Difusión no local vs. Difusión local

Non-local Diffusion vs. Local Diffusion

Mauricio Bogoya[1,a]

Resumen. Se estudia un modelo reescalado de difusión no local en $\mathbb{R}^N$. Se demuestra que la solución u_ϵ del modelo cuando ϵ tiende a cero converge a la solución v de la ecuación de medios porosos en $\mathbb{R}^N$, la cual es una ecuación de difusión local.

Palabras claves: Difusión no local, difusión local, medios porosos, reescalado, convergencia.

Abstract. We study a re-scaled nonlocal diffusion equation on $\mathbb{R}^N$. We show that the solution u_ϵ of the new model, when the parameter ϵ goes to zero, converges to the solution v of the porous medium equation on $\mathbb{R}^N$, which is a local diffusion equation.

Keywords: Nonlocal diffusion, local diffusion, porous medium, re-scaled, converges.

Mathematics Subject Classification: 35B40, 35K57, 45K05.

Recibido: enero de 2014 Aceptado: marzo de 2014

1. Introducción

La ecuación de medios porosos

$$v_t = A\Delta(v^m), \ en \ \mathbb{R}^N \times [0, \infty), \tag{1}$$

donde $m > 1$ y $A > 0$ son constantes, y $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el operador Laplaciano, aparece en muchas aplicaciones físicas, en las cuales, este modelo describe procesos de difusión o transferencia de calor. Otras aplicaciones aparecen en biología matemática, filtración de agua, problemas de fronteras libres y en otros campos. La ecuación (1) es un modelo de difusión local ya que la difusión dada por $\Delta(v^m)$ depende solamente de x. La ecuación (1) comparte algunas propiedades con la ecuación clásica del calor, pero una diferencia es que la ecuación (1), tiene la propiedad de propagación finita de la velocidad, esto es, si el dato inicial tiene soporte compacto entonces la solución tiene soporte compacto en cualquier instante $t > 0$, lo cual origina la existencia de frontera libre. Para mayor información sobre la ecuación (1) ver [1], [5].

Cortázar y otros en [4], estudian un modelo unidimensional de difusión no local. En este modelo, la función $u(x, t)$, representa la densidad de una

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]mbogoyal@unal.edu.co

población en la posición x en un instante t. $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función no negativa, suave, simétrica ($J(r) = J(-r)$), decreciente en $[0, 1]$, con soporte compacto en $[-1, 1]$ y $\int_{\mathbb{R}} J(r)dr = 1$. La distribución de probabilidad de saltar de la posición y a la posición x está dada por $J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right)\frac{1}{u(y,t)}$ cuando $u(y,t) > 0$ y 0 en otro lugar. En este caso la tasa en la que los elementos viajan a la posición x de otros lugares es $\int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right)dy$ y la tasa en la que ellos viajan de x a otros lugares es $-u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(x,t)}\right)dy$. Después de estas consideraciones, se obtiene que la densidad u satisface la ecuación

$$u_t(x,t) = \int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right)dy - u(x,t), \tag{2}$$

con dato inicial $u(x,0) = c + w_0(x)$, donde $c \geq 0$ y $w_0(x)$ es una función no-negativa en $L^1(\mathbb{R})$.

Se observa que el valor de u depende de x y de todos los valores cercanos a x, razón por la cual (2) es un modelo de difusión no local.

En [4] se estudia la existencia y unicidad, un principio de comparación y además se obtiene un comportamiento similar a la ecuación de medios porosos, donde las soluciones presentan la propiedad de propagación finita de la velocidad, lo cual origina el estudio de frontera libre.

