El tablero de ajedrez

Por: Ricardo Cedeño Tovar*
Tarquino Efren Collazos**
Johany Ramírez Salazar***

El profesor DINO SEGURA en una reciente visita a nuestra Universidad ilustrando una situación planteó el siguiente problema:

¿Cuántos cuadrados tiene un tablero de ajedrez?

Una respuesta inmediatamente e incompleta es: por lo menos 64, ya que el tablero de ajedrez es un cuadrado de 8 x 8 casillas cuadradas, 32 negras y 32 blancas.

Una composición, por ejemplo, de 4 casillas ubicadas en la siguiente forma:

También es un cuadrado (independientemente del color de las casillas)

* Profesor Titular Universidad Surcolombiana - Magister en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
** Estudiante Especialización en Educación Matemática - Universidad Surcolombiana.
*** Estudiante Especialización en Educación Matemática - Universidad Surcolombiana

Con un poco de paciencia siguiendo este procedimiento y con cuidado terminamos nuestro arduo trabajo, pero podríamos tener alguna duda en nuestras cuentas si por casualidad a otra persona le da un resultado diferente.

Así que podríamos repetir el conteo de nuevo y esperar que nuestro "nuevo" resultado coincida con el encontrado anteriormente.

Empezando con el cuadrado de lado dos, recorremos las dos filas superiores del tablero de ajedrez, iniciando el recorrido, de izquierda a derecha encontramos siete cuadrados. Más explícitamente, si numeramos las dos filas superiores del tablero de ajedrez de la siguiente forma:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16

Encontramos que las casillas 1, 2, 9 y 10 forman un cuadrado, lo mismo ocurre con: 2, 3, 10, 11; 3, 4, 11, 12; 4, 5, 12, 13; 5, 6, 13, 14; 6, 7, 14, 15; y 7, 8, 15, 16.

Puesto que de manera vertical la situación es la misma, tenemos un total de 7 x 7 cuadrados de lado 2 en el tablero de ajedrez.

Considerando los cuadrados de lado tres, en las tres filas superiores podríamos numerar las casillas:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24

y encontramos que las siguientes agrupaciones de casillas 1, 2, 3, 9, 10, 11, 17, 18, 19; 2, 3, 4, 10, 11, 12, 18, 19, 20; 3, 4, 5, 11, 12, 13, 19, 20, 21; 4, 5, 6, 12, 13, 14, 20, 21, 22; 5, 6, 7, 13, 14, 15, 21, 22, 23; 6, 7, 8, 14, 15, 16, 22, 23, 24; forman cuadrados de lado tres. Es decir que tendríamos 6 x 6 cuadrados de lado tres.

Bueno, en este momento tenemos:

8 x 8 cuadrados de lado uno
7 x 7 cuadrados de lado dos
6 x 6 cuadrados de lado tres

Es lógico pensar en los términos que siguen:

5 x 5 cuadrados de lado cuatro
4 x 4 cuadrados de lado cinco
3 x 3 cuadrados de lado seis
2 x 2 cuadrados de lado siete
1 x 1 cuadrados de lado ocho

Por lo tanto tenemos que el tablero de ajedrez (un cuadrado de lado ocho) tendrá:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 \text{ cuadrados}$$

Aquí, podemos aventurarnos a conjeturar que un cuadrado de lado n tiene:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 \text{ cuadrados}$$

Asumamos que un cuadrado de lado k, $1 \leq k \leq n$ tiene $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2$ cuadrados donde i^2 es el número de cuadrados de lado $(k - i + 1)$.

Luego para un cuadrado de lado $k + 1$, tenemos que habrían $(k + 1)^2$ cuadrados más, ya que tendríamos $k \times k$ cuadrados de lado dos, puesto que de manera horizontal k variaría desde 2 hasta $k + 1$, de lado $k + 1$ hay un sólo cuadrado así tenemos que hay $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2$ cuadrados de lado $k + 1, k, \ldots, 2$, faltarían los $(k + 1)^2$ cuadrados de lado uno, en fin hay $1^2 + 2^2 + \ldots + (k + 1)^2$ cuadrados en un cuadrado de lado $k + 1$.

El proceso que hemos descrito hasta aquí, es tal que partimos de un problema particular (averiguar el número de cuadrados que tiene un tablero de ajedrez) y lo hemos generalizado para un tablero de ajedrez de lado n.

Nuestros estudiantes de matemáticas deben estar interesados en este tipo de argumentos, de pronto logramos que algunos estudiantes de los colegios se interesen.

La idea básica es mostrar caminos para satisfacer algunas curiosidades y dejar abiertas otras preguntas, tales como: ¿Podríamos mostrar otro argumento para llegar a la conclusión que tenemos?

¿La expresión $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ puede ser escrita de otra forma?

¿Cuál sera la respuesta, si pedimos que los cuadrados sean disyuntos?

Bibliografía

Cómo Plantear y Resolver Problemas. G. Polya. Editorial Trillas. México 1995.

La solución de Problemas. UNO Revista de Didáctica de las matemáticas. No 8. Año III, abril 1996

Ex - Libris. Jorge Torres.