Acerca de algunas soluciones de ciertas ecuaciones de onda

Juan Carlos López Carreño[1]
Rosalba Mendoza Suárez[2]

Departamento de Matemáticas
Universidad de Pamplona
Pamplona

Con anterioridad hemos obtenido soluciones en forma de onda viajera de una ecuación de onda. Posteriormente, hemos encontrado soluciones exactas del sistema Mikhailov–Novikov–Wang. En esta nota mostramos que las ecuaciones consideradas en nuestro primer trabajo se pueden resolver de manera elemental y que las soluciones encontradas en nuestro segundo trabajo son formas diferentes de las primeras soluciones.

Palabras claves: ecuaciones diferenciales parciales, solitones, soluciones exactas.

Previously we have obtained exact travelling wave solutions of a wave equation. Later on we have found exact solutions of the Mikhailov–Novikov–Wang system. In this note we show that the equations considered in our first work can be obtained in an elementary way and that the solutions found in our second work are different forms of the first solutions.

Keywords: partial differential equations, solitons, exact solutions.

MSC: 35C05.

Recibido: 25 de septiembre de 2012 Aceptado: 18 de octubre de 2012

[1] jclopez@unipamplona.edu.co
[2] rosalbame@unipamplona.edu.co

1 Introducción

Las soluciones exactas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales juegan un papel importante en las ciencias físicas, ya que estas ecuaciones describen varios fenómenos naturales tales como vibraciones, solitones, propagación de ondas, etc. Así, estas soluciones nos pueden dar un mejor entendimiento de los aspectos físicos del problema.

En años recientes, con el desarrollo de los sistemas algebraicos de computador, se han implementado varios métodos para hallar soluciones de onda viajera, tales como el método de la tangente hiperbólica, el método de la exponencial, el método extendido de la tangente hiperbólica, el método proyectivo de la ecuación de Riccati, etc. En la búsqueda de soluciones en forma de onda solitaria para las ecuaciones (2.1), (3.1) y (4.1), en [1, 2, 5] se aplican algunos de estos métodos, los cuales requieren para su implementación el uso de un software matemático para resolver los sitemas de ecuaciones algebraícas que resultan tras la aplicación del método utilizado. El objetivo de esta nota es mostrar que las ecuaciones que se resuelven en [1, 2, 5] se pueden resolver por métodos elementales y que las soluciones encontradas en [1, 2, 5] se pueden obtener como casos particulares de la solución general que se halla al resolver la respectiva ecuación en cada caso. Con lo anterior, se quiere evidenciar lo que sucede cuando se hace uso de paquetes de cálculo simbólico sin hacer posteriormente un análisis cuidadoso de los resultados obtenidos.

El artículo está organizado como sigue. En la sección 2 se comenta la referencia [1]. En esta sección mostramos que de las nueve soluciones encontradas en [1] cuatro de ellas son casos particulares de otras dos y que las cinco restantes se pueden obtener de manera elemental. En la sección 3 se comenta la referencia [2]. Se muestra que las cuatro soluciones halladas en [2] se pueden obtener a partir de la solución general para ciertos valores específicos de las constantes de integración. Finalmente, en la sección 4 hacemos notar que de las seis soluciones del sistema Mikhailov–Novikov–Wang halladas en [5], cuatro de ellas ya habían sido encontradas en [2] y las otras dos, consideradas como nuevas en [5], son en realidad expresiones diferentes a las mismas halladas en [2].

2 Sobre soluciones exactas de una ecuación de aguas razas

En [1] se encuentran soluciones exactas de una ecuación de onda utilizando para ello el método proyectivo de las ecuaciones de Riccati.

La ecuación de onda que se considera es

$$u_{xxxt} + \alpha\, u_x\, u_{xt} + \beta\, u_t\, u_{xx} - u_{xt} - \gamma\, u_{xx} = 0\,, \tag{2.1}$$

donde u es una función de las dos variables independientes x y t mientras que α, β y γ son constantes no nulas. En [1] se buscan soluciones de onda viajera en la forma

$$u(x,\, t) = v(\xi)\,, \tag{2.2}$$

donde $\xi = x + \lambda\, t$, con λ una constante a ser determinada.

