

## REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

*Universidad de Nariño*

*Volumen XIV'N° 1 (2018), páginas 49–57*

# Modelamiento para el número de muones en función de la energía y el ángulo de entrada del protón incidente.

Gabriel Ortega<sup>1</sup>  
Jhon Revelo<sup>2</sup>

Abstract.

This paper presents the result of the statistical analysis produced by simulation carried out by CORSIKA program which simulates extended atmospheric showers. These showers are produced by the interaction of cosmic rays with the atmosphere. The simulation was modified in a way that it counts the number of muons generated by the atmospheric shower, modifying the energy and the angle of incidence of cosmic primary ray.

*Keywords.* muons, Cosmic Rays, CORSIKA.

Resumen.

En este trabajo se presenta el resultado del análisis estadístico generado por la simulación realizada en el programa CORSIKA, el cual, simula cascadas atmosféricas extendidas que son producto de la interacción de rayos cósmicos con las partículas que componen la atmosfera. Se modificó la simulación, de tal forma que contabilice el número de muones que se generan en cada cascada atmosférica, variando la energía y el ángulo de incidencia del rayo cósmico primario.

*Palabras Clave.* muones, rayos cósmicos, CORSIKA.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Se denominan rayos cósmicos primarios a las partículas que inciden en la atmósfera terrestre procedente del espacio, compuestos principalmente de protones. La energía con la que llegan estas partículas es muy variada, va desde energías inferiores a los TeV, a grandes energías superiores a los  $10^{20} eV$  [1], las cuales, superan a la energía de las partículas producidas por cualquier acelerador en el mundo. Tras interactuar con un núcleo atmosférico, producen una cascada de partículas compuesta por rayos  $\gamma$ , electrones, muones, neutrinos, hadrones,

---

<sup>1</sup>Gabriel Ortega: Estudiante de física, Universidad de Nariño, Colombia.e-mail: gabrielortega550@gmail.com

<sup>2</sup>Jhon Revelo: Estudiante de física, Universidad de Nariño, Colombia.e-mail: jhonrevelo22@gmail.com

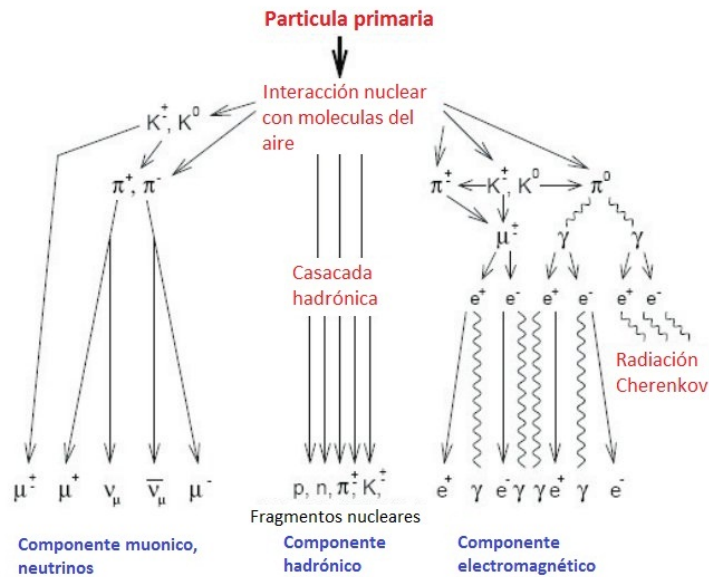


Figura 1: Componentes de una EAS (extended air shower) generadas por la interacción de los rayos cósmicos con las capas altas de la atmósfera terrestre.

etc, que son los llamados rayos cósmicos secundarios. Las partículas secundarias colisionan con partículas de la atmósfera, dando origen a nuevas partículas. Este proceso se repite generando una cascada, en la cual se pierde energía con cada interacción, hasta que alcanza una energía límite que impide nuevas interacciones. En cada cascada puede generarse alrededor de  $10^{11}$  partículas [2]. La mayoría de las partículas que alcanzan la superficie terrestre son muones procedentes de interacciones nucleares. Las componentes de una cascada atmosférica se pueden ver en la figura 1.

