Topologías de Alexandroff: diferentes contextos

Alexandroff topologies: different contexts

Gustavo N. Rubiano O.[1,a], **José E. Robles**[2,b]

Resumen. Los espacios topológicos finitos son en particular espacios de Alexandroff; por tanto, todo estudio de los primeros tiene implicaciones en los segundos. Así que, estudiar la manera ubicua como los espacios de Alexandroff aparecen en la matemática (en forma de otras estructuras matemáticas no topológicas como, conjuntos ordenados, filtros, conjuntos, álgebra, etc.) es enriquecer la teoría de los espacios finitos, teoría que con creces ha demostrado su aplicabilidad en otros campos como el análisis de imágenes digitales y los gráficos por ordenador.

Palabras claves: Vecindades minimales, conjuntos parcialmente ordenados, espacios de Alexandroff, retículo de topologías, semigrupos.

Abstract. Alexandroff spaces have all the properties of finite spaces and therefore play an important role in digital topology, image analysis, and computer graphics. In this paper, starting with the classical equivalence between quasiordered sets and Alexandroff spaces, we present different other caracterizations of the class of Alexandroff topologies (i.e. topologies where the intersection of arbitrarily many open sets is open) obtained from the perspective (different contexts) of various mathematics structures as ordered sets, filters, topology, algebra, etc.

Keywords: Minimal neighborhoods, partially ordered sets, Alexandroff spaces, lattice of topologies, semigroups.

Mathematics Subject Classification: 54H15, 54H10, 20M30, 20M20, 06F05.

Recibido: junio de 2013 Aceptado: septiembre de 2013

1. Introducción

Una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X se llama de Alexandroff o $\mathcal{A}$-topología si es cerrada para intersecciones arbitrarias, es decir, aquellas donde la intersección arbitraria de abiertos es abierto. Al espacio $(X, \mathcal{T})$ lo llamamos de Alexandroff o $\mathcal{A}$-espacio. Notamos por $Top(X)$ a la colección de las topologías sobre X y por $\mathcal{A}(X)$ a la colección de las $\mathcal{A}$-topologías sobre X. Si X es finito $\mathcal{A}(X) = Top(X)$.

J. Steprans y S. Watson [12] atribuyen este concepto tanto a P. Alexandroff como a A. Tucker. La terminología para esta topología no ha sido estándar. Durante el siglo pasado este concepto recibió varios nombres, el primero de ellos

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[2]Departamento de Matemáticas, Escuela Colombiana de Ingeniería, Bogotá, Colombia
[a]gnrubianoo@unal.edu.co
[b]jose.robles@escuelaing.edu.co

dado por el propio Alexandroff como *espacio discreto*. Steiner [11] la llamó topología *principal*, Herrlich [3] *finitamente generada*, Lorrain [7] *saturada* y P. Johnstone se refirió a éstas topologías en [5] como de Alexandroff.

Los $\mathcal{A}$-espacios son exactamente los espacios topológicos para los cuales cada punto $a \in X$ está contenido en una vecindad $N(a)$ minimal (por contenencia) [7]. Dado un espacio topológico X el núcleo (*core*) de un punto es la intersección de sus vecindades. Los $\mathcal{A}$-espacios son exactamente los espacios para los cuales cada núcleo es abierto, y consecuentemente forman la menor de las bases. En este caso, para cada $a \in X$

$$N_a := \bigcap\{V_a \subseteq X : V_a \text{ es una vecindad abierta de } a\} = \text{ núcleo de } a.$$

Nótese que la única topología de Alexandroff que es T_1 es la topología discreta. Un espacio es llamado *localmente finito* si cada punto está contenido en un abierto finito. Todo espacio localmente finito es de Alexandroff [4]. Por supuesto, todo espacio finito es localmente finito, pero no todo conjunto localmente finito es finito. Consideremos la línea digital $\mathbb{Z}$ (topología de Khalimsky) la cual tiene como base las vecindades minimales $V(n)$: para $n \in \mathbb{Z}$, $V(n) = \{n\}$ si n es impar y $V(n) = \{n-1, n, n+1\}$ si n es par. Entonces $\mathbb{Z}$ es un espacio T_0–localmente finito el cual no es finito.

