar, Elgueta y Rossi [4] introdujeron un modelo unidimensional en donde la distribución de probabilidad J depende de la densidad u. Este modelo tiene algunas características similares a la ecuación de medios porosos $u_t = \Delta u^m$ con $m > 1$; una de estas es la propiedad de propagación de velocidad finita. Esto es, si el dato inicial es de soporte compacto, entonces la solución es de soporte compacto en cualquier tiempo.

Luego Bogoya [2] extendió el modelo al caso de dimensión N con $N \geq 1$. En este modelo, para $0 < \alpha \leq \frac{1}{N}$, la distribución de probabilidad de saltar de la posición y a la posición x está dada por $J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right)\frac{1}{u^{N\alpha}(y,t)}$ cuando $u(y,t) > 0$ y 0 en otra parte. En este caso, la razón con la cual los individuos llegan a la posición x es $\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{y-x}{u^{\alpha}(y,t)}\right)u^{1-N\alpha}(y,t)dy$. En forma análoga, la razón con la cual los individuos salen de la posición

x es $-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{y-x}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,t)dy$. En ausencia de fuentes externas la densidad u satisface la ecuación

$$u_t(x,\, t) = \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\, t)\, dy - u(x,\, t)\,, \tag{2}$$

con dato inicial $u(\cdot,0) = d + w_0(x)$, $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ una función no negativa y $d \geq 0$. La ecuación (2) comparte algunas caracteristicas de la ecuación de medios porosos tales como: la propiedad de propagación de velocidad finita y el desarrollo de fronteras libres.

Además en [2] se estudia el problema de Dirichlet asociado a (2),

$$u_t(x,\, t) = \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\, t)\, dy - u(x,\, t)\,, \tag{3}$$

para $x \in \Omega$, y $u(x,t) = 0$ cuando $x \notin \Omega$, con un dato inicial no negativo $u(x,0) = u_0(x) \in L^1(\Omega)$, donde Ω es un dominio acotado con frontera suave en $\mathbb{R}^N$. Se demuestra la existencia y unicidad de las soluciones y el comportamiento asintótico de estas, obteniendo que la solución existe globalmente y que se estabiliza en cero cuando $t \to \infty$.

El Problema. El objetivo de este trabajo es estudiar el modelo asociado a (3) con una fuente, más aun, estudiaremos el problema para $x \in \Omega$ y $t > 0$ dado por

$$u_t(x,\, t) = \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\, t)\, dy - u(x,\, t) + f(u(x,\, t))\,, \tag{4}$$

para $x \in \Omega$, y $u(x,t) = 0$ cuando $x \notin \Omega$, con un dato inicial no negativo $u(x,0) = u_0(x) \in L^1(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera suave y f una función no negativa que representa la fuente. En este modelo se asume que ningún individuo puede sobrevivir fuera del dominio Ω; por la tanto la densidad u tiene que ser cero allí. Sin embargo, a los individuos se les permite saltar fuera del dominio (donde la densidad vale cero). Debido a ésto, se obtienen las condiciones de frontera de Dirichlet.

Consideramos las siguientes hipótesis sobre f:

(H_0) f una función de tipo Lipschitz, positiva, con constante de Lipschitz $K > 0$.

(H_1) $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, función creciente, $f(0) \geq 0$, $f(s) > 0$ para todo $s > 0$.

(H_2) $\int^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds < \infty$.

Una propiedad importante en el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales es la relacionada con el comportamiento asintótico de las soluciones. Este análisis trae como consecuencia el estudio del fenómeno de explosión de las soluciones, que en literatura inglesa se conoce como *blow–up*. Se dice que una solución $u(x,t)$ explota en tiempo finito T si existe $T > 0$ tal que la solución u existe para todo $t \in [0,T)$ y $\sup_{x\in\Omega} u(x,t) \to \infty$ cuando $t \to T^-$. Para un estudio más profundo sobre este tema ver [5, 7, 8].

El trabajo se desarrolla como sigue: En la sección 2 se analiza la existencia y unicidad de las soluciones de (4) y un principio de comparación válido para las soluciones de (4). En la sección 3 se analiza el fenómeno de explosión de las soluciones de (4).

2 Existencia y unicidad

La existencia y unicidad de la solución de (4) es consecuencia del teorema del punto fijo de Banach.