Los muones atmosféricos producidos por los rayos cósmicos son una de las formas naturales de radiación a la que estamos expuestos diariamente. El muón es una partícula elemental, lo que significa que no se descompone en otras partículas. No existe de forma permanente en el universo, pues su existencia es muy efímera (2,2 microsegundos). Hasta las últimas décadas, su estudio se centraba en entender su origen y propiedades, pero actualmente se están utilizando estas partículas para realizar tomografías de grandes estructuras como las pirámides de Egipto, observar la estructura interna de volcanes y también se utilizan a los muones para detectar material nuclear escondido en grandes contenedores.

La masa del muón es muy pequeña, pero casi 200 veces mayor que la del electrón: 0,106 GeV. Debido a su alta masa, los muones tienen gran capacidad de penetración, son capaces de penetrar la roca varios metros antes de detenerse. Aunque muchos se crean en las capas altas de la atmósfera, pueden atravesarla hasta alcanzar la superficie de la tierra. Su flujo no es muy grande (alrededor de un muón por centímetro cuadrado por minuto al nivel del mar), pero nos llegan continuamente.

Pese a los grandes avances tecnológicos en lo que respecta a los rayos cósmicos, aún quedan muchas preguntas por resolver, como por ejemplo ¿cuáles son sus fuentes?, ¿cómo pueden adquirir semejantes energías?, ¿cómo se propagan en el espacio antes de llegar a la Tierra?, entre otros, que darán paso a nuevas investigaciones.

Nuestro objetivo es obtener un modelo estadístico que explique la variable número de muones en función de los factores ángulo de entrada y energía del protón incidente. Y como objetivos específicos nos planteamos realizar:

- Determinar para que ángulo de incidencia del protón se genera un mayor número de muones.
- Determinar el cambio del número de muones en función de la energía

Para la realización de este proyecto se utilizaran los datos de muones generados a partir de una simulación que se realizó en el programa CORSIKA [3] el cual se especializa en simular cascadas atmosféricas extendidas, producto de la interacción de rayos cósmicos en la atmósfera.

Para obtener un modelo significativo que explique los datos se hará uso del paquete estadístico STATGRAPHICS que nos facilita las herramientas para la generación del modelo, en el cual se tiene como variable dependiente el NUMERO DE MUONES GENERADOS y como variables independientes el ÁNGULO DE INCIDENCIA del protón y la ENERGÍA de entrada del mismo.

Este artículo tiene origen en el informe final del diplomado Métodos Estadísticos para la investigación en ciencias básicas y tecnológicas, de la Universidad de Nariño finalizado en noviembre de 2017.

## 2. PROBLEMA

Para empezar se realizó un análisis descriptivo de los datos obtenidos, con el fin de obtener más de información acerca del problema, para esto empleamos el programa STATGRAPHICS, con el cual se realizó un análisis multivariado para los datos a diferentes energías y ángulos y se obtuvo la tabla 1.

Energía	5 Tev				10 Tev				100 Tev			
Ángulo	0°	30°	45°	60°	0°	30°	45°	60°	0°	30°	45°	60°
Recuento	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
Promedio	234,8	193,8	116,6	59,8	701,1	528,6	303,1	152,5	43431,4	30447,7	15335	4691,1
Des. Estandar	163,4	117,9	74,1	30,4	447,1	335,0	176,8	90,8	23751,3	20231,5	10098,7	3322

Tabla 1: Análisis estadístico de los datos obtenidos.

En la tabla 1 encontramos que se realizaron 200 ensayos para cada valor del ángulo esta información la podemos observar en la fila del Recuento. Se puede observar en el valor de los promedios en el número de muones tiende a aumentar con la energía, también se observa un mayor número de muones para el ángulo 0° que para los otros ángulos.

Con la información obtenida en esta tabla se planteó el uso de la tabla ANOVA y la prueba de múltiples rangos para cada variable y así determinar si las diferencias encontradas en la tabla 1 son significativas, para realizar este proceso se empleó el programa STATGRAPHICS para obtener la siguiente información:

TABLA ANOVA PARA ÁNGULO					
Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado medio	Razón-f	Valor-P
Entre grupos	5.99E+10	3	2.00E+10	77.64	0
Itra grupos	6.16E+11	2396	2.57E+08		
Total (Corr.)	6.76E+11	2399			

Tabla 2: tabla ANOVA para la variable Número de muones en función del ángulo.