Luego Cortázar y otros en [3], estudian el problema reescalado con $\epsilon > 0$, asociado a (2)

$$u_t(x,t) = \frac{1}{\epsilon^2}\left(\int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{\epsilon u(y,t)}\right)\frac{1}{\epsilon}dy - u(x,t)\right), \tag{3}$$

con dato inicial $u(x,0) = \delta + w_0(x)$, donde $\delta > 0$ y $w_0(x)$ es una función C^∞ con soporte compacto. En [3], se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.1. *Sea $w_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función no-negativa de soporte compacto y sea $\delta > 0$. Para cada $\epsilon > 0$ sea u_ϵ una solución de (3), con condición inicial $u(x,0) = u_0(x) = \delta + w_0(x)$. Sea v una solución de*

$$v_t = C(v^3)_{xx}$$

con condición inicial $v(x,0) = u_0(x) = \delta + w_0(x)$. Entonces

$$\lim_{\epsilon \to 0} u_\epsilon = v$$

en $L^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

Bogoya en [2], generaliza el problema (2) a dimensión $N \geq 1$, considera el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_t(x,t) =& \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right)u^{1-N\alpha}(y,t)dy - u(x,t) \text{ en } \mathbb{R}^N \times [0,\infty), \\ u(x,0) =& d + w_0(x) \text{ en } \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{4}$$

donde $d \geq 0$, $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $w_0 \geq 0$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{N}$ y $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función no negativa, suave, simétrica ($J(r) = J(-r)$), radialmente decreciente, con soporte compacto en la bola unitaria y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J(r)dr = 1$.

En [2], se estudia la existencia y unicidad de las soluciones de (4), un principio de comparación válido para las soluciones continuas. Además las soluciones de (4) presentan la propiedad de propagación finita de la velocidad.

El problema reescalado asociado a (4), para $\epsilon > 0$, está dado por

$$\begin{aligned}\epsilon^2 u_t(x,t) =& \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{\epsilon u^\alpha(y,t)}\right)\frac{u^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N}dy - u(x,t) \text{ en } \mathbb{R}^N \times [0,\infty),\\ u_\epsilon(x,0) =& d + w_0(x) \text{ en } \mathbb{R}^N.\end{aligned} \tag{5}$$

El objetivo de este trabajo es estudiar el límite reescalado

$$\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon, \tag{6}$$

donde u_ϵ es la solución de (5), con dato inicial $u_\epsilon = d + w_0(x)$, para $d > 0$, con $w_0(x)$ una función no negativa en C^∞ de soporte compacto.

2. Análisis de convergencia

Sea $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función positiva y suave. Para $\epsilon > 0$ y para $x = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ se define

$$L_\epsilon h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{y-x}{\epsilon h^\alpha(y)}\right)\frac{h^{1-N\alpha}(y)}{\epsilon^N}dy - h(x). \tag{7}$$

Haciendo el cambio de variable $z = \dfrac{y-x}{\epsilon}$, se obtiene

$$L_\epsilon h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{z}{h^\alpha(x+\epsilon z)}\right) h^{1-N\alpha}(x+\epsilon z)dz - h(x). \tag{8}$$

De (8), se tiene que

$$L_0 h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{z}{h^\alpha(x)}\right) h^{1-N\alpha}(x)dz - h(x) = 0. \tag{9}$$

Derivando (8) con respecto a ϵ, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dL_\epsilon h(x)}{d\epsilon} =& \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{z}{h^\alpha(x+\epsilon z)}\right)(1-N\alpha)h^{-N\alpha}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)dz\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}(-\alpha)\left(\nabla J\left(\frac{z}{h^\alpha(x+\epsilon z)}\right)\cdot z\right)h^{-\alpha-N\alpha}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)dz,\end{aligned} \tag{10}$$

donde ∇h es el vector gradiente de h. Evaluando (10) en $\epsilon = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left.\frac{dL_\epsilon h(x)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} =& \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{z}{h^\alpha(x)}\right)(1-N\alpha)h^{-N\alpha}(x)\left(\nabla h(x)\cdot z\right)dz\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}(-\alpha)\left(\nabla J\left(\frac{z}{h^\alpha(x)}\right)\cdot z\right)h^{-\alpha-N\alpha}(x)\left(\nabla h(x)\cdot z\right)dz.\end{aligned} \tag{11}$$

Haciendo el cambio de variable $w = \frac{z}{h^{\alpha}(x)}$, con $w_i = \frac{z_i}{h^{\alpha}(x)}$ para $i = 1, \cdots, N$ (la i-ésima componente de w), se tiene que

$$\begin{aligned}\left.\frac{dL_\epsilon h(x)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= (1-N\alpha)\int_{\mathbb{R}^N} J(w)h^{\alpha}(x)\left(\nabla h(x)\cdot w\right)dw \\ &\quad - \alpha\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla J\left(w\right)\cdot w\right)h^{\alpha}(x)\left(\nabla h(x)\cdot w\right)dw. \qquad (12)\end{aligned}$$

