

# Métodos matemáticos y computacionales en macroeconomía, por Álvaro Riascos Villegas

Miguel Espinosa\*

*Primera versión recibida en mayo de 2010; versión final aceptada en junio de 2010*

El libro de Riascos es un esfuerzo por presentar un tema complejo pero muy útil en términos de análisis económico. La temática abordada abarca desde conceptos matemáticos que sirven como herramientas para la resolución de modelos macroeconómicos, hasta la explicación de metodologías computacionales utilizadas para resolver tales modelos; además, recopila algunos de los trabajos más importantes en el área, con ejemplos y explicaciones propias del autor. El libro introduce diferentes metodologías de resolución de problemas de optimización dinámica, exponiendo el funcionamiento de los métodos y las razones del mismo. Aunque estos métodos son cada vez más comunes en la literatura económica no hay una presentación exhaustiva y unificada publicada en español que contenga los principales conceptos y explique de una manera amena y rigurosa su aplicabilidad; por esta razón es bastante probable que el texto de Riascos se constituya en un texto guía de cursos avanzados de economía y en una invaluable referencia para investigadores.

Los problemas de optimización dinámica no son nuevos en economía, desde hace tiempo los economistas se han preocupado por sus aplicaciones; sin embargo, es difícil entender por qué las metodologías de resolución de este tipo de problemas no son tan comunes como para ser enseñadas en cursos de pregrado y postgrado. Lo anterior podría explicarse dado que

---

\* Miguel Andrés Espinosa Farfán: Magíster en Economía de la Universidad de los Andes, profesor de las áreas de Microeconomía, Economía Matemática y Teoría de Juegos en la Universidad de los Andes. Dirección electrónica: migu-esp@uniandes.edu.co. Dirección postal: Carrera 1 No. 18<sup>a</sup>-10 Edificio W, oficina 907, Bogotá, Colombia. Reseña del libro: Riascos Villegas, Álvaro. *Métodos matemáticos y computacionales en macroeconomía*, Bogotá, Ediciones Uniandes, 155 p.

los avances en esta área no se dieron en el campo de la teoría económica —por mencionar un caso, el trabajo seminal de Bellman (1957) ha sido clasificado como un trabajo de la Investigación de Operaciones—; además, el entendimiento de tales métodos requiere un nivel matemático superior al enseñado en un pregrado de economía. Si bien los cursos de cálculo y algebra lineal aprendidos en el pregrado proveen conocimientos necesarios, la comprensión efectiva de tales mecanismos de resolución no es suficiente en estos casos.

Es de señalar que el libro de Riascos traza un puente entre la teoría económica y las matemáticas aplicadas, muchos economistas han mostrado la aplicación de los métodos a la teoría económica. Siguiendo la literatura, Riascos presenta las aplicaciones de estos métodos a problemas económicos. De manera acertada el autor reconoce la necesidad del lector de poner a prueba los conocimientos recién aprendidos, para tal efecto se proponen ejercicios al final de cada capítulo; sin embargo, la solución expuesta, carece de una explicación detallada de cada paso, de manera tal que las soluciones se vuelven complejas y extensivas para los menos hábiles, pero no por eso desmotivantes para los más adiestrados. Adicionalmente, el autor incluye un apéndice al final del libro para introducir las nociones básicas de análisis, topología y optimización, conceptos necesarios para un pleno entendimiento del libro y sus métodos, lo cual es valioso, no sólo porque hay un completo y riguroso resumen de las principales herramientas para entender el tratamiento del libro, sino porque las explicaciones son hechas desde lo más básico. Lo mejor del tratamiento matemático es que el autor ni le teme al uso de las matemáticas que son necesarias para una buena exposición del libro, ni escatima esfuerzos en la explicación de tales herramientas.

El libro se encuentra dividido en siete capítulos en los cuales el autor introduce los problemas de optimización dinámica en teoría económica, dos métodos de resolución matemática y algoritmos computacionales que los solucionan. El capítulo 1 menciona argumentos históricos que contextualizan al lector en la importancia de estudiar dinámicas en economía. Se presenta un modelo de crecimiento bastante general para que sirva de referente a lo largo del libro; en este modelo los consumidores deciden cuánto ahorrar y consumir. Posteriormente se muestran los dos

métodos para la resolución de este tipo de problemas: programación dinámica y método de Lagrange. El método de programación dinámica considera que en este problema cada periodo es matemáticamente idéntico, por lo que es susceptible de verse como un problema recursivo, el método de Lagrange tiene en cuenta la geometría del problema.

La mayoría de los modelos vistos en cursos de economía buscan una ecuación que determine la dinámica óptima de la variable de control. Por ejemplo, el método de Lagrange, Hamiltoniano y las condiciones de Euler. La programación dinámica soluciona el mismo problema por medios menos directos; en esta metodología se busca una función de política o función valor que determine la variable de control como una función de la variable de estado, de esta manera, el consumo es una función del capital. Usualmente estos modelos se solucionan a través de la ecuación de Bellman. Es de anotar que la función de política es suficientemente útil para describir, adecuada y completamente, el equilibrio de la economía de estudio; pero, además de la reducción de un problema dinámico a uno recursivo, también es importante saber que tal reducción puede no ser posible. Hasta aquí el método puede parecer trivial, pues parece que la metodología sólo permite expresar el problema de una manera diferente; sin embargo, como lo muestran Stockey y Lucas (1989) y el propio Riascos (2009), algunos problemas son más fáciles de solucionar a través de programación dinámica. Ésta es la razón principal por la cual es importante entender el método y conocer cuándo y por qué se debe sustituir o complementar con el método de Lagrange.