ANÁLISIS DE GRUPOS HOMOGÉNEOS			
Ángulo	Casos	Media	Grupos Homogéneos
60	600	163.47	X
45	600	5251.56	X
30	600	10390	X
0	600	14789.1	X

Tabla 3: tabla de análisis de la prueba de múltiples rangos de Fisher

- Variable **ÁNGULO**.

Para esta variable se obtuvieron las tablas 2 y 3 junto con el la figura 2.

Dado que el "VALOR-P" en la tabla 2 es igual a cero podemos concluir que existe un cambio significativo en el número de muones al variar el ángulo de entrada, esta variación puede verificarse en la tabla 3 que nos muestra las diferencias entre las medias de los datos para ángulo.

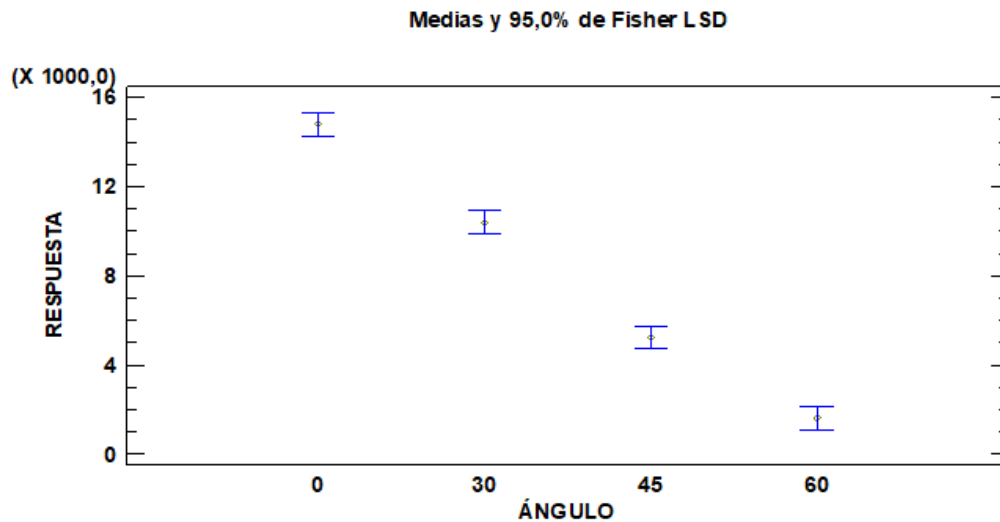


Figura 2: gráfico de medias para el número de muones (RESPUESTA) en función del ángulo.

- Variable **ENERGÍA**.

Modelamiento para el número de muones en función de la energía y el ángulo de entrada del protón incidente.

Para esta variable se obtuvieron las tablas 4 y 5 junto con el la figura 3.

TABLA ANOVA PARA ENERGÍA					
Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Entre grupos	2.87E+11	2	1.43E+11	882.58	0
Intra grupos	3.90E+11	2397	1.63E+08		
Total (Corr)	6.76E+11	2399			

Tabla 4: tabla ANOVA para la variable Número de muones en función de la energía.

ANÁLISIS DE GRUPOS HOMOGÉNEOS			
Energía	Casos	Media	Grupos Homogéneos
5	800	151.274	X
10	800	421.34	X
100	800	23476.3	X

Tabla 5: tabla de análisis de la prueba de múltiples rangos de Fisher

Dado que el "VALOR-P" en la tabla 4 es igual a cero podemos concluir que existe un cambio significativo en el promedio de muones al variar la energía de entrada, sin embargo, en la tabla 5 podemos ver que los grupos correspondientes a la energía de 5 y 10 TEV son homogéneos, lo que significa que no existe una diferencia significativa entre estos grupos, por lo tanto concluimos la variable número de muones depende significativamente de la energía pero se necesitaría cambios mayores a 5 TEV en la energía para poder apreciar un cambio significativo en el número de muones.

Se encontraron diferencias significativas entre el Número de muones y las variables Ángulo y Energía se planteó hallar un modelo de regresión que relacione a la variable Número de muones con la Energía y el Ángulo, inicialmente esto se realizó para cada variable por separado para tener una mejor comprensión de como varia la variable respuesta con la variación de cada factor, estos fueron los resultados:

- Modelo para la variable **ÁNGULO**.

Para la creación de un modelo de regresión se utilizó el programa de STATGRAPHICS y la herramienta relacionar, esta herramienta nos brinda la posibilidad de escoger entre varios modelos alternativos en función del R-cuadrada.