Los espacios de Alexandroff juegan un papel importante en el estudio del retículo de las topologías. En 1935, Alexandroff y Tucker inventaron de manera independiente un método general de construir topologías sobre preórdenes. Este método nos proporciona una de las primeras relaciones entre la estructura de orden y la estructura de topología (ver la sección 2), pues muestra una correspondencia uno a uno entre las topologías de Alexandroff con los preórdenes sobre un conjunto X dado. Posteriormente, Steiner en 1966 mostró que el retículo de las topologías de Alexandroff era anti-isomorfo al retículo de los preórdenes sobre X. En 1936, Garrett Birkhoff observó que inherente al estudio de la topología está la noción de comparar por contenencia dos topologías sobre un mismo conjunto. En su artículo [2], Birkhoff es el primero en estudiar detenidamente este orden en la colección $Top(X)$ de todas las topologías sobre el conjunto X, y muestra que se trata de un retículo completo.

Los espacios de Alexandroff también son usados en la teoría de las ciencias de la computación, y tienen importancia en el estudio de las topologías finitas para las matemáticas aplicadas. La aplicación de estos espacios en topología digital es discutida en [6].

Estas conexiones entre topología y matemáticas discretas sólo hasta ahora han comenzado a ser ampliamente reconocidas, debido en gran parte a la relación tradicional existente entre topología y análisis, en dónde el interés primordial concierne con los espacios de Hausdorff. Los espacios que no son de Hausdorff son los que comienzan a presentar interés para la teoría de la computación. De manera inherente, los computadores primordialmente interactuan con espacios finitos.

2. Visión clásica

Un *preorden* (o casi-orden) sobre un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva sobre X. Si la relación es además antisimétrica, la llamamos un *orden* *parcial.*

Una topología sobre un conjunto X es T_0 si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe una vecindad de uno de los puntos que excluye al otro.

Es bien conocido el hecho que la colección de los espacios de Alexandroff que son T_0 es equivalente categóricamente a la colección de los órdenes parciales [7]. En efecto, consideremos las dos construcciones siguientes.

(*Desde el orden a la topología*). Dado un conjunto preordenado $(X, \leq)$ la colección $\mathcal{B} = \{\uparrow x : x \in X\}$ de los filtros principales ($\uparrow x = \{y \in X : x \leq y\}$) es una base minimal para una topología sobre X. Esta topología, notada como $\mathcal{T}(\leq)$ es T_0 y de Alexandroff. (También se conoce como la AT-topología (Alexandroff-Tucker). Andima y Thron [1] la llamaron *segmento.*

(*Desde la topologia al orden*). De otra parte, cada espacio topológico lleva de manera intrínseca un preorden. Si $\mathcal{T}$ es una topología sobre X, definimos y asociamos el preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ en X, llamado *de especialización*, como $x \leq_{\mathcal{T}} y$ si y solo si $x \in \overline{\{y\}}$, es decir, $y \in V_x$ para toda vecindad V_x (y es *más especial* que x, ya que está contenido en más conjuntos abiertos).

$\leq_{\mathcal{T}}$ es una relación que es reflexiva y transitiva; esta construcción reversa el orden en el sentido que $\leq_{\mathcal{T}} \supseteq \leq_{\mathcal{G}}$ siempre que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}$. Dado un preorden $\mathcal{R}$ sobre X, existen, en general, muchas topologías $\mathcal{T}$ para las cuales $\leq_{\mathcal{T}} = \mathcal{R}$, pero $\leq_{\mathcal{T}}$ es la más fina de ellas. Este preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ es un orden parcial si y solo si el espacio X es T_0. (Es antisimetrico –y por tanto un orden parcial– si y solo si X es T_0.)