La transformación (2.2) reduce la ecuación (2.1) a la ecuación diferencial ordinaria

$$-n\, v''(\xi) + m\, v'(\xi)\, v''(\xi) + v^{iv}(\xi) = 0\,, \tag{2.3}$$

donde

$$n = \frac{\lambda + \gamma}{\lambda} \neq 0\,,$$

donde $m = \alpha + \beta \neq 0$.

Utilizando el método descrito en [1] se encuentran nueve soluciones exactas de la ecuación (2.3), a saber,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_0 + \frac{6\sqrt{-n}\left(\sqrt{1-\mu^2} - \operatorname{sen}\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}{m\left(\mu + \cos\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}, \\
v_2 &= a_0 - \frac{6\sqrt{-n}\left(\sqrt{1-\mu^2} + \operatorname{sen}\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}{m\left(\mu + \cos\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}, \\
v_3 &= a_0 + \frac{6\sqrt{n}\left(\sqrt{\mu^2-1} + \operatorname{senh}\left(\sqrt{n}\,\xi\right)\right)}{m\left(\mu + \cosh\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}, \\
v_4 &= a_0 - \frac{6\sqrt{-n}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-n}\,\xi\right)}{m}, \\
v_5 &= a_0 + \frac{6\sqrt{-n}\cot\left(\frac{1}{2}\sqrt{-n}\,\xi\right)}{m}, \\
v_6 &= a_0 - \frac{6\sqrt{-n}\cot\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)}{m\left(-1 + \csc\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}, \\
v_7 &= a_0 + \frac{6\sqrt{-n}\cot\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)}{m\left(1 + \csc\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}, \\
v_8 &= a_0 - \frac{6\sqrt{n}\left(\sqrt{\mu^2+1} - \cosh\left(\sqrt{n}\,\xi\right)\right)}{m\left(\mu + \operatorname{senh}\left(\sqrt{n}\,\xi\right)\right)}, \\
v_9 &= a_0 + \frac{6\sqrt{n}\left(\sqrt{\mu^2+1} + \cosh\left(\sqrt{n}\,\xi\right)\right)}{m\left(\mu + \operatorname{senh}\left(\sqrt{n}\,\xi\right)\right)}.
\end{aligned}
$$

No obstante, una mirada a estas soluciones nos muestra que cuatro de ellas son soluciones particulares de dos ellas, con más precisión observamos que

$v_4 = v_1$ con $\mu = 1$;

$v_5 = v_2$ con $\mu = -1$;

$v_6 = v_2$ con $\mu = 0$;

$v_7 = v_1$ con $\mu = 0$.

En efecto, en la expresión para v_1, tomando $\mu = 1$ y utilizando la identidad trigonométrica

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}\,,$$

con $\alpha = \sqrt{-n}\,\xi$, se obtiene

$$v_1 = a_0 - \frac{6\sqrt{-n}\operatorname{sen}\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)}{m\left(1+\cos\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)} = a_0 - \frac{6\sqrt{-n}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-n}\,\xi\right)}{m} = v_4\,.$$

De manera similar se establecen las otras igualdades.

Así, el método utilizado en [1] realmente permite encontrar cinco soluciones: v_1, v_2, v_7, v_8 y v_9. Lo que mostramos a continuación es que estas soluciones a su vez son soluciones particulares de la solución general que se encuentra utilizando métodos elementales.

2.1 Solución de la ecuación (2.3).

Una primera integración de (2.3) con respecto a la variable ξ proporciona la ecuación

$$-n\,v'(\xi) + \frac{m}{2}\left(v'(\xi)\right)^2 + v'''(\xi) = C_1\,.$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por $v''(\xi)$ e integrando se obtiene

$$-\frac{n}{2}\left(v'(\xi)\right)^2 + \frac{m}{6}\left(v'(\xi)\right)^3 + \frac{1}{2}\left(v''(\xi)\right)^2 = C_1\,v'(\xi) + C_2\,. \tag{2.4}$$

Si en (2.4) hacemos la sustitución $v'(\xi) = z$, $v''(\xi) = dz/d\xi$, la ecuación (2.4) se puede escribir como

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = -\frac{m}{3}\,z^3 + n\,z^2 + 2\,C_1\,z + 2\,C_2\,. \tag{2.5}$$

Es bien sabido que la solución general de (2.5) se puede expresar en términos de las funciones elípticas de Weiertrass, ver [3], pp 452–454. Sin embargo, para algunos valores particulares de las constantes C_1 y C_2, la ecuación diferencial (2.5) se puede resolver por métodos sencillos.