Dado que el valor R-Cuadrada para los diferentes modelos es muy bajo concluimos que no se puede ajustar un modelo de regresión para la variable número de muones en función del ángulo.

- Modelo para la variable **ENERGÍA**.

Para la creación de un modelo de regresión se utilizó el programa de STATGRAPHICS y la herramienta relacionar, esta herramienta nos brinda la posibilidad de escoger entre varios modelos alternativos en función del R-cuadrada.

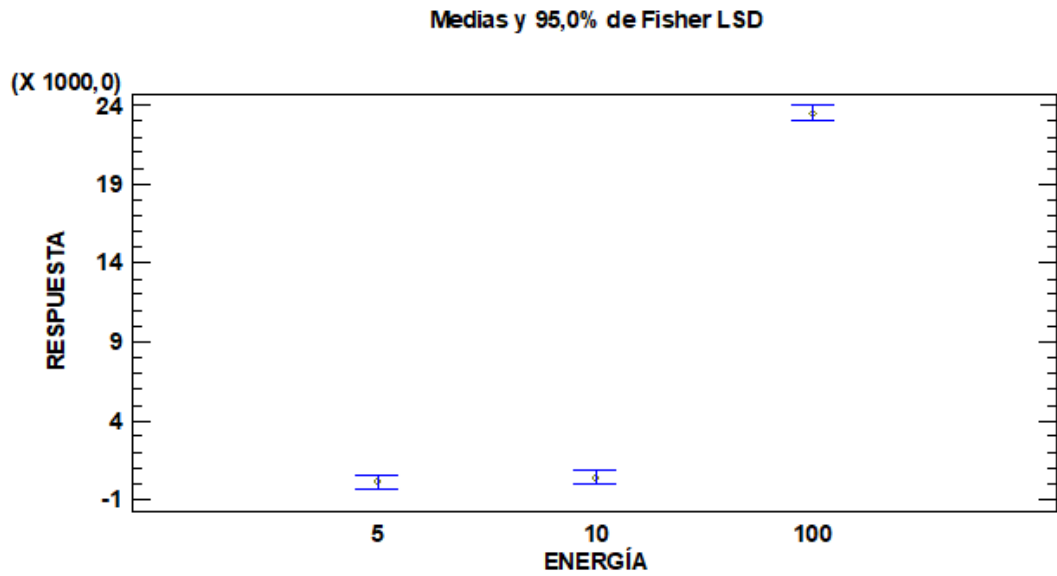


Figura 3: gráfico de medias para el número de muones (RESPUESTA) en función del energía.

Tabla de Modelos Alternos		
Modelo	Correlación	R-Cuadrada
Inversa-Y cuadrado-X	0.379	14.36 %
Inversa de Y	0.3352	10.24 %
Cuadrado de X	-0.2929	8.58 %
Lineal	-0.2927	8.57 %
Inversa-Y Raíz Cuadrada-X	0.2839	8.06 %

Tabla 6: tabla de modelos alternos para número de muones en función del ángulo.

Tabla de Modelos Alternos		
Modelo	Correlación	R-Cuadrada
Multiplicativa	0.9224	85.07 %
Logarítmico-Y Raíz Cuadrada-X	0.9197	84.59 %
Exponencial	0.9132	83.39 %
Log-Y Cuadrado-X	0.9071	82.29 %
Curva S	-0.8628	74.44 %

Tabla 7: tabla de modelos alternos para número de muones en función de la energía.

A diferencia de la anterior variable los modelos para energía tienen valores de R-Cuadrado superiores al 80 % por lo que se puede crear un modelo que exprese significativamente la variabilidad de los datos, dado que el modelo “Multiplicativo” tiene el mayor valor R-Cuadrado se seleccionó este y se obtuvo el siguiente modelo:

$$\text{Número de muones} = \exp(2,0566 + 1,63174 * \ln(\text{ENERGÍA})) \quad (2.1)$$

Con los siguientes parámetros:

Coefficiente de Correlación = 0,922359.  
R-cuadrada = 85,0745 %.  
R-cuadrado (ajustado para g.l.) = 85,0683 %.  
Error estándar del est. = 0,875526.  
Error absoluto medio = 0,711073.  
Estadístico Durbin-Watson = 0,720284 (P=0,0000).  
Autocorrelación de residuos en retraso 1 = 0,639129.