Si $(X, \leq)$ es un orden parcial y $\mathcal{T}(\leq)$ es su topología inducida en X, entonces el orden de especialización $\leq_{\mathcal{T}(\leq)}$ es el orden inicial $\leq$, es decir $\leq_{\mathcal{T}(\leq)} = \leq$. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Alexandroff, entonces la topología inducida por el orden de especialización es de nuevo la topología $\mathcal{T}$, es decir $\mathcal{T}(\leq_{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}$.

$$
\begin{array}{ccc}
Pre(X) & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) \\
\leq & \longmapsto & \mathcal{T}(\leq) \\
\trianglelefteq_{\mathcal{T}} & \longleftarrow & \mathcal{T}
\end{array}
$$

Las dos construcciones anteriores son categóricamente hablando un isomorfismo concreto entre la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados con funciones isótonas (i.e. preservan el orden) y la categoría de los espacios de Alexandroff con las funciones continuas. El isomorfismo inverso es establecido al restringir el functor de especialización $\leq_{\mathcal{T}}$, el cual olvida la estructura topológica y añade a cambio una estructura de orden.

3. Visión funcional

Dado un conjunto X por $\wp(X)$ o 2^X notamos la colección de sus subconjuntos. Por tanto, la clase $\mathcal{A}(funX) \subseteq (2^X)^X$ de funciones $f : X \to \wp(X)$ tales que:

1. Para todo $a \in X$ se tiene $a \in f(a)$,

2. Para todo $a, b \in X$ con $b \in f(a)$ se tiene $f(b) \subseteq f(a)$,

coincide con $\mathcal{A}$(X).

En efecto, existe una manera de asignar a cada función $f \in \mathcal{A}(funX)$ una $\mathcal{A}$-topología (y viceversa).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(funX) \subseteq (2^X)^X & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) \\ f & \longmapsto & \langle \{f(a) : a \in X\} \rangle \\ f(a) := N_a & \longleftarrow & \mathfrak{T} \end{array}$$

A cada f asignamos la topología generada por la base $\{f(a) : a \in X\}$ y a cada topología $\mathfrak{T}$ le corresponde la función f definida por $f(a) := N_a$ (la vecindad minimal).

La siguiente construcción ilustra una manera de crear funciones de este tipo. Sea $\alpha : X \longrightarrow X$ una función arbitraria. Entonces $\alpha^* : X \longrightarrow \wp(X)$

$$\alpha^*(x) := \{x\} \cup \alpha^{-1}(x) \cup \alpha^{-2}(x) \cup \cdots = \bigcup \{\alpha^{-n}(x) : n \geq 0\}$$

satisface los numerales 1 y 2 anteriores, y por tanto corresponde a una topología de Alexandroff sobre X.

4. Visión por filtros

Un filtro $\mathcal{F}$ para un conjunto X es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de X que satisface:

1. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
2. Si $F_1 \subseteq F$ y $F_1 \in \mathcal{F}$ entonces $F \in \mathcal{F}$.

Para cada filtro $\mathcal{F}$ sobre X y cada elemento fijo $p \in X$ definimos sobre X la topología $\mathcal{G}(p, \mathcal{F}) := \wp(X - \{p\}) \cup \mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ resulta ser un ultrafiltro entonces $\mathcal{G}(p, \mathcal{F})$ es llamada una ultratopología.

Una ultratopología generada por un ultrafiltro principal es llamada una *ultratopología principal*. Es decir, una ultratopología es principal si es de la forma $\mathcal{G}(x, \mathcal{U}\langle y \rangle)$, con $x, y \in X$, $x \neq y$, y $\mathcal{U}\langle y \rangle$ es el ultrafiltro principal generado por $\{y\}$, i. e., $\mathcal{U}\langle y \rangle = \uparrow y = \{F \subseteq X : y \in F\}$.

Una topología $\mathfrak{T}$ sobre X se dice *principal* si es discreta o es la intersección de ultratopologías principales, es decir,

$$\mathcal{J} = \bigcap \{\mathcal{G}(x, \mathcal{U}\langle y \rangle) : x \neq y\}.$$

Steiner [11] probó que esto es equivalente a requerir que la topología sea de Alexandroff.

