Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VII No. 1 (2000), pp. 19–28

NOCIONES EQUIVALENTES DE CATEGORÍAS TOPOLÓGICAS

VÍCTOR M. ARDILA DE LA PEÑA
JOSÉ R. MONTAÑEZ PUENTES
CARLOS RUIZ SALGUERO

RESUMEN. La topología categórica puede considerarse como el estudio de la generalización del funtor olvido de la estructura de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los conjuntos.

En este artículo presentamos una definición de categoría topológica equivalente a la dada en Adamek-Herrlich-Strecker [2] y algunas relaciones con la propuesta por Preuss[6]. Para tal efecto usamos los conceptos de fidelidad, fibro–completez, levantamientos iniciales de 1–fuentes y levantamientos finales de 1–sumideros. Posteriormente se presentan algunos ejemplos conocidos que consideramos de interés y en los cuales usamos esta definición equivalente. Se mencionan entre otras, las relacionadas con los espacios uniformes, espacios de proximidad, cribas en una categoría y subobjetos en una categoría.

Abstract. In this paper we set up an equivalent definition of a topological category with respect to the definition in Adamek-Herrlich-Strecker (see[2]), Later, we give some known and interesting examples using this equivalent definition.

Keywords Topological functor, topological category, faithfulness, fribre – completeness, initial lifts of 1–sources, final lifts of 1–sinks, sieves.
2000 AMS Sub. class. 18D30.

(*) Trabajo recibido 7/02/01, revisado 4/05/01. V. ardila, R. Montañéz, C. Ruiz, Profesores Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia; e–mail: viardila@hotmail.com, montanez@matematicas.unal.edu.co.

1. Introducción

En esta nota se demuestra que la noción de funtor topológico F dada en Adameck-Herrlich y Strecker [2] equivale a que el funtor F sea fiel, admita un único levantamiento F–inicial (F–final) para cada 1–fuente (1–sumidero) F–estructurado y que sus fibras sean retículos completos.

Esta noción se compara también con la dada en Preuss [6]. Ahora, es conocido el hecho que esta definición implica la dada en Adameck [2] para el caso en que el codominio del funtor en cuestión es la categoría de los conjuntos; sin embargo, no toda categoría topológica sobre los conjuntos y según [2] lo es según [6]; para ver esto se hace uso de la categoría que llamaremos $Set - Rel$ cuyos objetos son pares de la forma (X, ρ) donde X es un conjunto y ρ es una relación en X y cuyos morfismos entre los objetos (X, ρ) y (Y, σ) son funciones que preservan las relaciones.

Al final se mencionan ejemplos de categorías topológicas que ilustran la definición equivalente hallada.

Para las definiciones de funtor fiel, funtor amnésico, fuente, sumidero, 1-fuentes, 1-sumidero y completez en la fibra, nos basamos en Adameck [2], secciones 5.1 a 5.8, 10.57, 10.58, 21.1 a 21.12 y 21.36.

2. Una definición alternativa equivalente de funtor topológico

Diremos que un funtor $F : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ es C–topológico o que la pareja $(\mathcal{E}, F)$ es C–topológico sobre $\mathcal{B}$, si y solo si,

a) F es fiel
b) Toda 1–fuente F estructurada en $\mathcal{B}$ tiene un único levantamiento F–inicial (estructura inicial) ver [1].
c) Todo 1–sumidero F estructurado en $\mathcal{B}$ tiene un único levantamiento F–final (estructura final) ver [1).
d) Toda fibra es retículo completo.

Probaremos enseguida que esta definición equivale a la dada en Adameck [2] para funtor topológico.