Seguiremos algunas de las ideas desarrolladas en [2]. Para nuestro análisis fijamos $t_0 > 0$ y consideramos el espacio de Banach $Y_{t_0} = C([0,t_0]; L^1(\Omega))$ dotado de la norma

$$|||w||| = \max_{0\le t\le t_0} \|w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} .$$

Sea $Y_{t_0}^+ = \{w \in Y_{t_0} \,/\, w \ge 0\}$ un subconjunto cerrado de Y_{t_0}. Obtendremos la solución de (4) como el punto fijo del operador $L_{w_0} : Y_{t_0}^+ \to Y_{t_0}^+$ definido por

$$\begin{aligned} L_{w_0}(w)(x,\,t) \;\; &= \;\; \int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,\,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,\,s)\,dy\,ds \\ &\quad + \int_0^t e^{s-t}\, f(w(x,\,s))\,ds + e^{-t}\, w_0(x)\,, \end{aligned}$$

para $x \in \Omega$, y $L_{w_0}(w)(x,\,t) = 0$ cuando $x \notin \Omega$.

Primero estudiaremos el problema (4) para fuentes f que satisfacen H_0 y luego, por un argumento de convergencia, lo extenderemos a cualquier función f que satisfaga H_1.

El siguiente Lema es muy importante para nuestro análisis.

Lema 2.1. *Asumamos que f satisface H_0. Sean w_0 y z_0 funciones no negativas tales que $w_0, z_0 \in L^1(\Omega)$ y $w, z \in Y_{t_0}^+$. Entonces, existe una constante $C = C(t_0, K) > 0$ tal que*

$$|||L_{w_0}(w) - L_{z_0}(z)||| \leq C\,|||w - z||| + e^{-t_0}\,||w_0 - z_0||_{L^1(\Omega)}\,.$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |L_{w_0}(w)(x,\,t) - L_{z_0}(z)(x,\,t)|\,dx \\
&\qquad \leq \int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,\,s) \right.\right. \\
&\qquad\quad \left.\left. -J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) z^{1-N\alpha}(y,\,s)\right) dy \right| dx\,ds \\
&\qquad\quad + \int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N} |f(w(x,\,s)) - f(z(x,\,s)|\,dx\,ds \\
&\qquad\quad + e^{-t} \int_{\mathbb{R}^N} |w_0 - z_0|(y)\,dy\,.
\end{aligned}$$

Como las funciones involucradas se anulan fuera de Ω, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |L_{w_0}(w)(x,\,t) - L_{z_0}(z)(x,\,t)|\,dx \\
&\qquad \leq \int_0^t e^{s-t} \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,\,s) \right.\right. \\
&\qquad\quad \left.\left. -J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) z^{1-N\alpha}(y,\,s)\right) dy \right| dx\,ds \\
&\qquad\quad + \int_0^t e^{s-t} \int_{\Omega} |f(w(x,\,s)) - f(z(x,\,s)|\,dx\,ds \\
&\qquad\quad + e^{-t} \int_{\Omega} |w_0 - z_0|(x)\,dx \\
&\qquad = I_1 + I_2 + e^{-t} \int_{\Omega} |w_0 - z_0|(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Para analizar el término I_1 consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned}
A^+(s) &= \{y \in \Omega \,|\, w(y,\,s) \geq z(y,\,s)\}\;, \\
A^-(s) &= \{y \in \Omega \,|\, w(y,\,s) < z(y,\,s)\}\;.
\end{aligned}$$

Tenemos la siguiente acotación para I_1:

$$
\begin{aligned}
I_1 \;\leq\; & \int_0^t e^{s-t} \int_\Omega \left[\int_{A^+} \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)} \right) w^{1-N\alpha}(y,\, s) \right.\right. \\
& \qquad\qquad \left. -J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)} \right) z^{1-N\alpha}(y,\, s) \right) dy \\
& + \int_{A^-} \left(J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)} \right) z^{1-N\alpha}(y,\, s) \right. \\
& \qquad\qquad \left.\left. -J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)} \right) w^{1-N\alpha}(y,\, s) \right) dy \right] dx\, ds\,.
\end{aligned}
$$

Como J es una función radialmente decreciente, las expresiones bajo el signo integral son no negativas, luego obtenemos, por el Teorema de Fubini, que

$$
I_1 \leq \int_0^t e^{s-t} \int_\Omega |w(y,\, s) - z(y,\, s)|\, dy\, ds\,.
$$

Para el término I_2, dado que f satisface la condición H_0, obtenemos que

$$
I_2 \leq K \int_0^t e^{t-s} \int_\Omega |w(x,\, s) - z(x,\, s)|\, dx\, ds\,.
$$

En resumen, tenemos que

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} |L_{w_0}(w)(x,\, t) - L_{z_0}(z)(x,\, t)|\, dx \\
\leq \;& (1+K) \int_0^t e^{t-s} \int_\Omega |w(y,\, s) - z(y,\, s)|\, dy\, ds + \|w_0 - z_0\|_{L^1(\Omega)}\,.
\end{aligned}
$$