Dado un retículo completo $(P, \leq)$ y $x \in P$ (un conjunto ordenado $(P, \leq)$ es un *retículo completo* si para todo subconjunto S de P existen $\bigvee S = \sup S$ y $\bigwedge S = \inf S$) decimos que x es un *infra-elemento* si el único elemento que precede a x es el mínimo de P; de manera dual, x es un *ultra-elemento* si el único elemento mayor a x es el máximo de P. De hecho, las ultratopologías son los ultraelementos del retículo $(Top(X), \subseteq)$.

Decimos que $Q \subseteq P$ es *sup–denso* en P si para cada elemento $s \in P$ existe un $A \subset Q$ tal que $s = \bigvee_P A$, (*todo elemento de* P *se puede aproximar por debajo por medio de elementos en* Q). El dual de sup–denso es inf–denso. P se dice atómico (anti-atómico) si el conjunto de los infraelementos (ultraelementos) es sup-denso (inf-denso).

El conjunto ordenado $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$ donde $\mathcal{A}(X)$ es la colección de todas las topologías de Alexandroff sobre X es un retículo completo cuyo mínimo es la topología indiscreta y cuyo máximo es la topología discreta. Este retículo es tanto atómico como anti-atómico. Con esta visualización por filtros se puede mostrar que si X es infinito entonces $\mathcal{A}(X)$ es de cardinalidad $2^{|X|}$.

5. Visión como subespacio de un espacio

Esta caracterización está basada en el trabajo pionero de S. Todorčević y C. Uzcátegui [10] al hacer un estudio sistemático de las topologías sobre $\mathbb{N}$ (o cualquier conjunto enumerable X), y generalizado posteriormente en [9].

Notemos que cada $A \subseteq X$ puede ser visto como una función característica $\chi_A : X \to \{0,1\}$. Así que el conjunto $\wp(X)$ de las partes de X se identifica con el conjunto de todas la funciones $2^X \approx \prod_{i\in X}\{0,1\}_i$.

Si dotamos a 2^X con la topología producto (donde $\{0,1\}_i$ es discreto) $\wp(X) \approx 2^X \approx \prod_{i\in X}$ lo llamamos *el cubo* 2^X.

El cubo 2^X es un espacio compacto, de Hausdorff, regular, totalmente desconectado, etc. Algunos conjuntos subbásicos: para cada $a \in X$, sean

$$a^+ := \{A \in 2^X : a \in A\} = \pi_a^{-1}(\{1\}),$$

$$a^- := \{A \in 2^X : a \notin A\} = \pi_a^{-1}(\{0\}).$$

Nótese que $a^+ = 2^X \setminus a^-$ con lo que cada abierto subbásico es también cerrado. Utilizando la notación de orden estándar, observamos que $a^+ = \{a\}^\uparrow$ donde $\theta^\uparrow = \{\phi \in \mathbb{P} : \theta \leq \phi\} = [\theta, \infty)$ para un conjunto $(\mathbb{P}, \leq)$ parcialmente ordenado.

Con esta identificación es posible ver una topología como un subconjunto del cubo $\prod_{i\in X}\{0,1\}_i$ y así decir que una topología $\mathcal{T}$ es abierta, cerrada, aberrada, compacta, etc. Por supuesto, una cosa es que el espacio $(X, \mathcal{T})$ sea compacto y otra que la topología $\mathcal{T}$ lo sea.

Una topología a su vez puede ser vista como un elemento en el espacio producto $2^{\mathcal{P}(X)}$. Dados dos elementos ϕ, θ de un conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P}$, los subconjuntos $\phi^\uparrow$ y $\theta^\downarrow$ definen los cerrados subbásicos para la *topología del orden* sobre $\mathbb{P}$. Así que la topología producto para $2^{\mathcal{P}(X)}$ contiene a la topología del orden. Nótese además que el espacio producto $2^{\mathcal{P}(X)}$ es tanto Hausdorff minimal como compacto maximal.