Teorema 2.1. *$(\mathcal{E}, F)$ es categoría topológica sobre $\mathcal{B}$, si y solo si, $(\mathcal{E}, F)$ es C–topológica sobre $\mathcal{B}$.*

Demostración. Si $(\mathcal{E}, F)$ es categoría topológica sobre $\mathcal{B}$, entonces ella es C–topológica por 21.3, 5.3 a 5.8 en [2]. Recíprocamente, sea $(\mathcal{E}, F)$ categoría C–topológica sobre $\mathcal{B}$; probaremos que toda fuente F–estructurada $(Y, f_j)_{j\in J}$ en $\mathcal{B}$ $(f_j : Y \to F(X_j))$ tiene un único levantamiento F–inicial. Por (b) de la definición de C–topológica, para cada $j \in J$, existe un objeto Y

y existe una flecha $g_j : Y_j \to X_j$ en $\mathcal{E}$ tales que $F(Y_j) = Y$ y $F(g_j) = f_j$ y (Y_j, g_j) cumple la propiedad universal inicial.

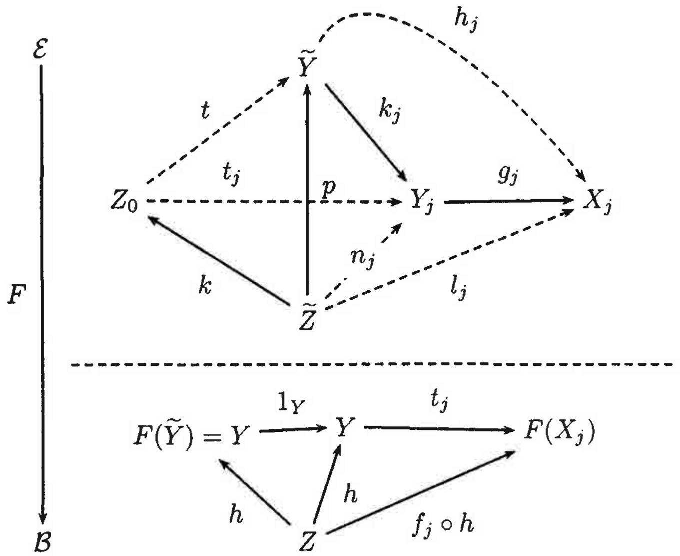
Como por (d), $(\mathrm{Fib}_F(Y), \leq)$ es un retículo completo, entonces existe un objeto $\widetilde{Y}$ en $\mathcal{E}$ tal $\widetilde{Y}$ es el ínfimo de los Y_j. Este se denotará como $\widetilde{Y} = inf(Y_j)_J$. Entonces, para cada $j \in J$, existe una flecha $k_j : \widetilde{Y} \to Y_j$ en $\mathcal{E}$ tal que $F(k_j) = 1_Y$; sea $h_j := g_j \circ k_j$. Por tanto, $F(h_j) = f_j$ para cada $j \in J$. Probemos que $(\widetilde{Y}, h_j : \widetilde{Y} \to X_j)_J$ es un levantamiento F–inicial para $(Y, f_j : Y \to F(X_j))$. Para ello basta demostrar que es una fuente inicial en $\mathcal{E}$. Supongamos que se tiene un objeto $\widetilde{Z}$ en $\mathcal{E}$ y una flecha $h : Z \to Y$ en $\mathcal{B}$ con $Z = F(\widetilde{Z})$ tal que para cada $j \in J$, $F(h_j) \circ h$ es un $\mathcal{E}$–morfismo para F. Esto es, existe una única flecha $l_j : \widetilde{Z} \to X_j$ con $F(l_j) = (h_j) \circ h = f_j \circ h$. Como para cada $j \in J$, (Y_j, g_j) satisface la propiedad universal inicial, entonces para cada $j \in J$ existe una flecha $n_j : \widetilde{Z} \to Y_j$ en $\mathcal{E}$ tal que $F(n_j) = h$ y $g_j \circ n_j = l_j$.