Como J es una función radialmente simétrica y de soporte compacto, después de aplicar integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} a &= \int_{\mathbb{R}^N} J(w)w_i dw = 0, \quad i = 1,\ldots,N, \\ b &= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial J(w)}{\partial w_i} w_i^2 dw = -2\int_{\mathbb{R}^N} J(w)w_i dw = 0,\ i = 1,\ldots,N, \\ c &= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial J(w)}{\partial w_i} w_i w_j dw = -\int_{\mathbb{R}^N} J(w)w_j dw = 0,\ i \neq j = 1,\ldots,N. \qquad (13)\end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en (12), se tiene que

$$\left.\frac{dL_\epsilon h(x)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0. \qquad (14)$$

Derivando (10) con respecto a ϵ, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d^2\ L_\epsilon h(x)}{d\epsilon^2} &= (N^2\alpha^2 - N\alpha)\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{z}{h^{\alpha}(x+\epsilon z)}\right) \\ &\qquad\qquad \times h^{-N\alpha-1}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)^2 dz \\ &\quad + (1-N\alpha)\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{z}{h^{\alpha}(x+\epsilon z)}\right) h^{-N\alpha}(x+\epsilon z)(zH_h z^t)dz \\ &\quad + (2N\alpha^2+\alpha^2-\alpha)\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla J\left(\frac{z}{h^{\alpha}(x+\epsilon z)}\right)\cdot z\right) \\ &\qquad\qquad \times h^{-\alpha-N\alpha-1}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)^2 dz \\ &\quad - \alpha\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla J\left(\frac{z}{h^{\alpha}(x+\epsilon z)}\right)\cdot z\right) h^{-\alpha-N\alpha}(x+\epsilon z)(zH_h z^t)dz \\ &\quad + \alpha^2\int_{\mathbb{R}^N} zH_J z^t h^{-2\alpha-N\alpha-1}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)^2 dz, \qquad (15)\end{aligned}$$

donde z^t es el vector transpuesto de z y $H_h,\ H_J$ son las la matrices hessianas de h y J respectivamente. Evaluando (15) en $\epsilon = 0$ y haciendo el cambio de variables $w = \frac{z}{h^{\alpha}(x)}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2\ L_\epsilon h(x)}{d\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0} &= (N^2\alpha^2 - N\alpha)h^{2\alpha-1}(x)I_1 + (1-N\alpha)h^{2\alpha}(x)I_2 \\ &+ (2N\alpha^2+\alpha^2-\alpha)h^{2\alpha-1}(x)I_3 + (-\alpha)h^{2\alpha}(x)I_4 + \alpha^2 h^{2\alpha-1}(x)I_5, \qquad (16)\end{aligned}$$

donde

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^N} J(w)\left(\nabla h(x)\cdot w\right)^2 dw, \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^N} J(w)(wH_h w^t)dw,$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla J(w)\cdot w\right)\left(\nabla h(x)\cdot w\right)^2 dw, \quad I_4 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla J(w)\cdot w\right)(wH_h w^t)dw,$$

$$I_5 = \int_{\mathbb{R}^N} wH_J w^t \left(\nabla h(x)\cdot w\right)^2 dw.$$

Además, como J tiene soporte compacto, después de aplicar integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned}
l &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial J(w)}{\partial w_i} w_i^3 dw = -3\int_{\mathbb{R}^N} J(w)w_i^2 dw,\ i = 1,\dots,N,\\
e &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial J(w)}{\partial w_j} w_i^2 w_j dw = -\int_{\mathbb{R}^N} J(w)w_i^2 dw, j \neq i = 1,\dots,N,\\
m &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 J(w)}{\partial w_i^2} w_i^4 dw = 12\int_{\mathbb{R}^N} J(w)w_i^2 dw,\ i = 1,\dots,N,\\
p &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 J(w)}{\partial w_i \partial w_j} w_i^3 w_j dw = 3\int_{\mathbb{R}^N} J(w)w_i^2 dw,\ j \neq i = 1,\dots,N,\\
q &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 J(w)}{\partial w_j w_k} w_i^2 w_j w_k dw = \int_{\mathbb{R}^N} J(w)w_i^2 dw,\ j \neq k \neq i = 1,\dots,N,\\
r &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 J(w)}{\partial w_j^2} w_i^2 w_j^2 dw = 2\int_{\mathbb{R}^N} J(w)w_i^2 dw,\ j \neq i = 1,\dots,N. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Sea