La función $\varphi : \prod_{i\in X}\{0,1\}_i \longrightarrow \wp(X)$ definida por $\chi_A \mapsto A$ es biyectiva y al considerar sobre $\wp(X)$ la topología final hacemos de φ un homeomorfismo. Con la ayuda de φ, la siguiente proposición nos muestra otra manera de obtener una base para 2^X.

Proposición 5.1. *En el retículo* $(\wp(X), \subseteq)$ *los intervalos cerrados*

$$[K, F] = \{A \in \wp(X) : K \subseteq A \subseteq F\}$$

con K *finito y* F *cofinito constituyen una base* $\mathcal{B}$ *para la topología producto en* 2^X.

Demostración. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base para la topología final $\mathcal{T}$ en $\wp(X)$. Para ello, mostremos primero que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Dado $[K, F] \in \mathcal{B}$, definimos $G_i = \{1\}$ si $i \in K$, $G_i = \{0\}$ si $i \in F^c$ y $G_i = \{0, 1\}$ si $i \in F - K$. Entonces $\varphi^{-1}([K, F]) = \prod_{i \in X} G_i$ que es un abierto básico en 2^X. Por tanto $[K, F] \in \mathcal{T}$ y así $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

Ahora mostremos que dado $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{U}$, existe $[K, F] \in \mathcal{B}$ tal que $A \in [K, F] \subseteq \mathcal{U}$. Sabemos que existe $[K, F] \in \mathcal{B}$ tal que $A \in [K, F] \subseteq \mathcal{U}$. Sean $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{U}$; existe $J \subseteq X$ finito tal que $\varphi^{-1}(A) \in \prod_{i \in X} G_i \subseteq \varphi^{-1}(\mathcal{U})$ con $G_i = \{1\}$ o $G_i = \{0\}$ si $i \in J$, y $G_i = \{0, 1\}$ si $i \in X - J$. Los conjuntos $K = \{i \in J : G_i = \{1\}\}$ y $L = \{i \in J : G_i = \{0\}\}$ son finitos y disjuntos y $\varphi^{-1}([K, F]) = \prod_{i \in X} G_i$ donde $F = L^c$. Por tanto $A \in [K, F] \subseteq \mathcal{U}$.

Finalmente, como φ es un homeomorfismo, $\mathcal{B}$ se puede ver como una base para la topología producto en 2^X. □

Ya que los intervalos en la proposición anterior se pueden reescribir como $[K, F] = \{A \in 2^X : K \subseteq A \;\&\; A \cap F^c = \varnothing\}$ (K es finito y F es cofinito), estos intervalos son subconjuntos aberrados (abiertos y cerrados) en 2^X pues se tiene

$$[K, F]^c = \left[\bigcup_{l \in F^c} [\{l\}, X]\right] \bigcup \left[\bigcup_{k \in K} [\varnothing, \{k\}^c]\right].$$

Teorema 5.2. *Sea $\mathcal{T}$ una topología para X. Las afirmaciones siguientes son equivalentes,*

(i) $\mathcal{T}$ es de Alexandroff.

(ii) $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ es un cerrado en el cubo 2^X.

Demostración. La demostración está basada en la siguiente caracterización de subconjunto cerrado de un espacio topológico X: $F \subseteq X$ es cerrado si dada una red $\{s_\alpha\}_{\alpha \in D}$ en F,

$$s_\alpha \to x \text{ implica } x \in F.$$

(i) $\Longrightarrow$(ii). Sea $\{A_\alpha\}_\alpha$ una red de abiertos en $\mathcal{T}$ que converge (en 2^X) a un conjunto A. Mostremos entonces que $A \in \mathcal{T}$.
Dado $x \in A$ consideremos su vecindad minimal N_x (ya que $\mathcal{T}$ es de Alexandroff). Es suficiente ver que $N_x \subseteq A$. Como $A_\alpha \to A$ y $x \in A$, existe un índice β tal que para todo $\alpha > \beta$ se tiene que $x \in A_\alpha$. Como cada A_α es abierto, entonces $N_x \subseteq A_\alpha$ para todo $\alpha > \beta$ y por tanto $N_x \subseteq A$.
(ii)$\Longleftarrow$(i). Sean $x \in X$ y A_α la red de todas las vecindades abiertas de x ordenadas por la contenencia inversa. Entonces $\{A_\alpha\}_\alpha$ converge (en 2^X) a $\bigcap A_\alpha$. Como $\mathcal{T}$ es un cerrado, $\bigcap A_\alpha \in \mathcal{T}$ y por tanto $\mathcal{T}$ es de Alexandroff. □