2.1.1 $C_1 = C_2 = 0$

En este caso, separando variables en la ecuación (2.5) e integrando se tiene

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{-\frac{1}{3}m\,z+n}} = \xi + C_3\,. \tag{2.6}$$

Con el fin de evaluar la integral en el lado izquierdo de (2.6) hacemos la sustitución

$$w = \sqrt{-\frac{1}{3}m\,z+n}\,,$$

con lo cual

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{-\frac{1}{3}m\,z+n}} = 2\int \frac{dw}{w^2-n}\,, \tag{2.7}$$

La expresión que aparece en el miembro derecho de (2.7) sugiere considerar dos situaciones.

2.1.1.1. $n > 0$

Al efectuar la integral en (2.7) , teniendo en cuenta (2.6) y el cambio de variable $v'(\xi) = z$, se tiene que finalmente

$$v(\xi) = C_4 + 6\,\frac{\sqrt{n}}{m}\,\left[\frac{1 + C_3\exp\left(-\sqrt{n}\,\xi\right)}{1 - C_3\exp\left(-\sqrt{n}\,\xi\right)}\right]\,. \tag{2.8}$$

2.1.1.2. $n < 0$

Procediendo de manera similar que en el caso anterior, se obtiene para v la expresión

$$v(\xi) = C_4 + 6\,\frac{\sqrt{-n}}{m}\,\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-n}\,\xi + C_3\right)\,. \tag{2.9}$$

A continuación mostramos que todas las soluciones que aparecen en [1] se pueden obtener a partir de (2.8) y (2.9) como casos particulares de la constante C_3. En efecto,

$$v_1 = a_0 + \frac{6\sqrt{-n}\left(\sqrt{1-\mu^2} - \operatorname{sen}\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}{m\left(\mu + \cos\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}\,,$$

es (2.9) si $C_3 = -\frac{c}{2}$, con $\cos c = \mu$;

$$v_2 = a_0 - \frac{6\sqrt{-n}\left(\sqrt{1-\mu^2} + \operatorname{sen}\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}{m\left(\mu + \cos\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}\,,$$

es (2.9) si $C_3 = \frac{c}{2}$, con $\cos c = \mu$;

$$v_3 = a_0 + \frac{6\sqrt{n}\left(\sqrt{\mu^2-1} + \operatorname{senh}\left(\sqrt{n}\,\xi\right)\right)}{m\left(\mu + \cosh\left(\sqrt{-n}\,\xi\right)\right)}\,,$$

es (2.8) si $C_3 = -e^{-c}$, con $|\mu| = \cosh c$;

$$v_8 = a_0 - \frac{6\sqrt{n}\left(\sqrt{\mu^2+1} - \cosh\left(\sqrt{n}\,\xi\right)\right)}{m\left(\mu + \operatorname{senh}\left(\sqrt{n}\,\xi\right)\right)}\,,$$

es (2.8) si $C_3 = -e^{c}$, con $\mu = \operatorname{senh} c$;

$$v_9 = a_0 + \frac{6\sqrt{n}\left(\sqrt{\mu^2+1} + \cosh\left(\sqrt{n}\,\xi\right)\right)}{m\left(\mu + \operatorname{senh}\left(\sqrt{n}\,\xi\right)\right)}\,,$$

es (2.8) si $C_3 = e^{-c}$, con $\mu = \operatorname{senh} c$.

3 Sobre soluciones exactas de un sistema integrable de orden 5

En [2] se buscan soluciones exactas del sistema

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xxxxx} - 20\, u\, u_{xxx} - 50\, u_x\, u_{xx} + 80\, u^2\, u_x + w_x\,, \\
w_t &= -6\, w\, u_{xxx} - 2\, u_{xx}\, w_x + 96\, w\, u\, u_x + 16\, w_x\, u^2\,,
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

en la forma

$$
\begin{aligned}
u(x,\, t) &= v(\xi)\,, \\
w(x,\, t) &= w(\xi)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\xi = x + \lambda\, t\,. \tag{3.2}
$$