$$C = \int_{\mathbb{R}^N} J(w)w_i^2 dw.$$

De (13 a), tenemos que $I_1 = C\|\nabla h(x)\|^2,\ \ I_2 = C\Delta h(x)$, para cada sub-índice $i = 1,\dots,N$.
De (17, l, e), tenemos que $I_3 = (-2-N)C\|\nabla h(x)\|^2,\ I_4 = (-2-N)C\Delta h(x)$, ya que aparecen $(N-1)$ términos tipo e, para cada sub-índice $i = 1,\dots,N$.
De (17 m, p, q, r), tenemos que $I_5 = (N^2+5N+6)C\|\nabla h(x)\|^2$, ya que aparecen $(N-1)$ términos tipo p, $(N^2-3N-2)/2$ términos tipo q y $(N-1)$ términos tipo r, para cada sub-índice $i = 1,\dots,N$.
En resumen, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2\ L_\epsilon h(x)}{d\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0} =& C(N^2\alpha^2 - N\alpha)h^{2\alpha-1}(x)\|\nabla h(x)\|^2 + C(1-N\alpha)h^{2\alpha}(x)\Delta h(x)\\
&+ C(2N\alpha^2+\alpha^2-\alpha)(-2-N)h^{2\alpha-1}(x)\|\nabla h(x)\|^2\\
&+ C(2\alpha+N\alpha)h^{2\alpha}(x)\Delta h(x)\\
&+ C\alpha^2(N^2+5N+6)h^{2\alpha-1}(x)\|\nabla h(x)\|^2. \qquad (18)
\end{aligned}$$

De donde se puede concluir que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2\ L_\epsilon h(x)}{d\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0} &= C2\alpha(2\alpha+1)h^{2\alpha-1}(x)\|\nabla h(x)\|^2 + C(2\alpha+1)h^{2\alpha}(x)\Delta h(x)\\
&= C\Delta\left(h^{2\alpha+1}(x)\right). \qquad (19)
\end{aligned}$$

Nota 2.1. Derivando (15) con respecto a ϵ, tenemos que $\frac{d^3}{d\epsilon^3}T_\epsilon h(x)$ es igual a

$$
\begin{aligned}
&= (-N^3\alpha^3 + N\alpha)\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{z}{h^\alpha(x+\epsilon z)}\right) h^{-N\alpha-2}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)^3 dz \\
&+ (3N^2\alpha^2 - 3N\alpha)\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{z}{h^\alpha(x+\epsilon z)}\right) \\
&\qquad\qquad \times h^{-N\alpha-1}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)(zH_h z^t)dz \\
&+ (1-N\alpha)\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{z}{h^\alpha(x+\epsilon z)}\right) h^{-N\alpha}(x+\epsilon z)D(zH_h z^t)dz \\
&+ (-3N^2\alpha^3 - 4N\alpha^3 + 1)\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla J\left(\frac{z}{h^\alpha(x+\epsilon z)}\right)\cdot z\right) \\
&\qquad\qquad \times h^{-\alpha-N\alpha-2}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)^3 dz \\
&+ (6N\alpha^2 + 3\alpha^2 - 3\alpha)\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla J\left(\frac{z}{h^\alpha(x+\epsilon z)}\right)\cdot z\right) \\
&\qquad\qquad \times h^{-\alpha-N\alpha-1}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)(zH_h z^t)dz \\
&- \alpha\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla J\left(\frac{z}{h^\alpha(x+\epsilon z)}\right)\cdot z\right) h^{-\alpha-N\alpha}(x+\epsilon z)D(zH_h z^t)dz \\
&+ (-3N\alpha^3 - 3\alpha^3)\int_{\mathbb{R}^N}(zH_J z^t)h^{-2\alpha-N\alpha-2}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)^3 dz \\
&+ 3\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}(zH_J z^t)h^{-2\alpha-N\alpha-1}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)(zH_h z^t)dz \\
&- \alpha^3\int_{\mathbb{R}^N} D(zH_J z^t)h^{-3\alpha-N\alpha-2}(x+\epsilon z)\left(\nabla h(x+\epsilon z)\cdot z\right)^3 dz. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