6. Visión algebraica

Definición 6.1. Un **semigrupo** $(S, \cdot)$ es un conjunto no vacío S junto con una operación $\cdot$ que es binaria y asociativa, $\cdot : S \times S \longrightarrow S$ con $(s, t) \mapsto s \cdot t$.

Sean $(S, \cdot)$ un semigrupo y $X \neq \varnothing$. S *actúa sobre el conjunto* X si existe una función $* : S \times X \longrightarrow X$ tal que $s_1 * (s_2 * x) = (s_1 \cdot s_2) * x$ para todo

$s_1, s_2 \in S, x \in X$. Si además S posee un elemento idéntico 1, entonces $1 * x = x$ para todo $x \in X$.

En caso que S no posea un elemento idéntico, S^1 denota al semigrupo obtenido de S al añadirle un elemento idéntico. Para cada $x \in X$, el efecto de S sobre un punto x, i. e., el conjunto $O_x = \{s * x : s \in S\}$ es la **órbita** de x. O_x está formado por los $y \in X$ tal que $y = s * x$, para algún $s \in S$.

Tenemos las siguientes propiedades:

1. Para $x, y \in X$ con $x \in O_y$ tenemos $O_x \subseteq O_y$.

2. Cada semigrupo $(S, \cdot)$ actúa sobre sí mismo utilizando su operación binaria $\cdot$.

3. Bajo esta acción, la órbita de un elemento $a \in S$ es el ideal principal $O_a = S \cdot a = \{s \cdot a : s \in S^1\}$.

6.1. Topologías provenientes de acciones de semigrupos

Sea S un semigrupo actuando sobre un conjunto X. Reemplazando a S por S^1 si es necesario, podemos asumir que S tiene elemento identidad, y así $x \in O_x$ para cada $x \in X$. A partir de las propiedades 1, 2 y 3 tenemos el siguiente teorema (para una demostración ver: [8], Proposition 4.1).

Teorema 6.2. *Sea S un semigrupo con elemento identidad (monoide) actuando sobre un conjunto X no vacío. La colección de las órbitas $\mathcal{B}(S) = \{O_x : x \in X\}$ es una base (consistente de todas las vecindades abiertas minimales) para una topología de Alexandroff $\mathcal{T}(S)$ sobre X.*

Sea $(S, \cdot, e)$ un monoide (e la unidad). Tenemos las siguientes propiedades:

- La relación binaria $\preceq$ definida sobre S por

$$s \preceq t \iff t = u \cdot s \quad \text{para algún} \quad u \in S$$

  define un preorden en S (I. A. Green, Z. Ross, 1952).

- Por tanto, induce una topología de Alexandroff $\mathcal{T}(\preceq)$ sobre S.

- Además, si S actúa sobre si mismo bajo $\cdot$, obtenemos a $\mathcal{T}(S)$.

- $$\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\preceq) \quad (O_s = \uparrow s).$$

La conexión entre semigrupos y preórdenes (llamados *a izquierda de Green*) es bien conocida por los algebristas, mientras que la equivalencia de los preórdenes y las topologías de Alexandroff es conocida por los topólogos.

De otra parte, las relaciones directas entre semigrupos y topologías principales han recibido menos atención. Como se muestra en [8], no toda topología principal sobre X proviene de una estructura de semigrupo sobre X via el preorden de Green. Por tanto, es válida la siguiente pregunta: ¿existe una correspondencia unívoca entre topologías principales sobre X y una colección de subgrupos de transformaciones sobre X apropiado? la respuesta es afirmativa como mostramos a continuación.