Ahora, la flecha $h : Z \to Y$ da origen al 1–sumidero F–estructurado (Z, h) en $\mathcal{B}$ ya que $Y = F(\widetilde{Y}) = F(Y_j)$ para cada $j \in J$; por lo tanto, por (c) de la definición de C–topológica, existe un único levantamiento F-final $(\widetilde{Z}; k : \widetilde{Z} \to Z_o)$ en $\mathcal{E}$ para (Z, h). En consecuencia, $F(k) = h$ y $F(Z_o) = Y$ y así h es un $\mathcal{E}$–morfismo para F_j; pero obviamente $h = 1_Y \circ h = 1_Y \circ F(k) = 1_Y \circ F(n_j)$ para $j \in J$; así (por la definición de levantamiento F–final) para cada $j \in J$ existe una flecha $t_j : Z_o \to Y_j$ tal que $F(t_j) = 1_Y$ y $t_j \circ k = n_j$. Por lo tanto, en $(\mathrm{Fib}_F(Y), \leq)$ tenemos que para cada $j \in J$, $Z_o \leq Y_j$. Como $\widetilde{Y} = inf(Y_j)_J$, entonces $Z_o \leq \widetilde{Y}$ lo cual da origen a una flecha $t : Z_o \to \widetilde{Y}$ en $\mathcal{E}$ con $F(t) = 1_Y$. Sea $p : \widetilde{Z} \to \widetilde{Y}$ dada por $p = t \circ k$; así $F(p) = F(t) \circ F(k) = 1_Y \circ h = h$.

Más aún, para cada $j \in J$, $F(h_j \circ p) = f_j \circ h = F(l_j)$, así por la fidelidad de F, $h_j \circ p = l_j$. Por tanto, $h = F(p)$ es un $\mathcal{E}$–morfismo para F, $h_j \circ p = l_j$ y $F(h_j \circ p) = f_j \circ h = F(l_j)$ para cada $j \in J$, como se deseaba.
Para la unicidad de tal levantamiento, supongamos que $(\widetilde{W}, w_j : \widetilde{W} \to X_j)_J$ es otro levantamiento F–inicial para $(Y, f_j)_J$. Entonces, observando que para $j \in J$, $F(h_j) = f_j = F(w_j) \circ 1_Y$, entonces existe una flecha $u : \widetilde{Y} \to \widetilde{W}$ tal que $F(u) = 1_Y$ y para $j \in J$, $w_j \circ u = h_j$. Similarmente observamos que para cada $j \in J$, $F(w_j) = f_j = F(h_j) \circ 1_Y$, existe una flecha $u : \widetilde{W} \to \widetilde{Y}$ tal que $F(u) = 1_Y$ y para cada $j \in J$, $h_j \circ u = w_j$. Por tanto en $(\mathrm{Fib}_F(Y), \leq)$, $\widetilde{Y} \leq \widetilde{W}$ y $\widetilde{W} \leq \widetilde{Y}$, por tanto $\widetilde{Y} = \widetilde{W}$. Así, por la fidelidad de F y como para cada $j \in J$, $F(h_j) = f_j = F(w_j)$, entonces $h_j = w_j$. □

3. Relaciones de esta definición con la dada por Preuss.

En Preuss [6] sección 1.1 se tiene otra definición de categoría topológica. Esta incluye una categoría concreta sobre la categoría de los conjuntos *Set*, más



la existencia de estructuras iniciales, pequeñez en la fibra y propiedad del separador terminal. Denotemos esta clase de categorías por categorías Pr–topológicas. Es inmediato que cualquier categoría Pr–topológica es topológica en el sentido de [2] y por tanto C–topológica. Sin embargo, lo recíproco no es cierto: por ejemplo, consideremos la categoría $Set - Rel$ (esta categoría es diferente de la categoría Rel mencionada en [5], página 26), cuyos objetos son pares (X, ρ) con $\rho \subset X \times X$, cuyos morfismos entre dos objetos (X, ρ) y (Y, σ) son ternas (f, ρ, σ) donde $f : X \to Y$ es una función tal que $(a, b) \in \rho$ implica $(f(a), f(b)) \in \sigma$ y cuya ley de composición entre morfismos (f, ρ, σ) y (g, σ, τ) se da mediante $(g \circ f, \rho, \tau)$. Ahora consideremos el funtor de olvido usual $U : Set - Rel \to Set$. Veamos primero que $(Set - Rel, U)$ es una categoría topológica.