El siguiente lema es muy importante para nuestro análisis de convergencia.

Lema 2.2. *Sea $d > 0$ y $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función suave tal que $h(x) \geq d$. Entonces*

$$L_\epsilon h(x) = A\Delta\left(h^{2\alpha+1}(x)\right)\epsilon^2 + R(x,\epsilon),$$

donde $R(x,\epsilon) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $A = \frac{C}{2}$ con $C = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J(w)w_i^2 dw$, para algún $i = 1,\ldots,N$.

Demostración. Sea $f(\epsilon) = L_\epsilon h(x)$. Desarrollando a f en un polinomio de Taylor de grado 2 alrededor de $\epsilon = 0$, se tiene que

$$f(\epsilon) = f(0) + f'(0)\epsilon + \frac{1}{2}f''(0)\epsilon^2 + R(x,\epsilon).$$

De (9), (14) y (19), se tiene que

$$L_\epsilon h(x) = A\Delta\left(h^{2\alpha+1}(x)\right)\epsilon^2 + R(x,\epsilon),$$

donde el residuo $R(x,\epsilon)$ está dado por

$$R(x,\epsilon) = \frac{1}{2}\int_0^\epsilon \frac{d^3}{ds^3}T_s h(x)(\epsilon - s)^2 ds.$$

$\square$

Nota 2.3. Para el caso unidimensional $N = 1$ y $\alpha = 1$, se tiene que el Lema 2.2 coincide con el Teorema 1.1 obtenido en [3].

A continuación estudiaremos el Teorema de convergencia.

Teorema 2.4. *Sea $w_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ una función no-negativa de soporte compacto y sea $d > 0$. Para cada $\epsilon > 0$, sea u_ϵ una solución de (5), con condición inicial $u(x,0) = u_0(x) = d + w_0(x)$. Sea v una solución de*

$$v_t = A\Delta(v^{2\alpha+1}), \ \text{en } \mathbb{R}^n \times [0,\infty),$$

con condición inicial $v(x,0) = u_0(x) = d + w_0(x)$. Entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon = v$$

en $L^1(\mathbb{R}^N \times [0,\infty))$.

Demostración. En [2] se puede ver que el problema (5) tiene una única solución u_ϵ, además se tiene un principio de comparación para las soluciones de (5). Por el Lema 2.2, se tiene que

$$\begin{aligned} v_t(x,t) = A\Delta(v^{2\alpha+1}) &= \frac{1}{\epsilon^2}(L_\epsilon v(x,t) + R(x,t,\epsilon)) \qquad (21)\\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{y-x}{\epsilon v^\alpha(y,t)}\right)\frac{v^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N}dy - v(x,t)\right) + \frac{1}{\epsilon^2}R(x,t,\epsilon), \end{aligned}$$

como $w_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ es una función no-negativa de soporte compacto, se tiene

$$\|R(x,t,\epsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le K\epsilon^3,$$

para todo $0 \le t \le T$, donde K es una constante independiente de ϵ. Sean $\overline{w}$, $\underline{w}$, soluciones de

$$\overline{w}_t = \frac{1}{\epsilon^2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{y-x}{\epsilon \overline{w}^\alpha(y,t)}\right)\frac{\overline{w}^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N}dy - \overline{w}(x,t)\right) + \frac{1}{\epsilon^2}|R(x,t,\epsilon)|,$$

y,

$$\underline{w}_t = \frac{1}{\epsilon^2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{y-x}{\epsilon \underline{w}^\alpha(y,t)}\right)\frac{\underline{w}^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N}dy - \underline{w}(x,t)\right) - \frac{1}{\epsilon^2}|R(x,t,\epsilon)|,$$