Dado $X \neq \varnothing$ la colección $Hom(X)$ de las funciones de X en X es un monoide al considerar como operación a $\circ$ (la composición usual de funciones) y como unidad a la función identidad $1_X(x) = x$ para cada $x \in X$.

Si $S \subseteq Hom(X)$ es un subsemigrupo, S actúa sobre X vía la función evaluación $\cdot : S \times X \longrightarrow X$ con $(f, x) \mapsto f(x)$.

6.2. De subsemigrupos a topologías

Dado un subsemigrupo $S \subseteq Hom(X)$, la topología $\mathcal{T}(S)$ sobre X es generada por la colección de órbitas

$$O_x = \{f(x) : f \in S\}$$

provenientes de la acción de S sobre X. Recuérdese que esta colección de órbitas forman una base minimal de vecindades abiertas,

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{S}ubsemigrupos(Hom(X)) & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) \\ S & \longmapsto & \mathcal{T}(S). \end{array}$$

Esta construcción no es inyectiva, una condición necesaria y suficiente para que lo sea es la siguiente: dos subsemigrupos S_1, S_2 de $Hom(X)$ generan la misma topología sobre X por medio de φ, i.e., $\mathcal{T}(S_1) = \mathcal{T}(S_2)$ si y sólo si las órbitas de sus acciones sobre X son iguales.

De suerte que para obtener la unicidad en la construcción debemos restringir el dominio de φ, i. e., por cada colección de subsemigrupos que generan cierta topología —$\varphi^{-1}(\mathcal{T}(S))$— escogemos al subsemigrupo maximal de esta colección (*subsemigrupo saturado*). ¿Qué subsemigrupos considerar?

Definición 6.3. Sea $X \neq \varnothing$. Un subsemigrupo $T \subseteq Hom(X)$ se dice *saturado* si,

(i) $1_X \in T$, donde $1_X(x) = x$ para todo $x \in X$ (identidad).

(ii) Si T actúa sobre X via la función evaluación, y para cada $x \in X$ $O_x^T = \{f(x) : f \in T\}$ es la órbita de x para esta acción, entonces

$$T = \{f \in Hom(X) : f(x) \in O_x^T, \text{ para cada } x \in X\}.$$

En otras palabras, no hay más funciones en $Hom(X)$ que envíen a cada x dentro de O_x^T que las pertenecientes a T.

Si $\mathcal{S}(X)$ denota la colección de todos los semigrupos saturados de $Hom(X)$, entonces la siguiente correspondencia es invectiva:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S(X) & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) \\ S & \longmapsto & \mathcal{T}(S). \end{array}$$

Ejemplo 6.4. Sean $X = \mathbb{R}$ y

$$T = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \leq x \text{ para cada } x \in \mathbb{R}\}.$$

T es un subsemigrupo saturado de transformaciones sobre $\mathbb{R}$. La topología $\mathcal{T}(T)$ sobre $\mathbb{R}$ es la topología generada por las colas $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

6.3. De topologías a subsemigrupos

Dada $\mathcal{T}$ una topología de Alexandroff sobre un conjunto X, sea N_x la vecindad minimal abierta para cada x. La colección de funciones

$$S(\mathcal{T}) = \{f \in Hom(X) : f(x) \in N_x \text{ para cada } x \in X\}$$

es un subsemigrupo saturado de $Hom(X)$. De suerte que tenemos una función $\lambda : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X)$ con $\mathcal{T} \mapsto S(\mathcal{T})$. Si permitimos que $S(\mathcal{T})$ actúe sobre X, para cada $x \in X$ la órbita $O_x = \{f(x) : f \in S(\mathcal{T})\}$ es precisamente la vecindad minimal, es decir, $O_x = N_x$.

La correspondencia es biunívoca. Las funciones

$$\varphi : \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(X) \quad \text{y} \quad \lambda : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X)$$

definidas por $\varphi(S) = \mathcal{T}(S)$ y $\lambda(\mathcal{T}) = S(\mathcal{T})$ son inversas la una de la otra:

$$\varphi(\lambda(\mathcal{T})) = \mathcal{T} \quad \& \quad \lambda(\varphi(S)) = S.$$

Esta correspondencia es un anti-isomorfismo, $(\mathcal{S}(X), \subseteq)$ es un retículo completo.