Al tomar el máximo sobre $[0, t_0]$, finalmente obtenemos que

$$
|||L_{w_0}(w) - L_{z_0}(z)||| \leq C|||w - z||| + e^{-t_0}\|w_0 - z_0\|_{L^1(\Omega)}\,,
$$

donde $C = (1+K)(1 - e^{-t_0})$. ■

Para la existencia y unicidad de la solución de (4) tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Asumamos que f satisface H_0. Para toda función no negativa $u_0 \in L^1(\Omega)$ existe una única solución $u \in Y_{t_0}^+$ de (4).*

Demostración. Haciendo $w_0 = u_0$, $z_0 \equiv 0$ y $z \equiv 0$ en el Lema 2.1, tenemos que $L_{u_0}(u) \in Y_{t_0}^{+}$. Además, haciendo $z_0 \equiv w_0$ en el Lema 2.1 y eligiendo $C = (1+K)(1-e^{-t_0}) < 1$, tenemos que L_{u_0} es una contracción estricta en $Y_{t_0}^{+}$. Por lo tanto, por el Teorema del Punto Fijo de Banach, existe un único punto fijo u de L_{u_0} en $Y_{t_0}^{+}$, el cual es la solución de (4). ∎

Como consecuencia del análisis anterior se tiene las siguientes observaciones, las cuales son de gran utilidad en lo que sigue.

Observaciones 2.1. *Las soluciones de (4) dependen en forma continua del dato inicial en el siguiente sentido. Si u y v son soluciones de(4) con datos iniciales u_0 y v_0 respectivamente, entonces existe una constante $\widetilde{C}$ tal que*

$$\max_{0 \le t \le t_0} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \le \widetilde{C} ||u(\cdot,0) - v(\cdot,0)||_{L^1(\Omega)} .$$

Observaciones 2.2. *u es solucion de (4) si y sólo si*

$$\begin{aligned} u(x,\, t) \;\; &= \;\; \int_0^t e^{s-t} \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,s)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\, s)\, dy\, ds \\ &\quad + \int_0^t e^{s-t} f(u(x,\, s))\, ds + e^{-t} u_0(x) . \end{aligned}$$

Además si $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ entonces $u(\cdot,t) \in C(\overline{\Omega})$ para todo $t \ge 0$ y satisface (4) para $x \in \overline{\Omega}$.

Teorema 2.2. Principio de Comparación. *Sean u y v soluciones continuas de* (4)*, con datos iniciales u_0 y v_0, respectivamente. Si $u_0(x) \le v_0(x)$ para todo $x \in \Omega$, entonces $u(x,t) \le v(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$.*

Demostración. Como $u_0(x) \le v_0(x)$ para todo $x \in \Omega$, existe $\delta > 0$ tal que $u(x,0) + \delta < v(x,0)$. Supongamos inicialmente que $u(x,0)$ y $v(x,0)$ son funciones C^1 de soporte compacto. Argumentaremos por contradicción. Supongamos que la conclusión no se tiene, por lo tanto existe un tiempo $t_0 > 0$ y un punto $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0,t_0) = v(x_0,t_0)$ y $u(x,t) \le v(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,t_0]$.

Consideremos el conjunto $G = \{x \in \Omega /\ u(x,t_0) = v(x,t_0)\}$, el cual es no vacío y cerrado. Sea $x_1 \in G$, de la ecuación (4), tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 \ \leq \ & (u-v)_t(x_1,\, t_0) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(J\left(\frac{x_1-y}{u^{\alpha}(y,t_0)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\, t_0) \right. \\
& \left. -J\left(\frac{x_1-y}{v^{\alpha}(y,t_0)}\right) v^{1-N\alpha}(y,\, t_0)\right) dy \\
\leq \ & 0\,,
\end{aligned}
$$

lo cual implica que $u(y,t_0) = v(y,t_0)$ para todo $y \in B_\epsilon(x_1)$ y por consiguiente G es abierto. Por lo tanto $G = \Omega$, lo cual no puede ser.

Consideremos $u_n(x,0)$ and $v_n(x,0)$ sucesiones de funciones C^1, con soporte compacto, tales que, $u_n(x,0) \to u(x,0)$ y $v_n(x,0) \to v(x,0)$ en $L^1(\Omega)$ cuando $n \to \infty$, y además $u_n(x,0) \leq v_n(x,0)$. Sean u_n and v_n las soluciones de (4) con condiciónes iniciales $u_n(x,0)$ y $v_n(x,0)$, respectivamente. Por el argumento previo tenemos que $u_n(x,t) \leq v_n(x,t)$. El resultado se sigue de la Observación 2.2 y del Teorema de la Convergencia Monótona al hacer $n \to \infty$. ■

A continuación demostraremos la existencia y unicidad de las soluciones de (4) para el caso en que la función f satisface (H_1).