Luego de algunas sustituciones y de realizar ciertas simplificaciones, en [2] se llega finalmente a una ecuación diferencial ordinaria no lineal en v y sus derivadas $v', v'', \cdots, v^{(5)}$ (ecuación (2.8) en [2]). Posteriormente, se utiliza el método generalizado de la tangente hiperbólica para encontrar las soluciones:

$$
v_1(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\,\cot^2\left(\lambda^{1/4}\,\xi\right)\,, \tag{3.3}
$$

$$
v_2(\xi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\,\coth^2\left(\lambda^{1/4}\,\xi\right)\,, \tag{3.4}
$$

$$
v_3(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\,\tan^2\left(\lambda^{1/4}\,\xi\right)\,, \tag{3.5}
$$

$$
v_4(\xi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\,\tanh^2\left(\lambda^{1/4}\,\xi\right)\,. \tag{3.6}
$$

Es de anotar que estas soluciones fueron halladas en [2] luego de resolver, utilizando el software Mathematica, un sistema algebraíco de 12 ecuaciones con cuatro incógnitas, sistema de por sí bastante complejo, como se puede ver en [2].

La expresión para $w(\xi)$ dada en la ecuación (2.7) de [2], a saber,

$$w(\xi) = \lambda\, v(\xi) - v^{(4)}(\xi) + 20\, v'(\xi)\, v''(\xi) + 15\, \big(v'(\xi)\big)^2 - \frac{80}{3}\, v^3(\xi)\,,$$

permite para cada $v_i(\xi)$, $i = 1, 2, 3, 4$ que figura en (3.3)–(3.6), encontrar el correspondiente $w_i(\xi)$, y así, finalmente haciendo uso de (3.2), encontrar las cuatro soluciones exactas del sistema bajo estudio.

Como se indica en [4], las reducciones escalares de un sistema como (3.1) permite obtener una ecuación diferencial parcial para la función u si y sólo si $w = k\, u + c$, siendo c una constante, $k = \pm 1$ o $k = 0$. De esta manera, y observando que en [2], a partir del sistema (3.1), se obtiene una ecuación diferencial parcial para v, podemos suponer que $w = c$, una constante, en principio no nula para tener efectivamente un sistema de dos ecuaciones con dos funciones incógnitas u y w, y no sólo la ecuación de Kaup–Kuperschmidt que se obtendría de (3.1) con $w = 0$. Así las cosas, el sistema (3.1) se reduce al sistema

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxxxx} - 20\, u\, u_{xxx} - 50\, u_x\, u_{xx} + 80\, u^2\, u_x\,, \\ u_{xxx} &= 16\, u\, u_x\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Derivando dos veces con respecto a la variable x la segunda ecuación del sistema (3.7) y reemplazando en la primera ecuación del mismo se obtiene la ecuación diferencial parcial

$$u_t = -2\, u_x\, u_{xx} + 16\, u^2\, u_x\,. \tag{3.8}$$

Considerando la transformación $u(x,t) = u(\xi)$, con $\xi = x + \lambda\, t$, la ecuación (3.8) se reduce a la ecuación diferencial ordinaria no lineal

$$-\lambda\, u' = -2\, u'\, u'' + 16\, u^2\, u'\,.$$

Integrando la ecuación anterior con respecto a la variable ξ, se obtiene

$$\big(u'\big)^2 = \frac{16}{3}\, u^3 - \lambda\, u + C_1\,, \tag{3.9}$$

donde C_1 es una constante de integración.

Como se mencionó en la sección 2 de la presente nota, la solución general de la ecuación (3.9) se puede obtener utilizando la teoría general de las funciones elípticas. Sin embargo, para valores particulares de la constante C_1, la ecuación (3.9) se puede resolver de manera elemental.

Para $C_1 = \lambda^{3/2}/6$, la solución de (3.9) es

$$u(\xi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\left(\frac{1 + C_2\exp(-2\,\lambda^{1/4}\,\xi)}{1 - C_2\exp(-2\,\lambda^{1/4}\,\xi)}\right)^2 . \tag{3.10}$$

Para $C_1 = -\lambda^{3/2}/6$, la solución de (3.9) es

$$u(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\tan^2\left(\lambda^{1/4}\,\xi + C_2\right) . \tag{3.11}$$

A continuación mostramos que todas las soluciones que aparecen en [2] se pueden obtener a partir de (3.10) y (3.11) como casos particulares de la constante C_2. En efecto,

v_1 se obtiene de (3.11) con $C_2 = \frac{\pi}{2}$;

v_2 se obtiene de (3.10) con $C_2 = 1$;

v_3 se obtiene de (3.11) con $C_2 = 0$;

v_4 se obtiene de (3.10) con $C_2 = -1$.