Así que, *las topologías de Alexandroff son subsemigrupos saturados de transformaciones.*

Ejemplo 6.5. Dado T subconjunto de $Hom(X)$, consideremos el subsemigrupo generado por T,

$$\langle T \rangle = \bigcap \{S : T \subseteq S \subseteq Hom(X),\ S \text{ es un subsemigrupo}\}.$$

$\langle T \rangle$ actúa sobre X via la función evaluación y genera así una topología principal $\mathcal{T}$ sobre X la cual corresponde a un único subsemigrupo saturado $\langle T \rangle_{sat}$. Para dar ejemplos, simplemente debemos tomar cualquier subconjunto $T \subseteq Hom(X)$.

Sean $X = \mathbb{Z}$ y $T = \{f_+, f_-\} \subseteq Hom(\mathbb{Z})$ con

$$f_+(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \text{ es impar} \\ x+1 & \text{si} \quad x \text{ es par} \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \text{ es impar} \\ x-1 & \text{si} \quad x \text{ es par} \end{cases}$$

$$\langle T \rangle_{sat} = \{f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid f(x) = x \text{ si } x \text{ es impar y}$$

$$f(x) \in \{x-1, x, x+1\} \text{ si } x \text{ es par}\}.$$

$\langle T \rangle_{sat}$ induce la topología de Khalimsky sobre $\mathbb{Z}$, para la cual $N_n = \{n\}$ si n es impar, y $N_n = \{n-1, n, n+1\}$ si n es par.

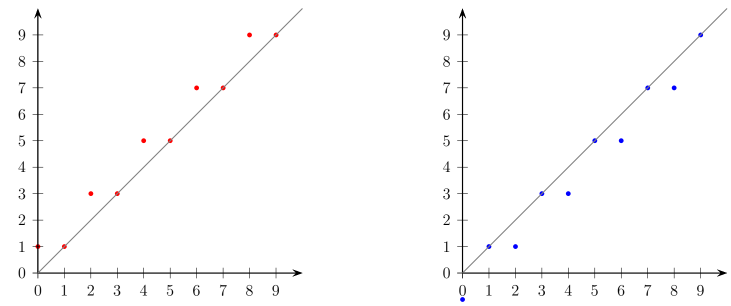

Figura 1: $T = \{f_+, f_-\}$.

Referencias

[1] S. Andima and W. J. Thron, *Order-induced topological properties*, Pacific Journal Of Mathematics **75** (1978), no. 2, 101–118.

[2] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Pubi, third edition, Rhode Island, NY, 1967.

[3] H. Herrlich, *Topologische reflexionen und coreflexionen*, Lecture Notes in mathematics, Springer, NY, 78.

[4] I. M. James, *Alexandroff spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **29** (1992), 475–481.

[5] P. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge University Press, London, 1986.

[6] Kopperman R. D. Khalimsky, E. and P. R. Meyer, *Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets*, Topology and its Appl. **36** (1990), 1–17.

[7] F. Lorraine, *Notes on topological spaces with minimun neighborhoods*, Amer. Math. Monthly. **76**, no. 6, 616–627.

[8] B. Richmond, *Semigroups and their topologies arising from green's left quasiorder*, Appl. Gen. Topol. **9**, no. 2, 143–168.

[9] Todorčević S. and Uzcátegui C., *Alexandroff topologies viewed as closed sets in the cantor cube*, Divulgaciones Matemáticas **13**, no. 1, 45–53.

[10] ______, *Analytic topologies over countable sets*, Top. and its Appl. **111**, no. 3, 299–326.

[11] A. K. Steiner, *The lattice of topologies: Structure and complementation*, Trans. Am. Math. Soc. **122**, no. 2, 379–398.

[12] J. Steprans and S Watson, *Topologische reflexionen und coreflexionen*, Springer, 2008.