De estos parámetros es importante resaltar el valor “R-cuadrada” que nos dice el porcentaje de variabilidad de los datos explicada por el modelo, dado que este parámetro tiene un valor de 85.0745 % se concluye que el modelo obtenido es estadísticamente significativo y puede utilizarse para realizar predicciones entre la variable número de muones y la variable energía.

Una vez observada la relación que tiene el Numero de muones con cada factor se procedió a encontrar un modelo de regresión lineal múltiple que contenga ambas variables independientes, Angulo y Energía, para esto se empleó la herramienta relacionar del programa STATGRAPHICS usando la opción de “selección paso hacia atrás” y se encontró el siguiente modelo:

$$\text{Número de Muones} = 5898,71 + 250,27 * \text{ENERGÍA} - 221,51 * \text{ÁNGULO} \quad (2.2)$$

Con los siguientes parámetros:

R-cuadrada = 50,9225 %.  
R-cuadrado (ajustado para g.l.) = 50,8816 %.  
Error estándar del est. = 11767,8.  
Error absoluto medio = 7460,65.  
Estadístico Durbin-Watson = 1,3199 (P=0,0000).  
Autocorrelación de residuos en retraso 1 = 0,339695.

De estos parámetros es importante resaltar el valor “R-cuadrada”, nos dice el porcentaje de variabilidad de los datos explicada por el modelo, dado que este parámetro tiene un valor de 50.9225 % se concluye que este modelo no es estadísticamente significativo y no puede usarse para realizar predicciones de los datos. Además presenta un valor negativo multiplicando al ángulo lo cual indica que podría existir un valor negativo para el número de muones y esto en la práctica es imposible de que suceda, por estas razones descartamos este modelo.

Debido a que el modelo de regresión lineal múltiple no nos permite modelar satisfactoriamente hemos optado por usar un modelo de regresión de Poisson, esto con

el fin de obtener un modelo de dos variables que pueda explicar una buena parte de la variabilidad de los datos, para esto se usó la herramienta relacionar del programa STATGRAPHICS, usando un modelo de Poisson de primer orden con las 2 variables se obtuvo el siguiente modelo:

$$\text{Número de muones} = \exp(5,994 + 0,04782 * \text{ENERGÍA} - 0,0264 * \text{ÁNGULO}) \quad (2.3)$$

Con los siguientes parámetros:

Porcentaje de desviación explicado por el modelo = 84,789.

Porcentaje ajustado = 84,789.

El estadístico porcentaje de desviación explicado por el modelo es similar al valor R-cuadrada habitual que hemos venido trabajando, por lo tanto se puede decir que este modelo explica el 84,78 % de la variabilidad de los datos y puede considerarse como un modelo estadísticamente significativo y usarse para realizar predicciones.

### 3. CONCLUSIONES

- Se concluye del análisis que el número de muones varía significativamente con respecto a las variaciones del ángulo de entrada y la energía.
- Se encontró que no es posible crear un modelo de regresión lineal múltiple significativo que nos diga a variación del número de muones en función del ángulo y la energía.
- Encontramos que se genera un mayor número de muones cuando el ángulo de entrada es igual a 0° o sea perpendicular a la atmósfera.
- No se pudo determinar el cambio del número de muones en función de la energía debido a la falta de datos, pero se concluye que se necesita una variación mayor de 5 TeV para poder obtener grupos no homogéneos.
- El modelo de regresión de Poisson explica satisfactoriamente un 84 % por ciento de la variabilidad de los datos y podría ser usado en futuras investigaciones y para realizar predicciones acerca del número de muones encontrados.



## Referencias

- [1] THOMAS K. GAISSER, TODOR STANEV. High-energy Cosmic Rays. arXiv:astro-ph/0510321. 2005. [49](#)
- [2] R. A. MILLIKAN AND G. H. CAMERON. High frequency rays of cosmic origin iii measurements in snow-fed lakes at high altitudes. Physical Review, 28(5):851-868 1926. [50](#)
- [3] J. RODRIGUEZ. Simulación de un detector de partículas segmentado para muones atmosféricos. 2016 [51](#)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA  
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

*e-mail:* gabrielortega550@gmail.com

*e-mail:* jhonrevelo22@gmail.com