Teorema 2.3. *Para toda $u_0 \in L^1(\Omega)$, función no negativa, y para f una función que satisface (H_1), existe un tiempo $T > 0$ y una única solución u de (4) tal que $u \in C([0,T); L^1(\Omega))$.*

Demostración. Sea $(f_n)_n$ una sucesión creciente de funciones de tipo Lipschitz, tal que $f_n \leq f_{n+1}$. Asumamos que $f_n(s) = f(s)$ en $[0,n]$. Sea u_n la única solución de (4) con dato inicial $u_n(x,0)$ y fuente f_n. Supongamos que los datos iniciales satisfacen $u_n(x,0) < u_{n+1}(x,0)$ y $u_n(\cdot,0)$ converge uniformemente a $u(\cdot,0)$. Por el principio de Comparación 2.2, tenemos que $u_n(x,t) \leq u_{n+1}(x,t)$, por lo tanto existe u que puede ser ∞ en algunos puntos con $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Sea $T = \sup\left\{ t \mid \sup_{x\in\Omega} u(x,t) < \|u_0\|_\infty + 1 \right\}$, con $T > 0$.

De la observación 2.2, para u_n y haciendo $n \to \infty$, se sigue por el Teorema de la Convergencia Monótona que u es la única solución de (4) en $\Omega \times [0,T)$ con dato inicial $u(x,0)$ y fuente $f(u)$. ■

En forma similar se tiene el Principio de Comparación para fuentes f que satisfacen H_1.

Teorema 2.4. Principio de Comparación. *Supongamos que f satisface H_1. Sean u y v soluciones continuas de (4), con datos iniciales u_0 y v_0, respectivamente. Si $u(x,0) \leq v(x,0)$ para todo $x \in \Omega$, entonces $u(x,t) \leq v(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,T)$.*

3 Análisis de explosión

A continuación analizaremos el fenómeno de explosión para las soluciones de (4). Con este fin asumiremos que la fuente f satisface H_2.

Teorema 3.1. *Sea f una función convexa que satisface (H_1) y (H_2). Sea u la solución de (4), con dato inicial $u_0 > 0$, entonces u explota en tiempo finito.*

Demostración. Sea u la solución de (4), definimos la función $M(t)$ para $t > 0$ como

$$M(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x,\, t)\, dx\,. \tag{5}$$

Derivando M con respecto a t y aplicando el hecho de que f es una función convexa, tenemos que

$$M'(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(u(x,\, t))\, dx \geq f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x,\, t)\, dx \right) \geq f(M(t))\,.$$

por lo tanto

$$M'(t) \geq f(M(t))\,, \tag{6}$$

Como $M(0) > 0$ y $f(u) > 0$ para $u > 0$, tenemos que $M'(t) > 0$, por lo tanto $M(t) > 0$ para todo $t > 0$.

De (6), integrando en $[0, t]$ y luego haciendo un cambio de variable, se obtiene que

$$\int_{M(0)}^{M(t)} \frac{ds}{f(s)} \geq t\,. \tag{7}$$

Sea

$$F(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{f(s)}\,. \tag{8}$$

Como f satisface (H_2), de (7) tenemos que

$$F(M(0)) - F(M(t)) \geq t\,.$$

Por lo tanto la solución u of (4) explota en un tiempo finito. ■

Corolario 3.1. *Sea u la solución de (4) con dato inicial $u_0 > 0$. Si $f(u) = u^p,\ p > 1;\ f(u) = e^u;\ f(u) = (1+u)\ln^p(1+u),\ p > 1$, entonces u explota en tiempo finito.*

References

[1] P. Bates, P. Fife, X. Ren and X. Wang, *Travelling waves in a convolution model for phase transitions*, Arch. Rat. Mech. Anal. **138**, 105 (1997).

[2] M. Bogoya, *A nonlocal nonlinear diffusion equation in higher space dimensions*, J. Math. Anal. Appl. **344**, 601 (2008).

[3] X Chen, *Existence, uniqueness and asymptotic stability of travelling waves in nonlocal evolution equations*, Adv. Diff. Eqs. **2**, 125 (1997).

[4] C. Cortázar, M. Elgueta and J. D. Rossi, *A non–local diffusion equation whose solutions develop a free boundary*, Ann. Henri Poincaré **6**(2), 269 (2005).

[5] K. Deng and H. A. Levine, *The role of critical exponents in blow–up theorems: The sequel*, J. Math. Anal. Appl. **243**, 85 (2000).

[6] P. Fife, *Some nonclassical trends in parabolic and parabolic–like evolutions*, in *Trends in Nonlinear Analysis* (Springer, Berlin, 2003); p. 153.

[7] V. A. Galaktionov and J. L. Vázquez. *The problem of blow–up in nonlinear parabolic equations*, Disc. Contin. Dyn. Syst. **8**(2), 399 (2002).

[8] A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov and A. P. Mikhailov, *Blow–up in quasilinear parabolic equations* (Nauka, Moscow, 1987), in Russian. English translation (Walter de Gruyter, Berlin, 1995).