4 Sobre una nueva solución del sistema de Mikhailov–Novikov–Wang

En [5] se utiliza el método extendido de la tangente hiperbólica, para encontrar soluciones de onda solitaria del sistema Mikhailov–Novikov–Wang, a saber,

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxxxx} - 20\,u\,u_{xxx} - 50\,u_x\,u_{xx} + 80\,u^2\,u_x + w_x\,, \\ w_t &= -6\,w\,u_{xxx} - 2\,u_{xx}\,w_x + 96\,w\,u\,u_x + 16\,w_x\,u^2\,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$ son funciones diferenciables de las variables independientes x y t.

En [5] se concluye que las soluciones

$$\begin{aligned} u_3(\xi) &= \frac{1}{8}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{16}\sqrt{\lambda}\,\tan^2\left(\frac{1}{2}\,\lambda^{1/4}\,\xi\right) \\ &\quad + \frac{3}{16}\sqrt{\lambda}\,\cot^2\left(\frac{1}{2}\,\lambda^{1/4}\,\xi\right), \\ w_3(\xi) &= \frac{1}{6}\,\lambda^{3/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_6(\xi) &= -\frac{1}{8}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{16}\sqrt{\lambda}\,\tanh^2\left(\frac{1}{2}\,\lambda^{1/4}\,\xi\right) \\ &\quad + \frac{3}{16}\sqrt{\lambda}\,\coth^2\left(\frac{1}{2}\,\lambda^{1/4}\,\xi\right), \\ w_6(\xi) &= -\frac{1}{6}\,\lambda^{3/2}, \end{aligned}$$

con $\xi = x + \lambda\, t$, son nuevas soluciones del sistema (4.1). Esta afirmación es falsa, como se muestra a continuación.

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = 2 + 4\,\cot^2(2\,\alpha)\,,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} u_3(\xi) &= \frac{1}{8}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{16}\sqrt{\lambda}\,\tan^2\left(\frac{1}{2}\,\lambda^{1/4}\,\xi\right) + \frac{3}{16}\sqrt{\lambda}\,\cot^2\left(\frac{1}{2}\,\lambda^{1/4}\,\xi\right) \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{16}\sqrt{\lambda}\left[2 + 4\,\cot^2\left(\lambda^{1/4}\,\xi\right)\right] \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{8}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\,\cot^2\left(\lambda^{1/4}\,\xi\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\,\cot^2\left(\lambda^{1/4}\,\xi\right) \\ &= v_1(\xi)\,. \end{aligned}$$

De manera similar, usando la identidad

$$\tanh^2 \alpha + \coth^2 \alpha = 4 \coth^2 (2\,\alpha) - 2\,,$$

se establece que $u_6(\xi) = v_2(\xi)$.

De esta manera se puede concluir que el método extendido de la tangente hiperbólica no permite derivar nuevas soluciones del sistema (4.1) a las ya encontradas en [2]; así, las soluciones aparentemente nuevas son simplemente formas diferentes de soluciones ya conocidas.

Agradecimientos

Los autores agradecen al revisor del artículo por sus observaciones y sugerencias, las cuales contribuyeron a mejorar la presentación del mismo.

References

[1] C. A. Gómez and A. Salas, *Exact solutions for the generalized shallow water wave equation by the general projective Riccati equations method*, Bol. Mat. **XIII**(1), 50 (2006).

[2] C. A. Gómez, *Exact solutions for a new fifth–order integrable system*, Rev. Col. Mat. **40**, 119 (2006).

[3] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).

[4] M. Foursov and M. M. Maza, *On computer–assisted classification of coupled integrable equation*, J. Symb. Comput. **33**, 647 (2002).

[5] C. A. Gómez, *A new travelling wave solution of the Mikhailov–Novikov–Wang system using the extended tanh method*, Bol. Mat. **XIV**(1), 38 (2007).