con datos iniciales $\overline{w}(x,0) = \underline{w}(x,0) = d + w(x,0)$, respectivamente.
Por principio de comparación, se tiene que

$$\underline{w}(x,t) \le v(x,t) \le \overline{w}(x,t),$$
$$\underline{w}(x,t) \le u_\epsilon(x,t) \le \overline{w}(x,t).$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}(\overline{w}(x,t) - \underline{w}(x,t))dx \\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{y-x}{\epsilon\overline{w}^\alpha(y,t)}\right)\frac{\overline{w}^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N} - J\left(\frac{y-x}{\epsilon\underline{w}^\alpha(y,t)}\right)\frac{\underline{w}^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N}dy\,dx \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon^2}\int_{\mathbb{R}^N}(\overline{w}(x,t) - \underline{w}(x,t))dx + \frac{2}{\epsilon^2}|R(x,t,\epsilon)|. \qquad (22) \end{aligned}$$

Como J es una función radialmente decreciente, por el Teorema de Fubini, tenemos que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{y-x}{\epsilon\overline{w}^{\alpha}(y,t)}\right)\frac{\overline{w}^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N} - J\left(\frac{y-x}{\epsilon\underline{w}^{\alpha}(y,t)}\right)\frac{\underline{w}^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N}dydx \quad (23)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{y-x}{\epsilon\overline{w}^{\alpha}(y,t)}\right)\frac{\overline{w}^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N} - J\left(\frac{y-x}{\epsilon\underline{w}^{\alpha}(y,t)}\right)\frac{\underline{w}^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N}dxdy.\end{aligned}$$

Haciendo los cambios de variables $z = \frac{y-x}{\epsilon\overline{w}^{\alpha}(y,t)}$ y $\eta = \frac{y-x}{\epsilon\underline{w}^{\alpha}(y,t)}$ y teniendo en cuenta que $\int_{\mathbb{R}^N} J(r)dr = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \left(J\left(\frac{y-x}{\epsilon\overline{w}^{\alpha}(y,t)}\right)\frac{\overline{w}^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N} - J\left(\frac{y-x}{\epsilon\underline{w}^{\alpha}(y,t)}\right)\frac{\underline{w}^{1-N\alpha}(y,t)}{\epsilon^N}\right)dx\ dy\\ = \int_{\mathbb{R}^N}(\overline{w}(y,t)-\underline{w}(y,t))dy. \qquad (24)\end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en (21), se tiene que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}(\overline{w}(x,t)-\underline{w}(x,t))dx = \frac{2}{\epsilon^2}|R(x,t,\epsilon)|.$$

Por consiguiente

$$\frac{d}{dt}\|\overline{w}(\cdot,t)-\underline{w}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq 2K\epsilon,$$

de lo cual, se deduce que

$$\|\overline{w}(\cdot,t)-\underline{w}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0,\ \textit{cuando}\ \epsilon\to 0,$$

y por lo tanto

$$u_\epsilon \to v,\ \textit{cuando}\ \epsilon \to 0.$$

□

Referencias

[1] D. G. Aronson, *The porous medium equation*, Lecture Notes in Math (A. Fasano and M. Primicerio, eds.), vol. 1224, Springer Verlag, 1986.

[2] M. Bogoya, *A nonlocal nonlinear diffusion equation in higher space dimensions*, J. Math. Anal. Appl. **344** (2008), 601–615.

[3] C. Cortázar, M. Elgueta, S. Martinez, and J. D. Rossi, *Random walks and the porous medium equation*, Revista de la Unión Matemática Argentina **50** (2009), no. 2, 149–155.

[4] C. Cortázar, M. Elgueta, and J. D. Rossi, *A non-local diffusion equation whose solutions develop a free boundary*, Ann. Henri Poincaré **6** (2005), no. 2, 269–281.

[5] J. L. Vazquez, *An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation*, Shape optimization and free boundaries (M.C.Delfour eds, ed.), Dordrecht, Boston and Leiden, 1992, pp. 347–389.