En el capítulo 2 se presenta un tratamiento formal del problema de optimización dinámico determinístico. El autor muestra un modelo que generaliza el modelo de crecimiento y de ciclos reales. En el modelo general, Riascos plantea la forma secuencial y funcional como alternativas para ver el problema; adicionalmente plantea supuestos sobre las formas y características necesarias en cada una de sus variables. A su vez, para solucionar una amplia gama de problemas de este tipo, se proponen demostraciones de teoremas de existencia y bondad de soluciones para las formas secuencial y funcional. Los principales resultados muestran en qué casos resulta más conveniente resolver los modelos de cierta manera y en qué casos es irrelevante la escogencia de una u otra formulación. El capítulo

también introduce formalmente la noción de función de política, condición no-Ponzi, dinámica factible, planes óptimos, entre otros conceptos.

El capítulo 3 introduce las propiedades y resultados más importantes de la función valor, el método de Lagrange, la relación entre el método de programación dinámica y dinámicas óptimas. Tal vez el principal resultado caracteriza los requisitos que aseguran concavidad y diferenciabilidad de la función valor; esto permite conocer con certeza si será posible usar herramientas básicas de cálculo para encontrar una solución. En cuanto al método de Lagrange, se define qué es una dinámica factible y se muestra bajo qué condiciones encontrar esta dinámica, permite hallar una solución al problema de optimización dinámico. A su vez, se demuestra de una manera intuitiva la derivación de las famosas ecuaciones de Euler y algunos resultados sobre estabilidad de trayectorias óptimas.

Hasta este capítulo del libro se ha supuesto que no hay incertidumbre, sin embargo, se observa claramente que en el mundo no se posee toda la información relevante (por ejemplo, en la agricultura las cosechas dependen del clima y las finanzas internacionales dependen de la tasa de cambio), el capítulo 4 introduce estos aspectos. Aunque existen diferentes maneras de modelar estos problemas, el autor propone un sencillo modelo en el cual los agentes maximizan la esperanza de la suma descontada de las utilidades, sujeto a una restricción dinámica donde la función de producción recibe *shocks* aleatorios. Adicionalmente, el capítulo muestra la utilización de la programación dinámica y el método de Lagrange para solucionar estos problemas. De manera acertada y enfática, se pone de manifiesto la incapacidad de calcular explícitamente la función valor para algunos casos particulares y la importancia de recurrir a métodos computacionales.

El capítulo 5 introduce uno de los métodos computacionales más comunes, conocido en la literatura como método lineal-cuadrático, su nombre indica que las restricciones son lineales y la función de retorno es cuadrática. En general, cualquier problema dinámico puede ser tratado bajo esta aproximación, realizando una transformación adecuada. Como es común en economía, las decisiones poseen un *trade-off* y esta transformación no es la excepción; la ventaja de este método es que en términos relativos es uno de los más sencillos; sin embargo, se presenta la pérdida de alguna de la información relevante. El capítulo también muestra

el proceso de convertir un problema de crecimiento en un problema lineal-cuadrático. De manera paralela es posible transformar el problema bajo el enfoque del método de Lagrange, para ello se introducen y comparan dos métodos, el de Blanchard y Kahn y el de Klein, haciendo evidente que el segundo es más general y más eficiente computacionalmente. El principal problema es que las funciones de política pueden resultar iguales para el caso estocástico y determinístico. En adición, al ser problemas lineales se pierde generalidad en el análisis, pues como algunos autores sostienen, existe una amplia gama de fenómenos económicos no-lineales.

El capítulo 6 explora la posibilidad de que las restricciones del problema no sean lineales. Se proponen tres diferentes métodos en los cuales el realismo económico, la complejidad y el tiempo de cálculo computacional aumentan. Si decidimos resolver el problema por medio de programación dinámica, el libro expone un algoritmo computacional que discretiza los espacios de los estados; si por el contrario, el investigador desea usar el método de Lagrange, el libro expone el método de aproximación lineal, de segundo orden y de expectativas parametrizadas.

El último capítulo cambia dos de los principales supuestos vistos hasta ahora, recursividad del problema y homogeneidad de los agentes. Ejemplos del primer supuesto son el conocido problema de Ramsey y los problemas con agentes restringidos por compatibilidad de incentivos. Adicionalmente, las decisiones de los agentes son simultáneas, lo que ocasiona que la decisión de un agente dependa de restricciones que a su vez dependen de las decisiones de otros agentes, lo que implica que no se debe solucionar un único problema. La manera más común de convertir un problema no recursivo en recursivo es introduciendo variables de estado al problema original. Además, es posible modificar el supuesto de que los agentes son iguales, permitiendo que estos posean funciones diferentes o que sean susceptibles de recibir choques individuales. El libro propone un algoritmo que vuelve discreto el espacio de los estados y uno que encuentra la función valor.

En suma el libro de Riascos es una excelente revisión del estado reciente del arte de este tipo de problemas, y permite a los interesados introducirse en el tema de una manera rigurosa y completa. A su vez el libro se constituirá en una herramienta fundamental, no sólo de referencia en investigación teórica y empírica, sino en una guía de clases teóricas avanzadas.

### **Bibliografía**

- LUCAS, Robert; STOKEY, Nancy and PRESCOTT, Edward (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge, Harvard University Press.
- RIASCOS VILLEGAS, Álvaro. *Métodos matemáticos y computacionales en macroeconomía*, Bogotá, Ediciones Uniandes, 155 páginas.