Sea X un conjunto y $(X, f_i : X \to U(Y_i, \rho_i))_I$ una fuente U–estructurada con I una clase y $U(Y_i, \rho_i) = Y_i$ para cada $i \in I$. Para cada $x, y \in X$, definimos $(x, y) \in \rho$, si y solo si, para cada $i \in I$ $(f_i(x), f_i(y)) \in \rho_i$. Es claro que (X, ρ) es un objeto de $Set - Rel$ y que para cada $i \in I$, (f_i, ρ, ρ_i) es un morfismo en $Set - Rel$. Probemos que $((X, \rho), (f_i, \rho, \rho_i) : (X, \rho) \to (Y_i, \rho_i))_I$ es un levantamiento U–inicial para la fuente U–estructurada $(X, f_i : X \to U(Y_i, \rho_i))_I$.

Sea (Z, α) un objeto en $Set - Rel$ y $g : Z \to X$ cualquier función. Supongamos que para cada $i \in I$, $U(f_i, \rho, \rho_i) \circ g$ es un $Set - Rel$–morfismo para U, esto es para cada $i \in I$, $f_i \circ g$ es un $Set-Rel$-morfismo para U. Veamos que g es un $Set-Rel$-morfismo para U. Por hipótesis, para cada $i \in I$, existe un morfismo $(h_i, \alpha, \rho_i) : (Z, \alpha) \to (Y_i, \rho_i)$ tal que $h_i = U(h_i, \alpha, \rho_i) = f_i \circ g$. Si $(a, b) \in \alpha$, entonces para cada $i \in I$, $((f_i \circ g)(a), (fi \circ g)(b)) \in \rho_i$, por lo tanto, para cada $i \in I$, $(f_i(g(a)), f_i(g(b)) \in \rho_i$. Así, por la definición de ρ, $(g(a), g(b)) \in \rho$. Por lo tanto (g, α, ρ) es un morfismo en $Set-Rel$. Así, g es un $Set-Rel$ morfismo para U.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que $((X, \ \gamma), (k_i, \ \gamma, \ \rho_i) : (X_i, \gamma) \to (Y_i, \ \rho_i))_I$ es otro levantamiento U-inicial para $(X, \ f_i)_I$. Si consideramos $((X, \rho), (f_i, \rho, \rho_i))_I$ como un levantamiento U-inicial y la función identidad $1_X : X \ \to X$, entonces para cada $i \in I$, $U(k_i, \rho, \rho_i) = k_i = f_i = f_i \circ 1_X = U(f_i, \rho, \rho_i) \circ 1_X$. Por lo tanto 1_X es un $Set-Rel$ morfismo para U, así existe un morfismo $(1_X, \rho, \gamma) : (X, \rho) \to (X, \gamma)$ en $Set-Rel$, tal que, $U(1_X, \rho, \gamma) = 1_X$. Similarmente, si consideramos $((X, \gamma), (k_i, \gamma, \rho_i))_I$ como un levantamiento U-inicial y la función identidad 1_X, entonces para cada $i \in I$, $U(f_i, \rho, \rho_i) = f_i = f_i \circ 1_X = U(k_i, \gamma, \rho_i) \circ 1_X$. Por lo tanto 1_X es un $Set-Rel$ morfismo para U.

Así, existe un morfismo $(1_X, \rho, \gamma) : (X, \rho) \to (X, \gamma)$ en $Set-Rel$ tal que $U(1_X, \rho, \gamma) = 1_X$. Entonces, por la definición de los morfismos de $Set-Rel$ se tiene que cualquier $a, b \in X$, $(a, b) \in \gamma$, si y sólo si, $(a, b) \in \rho$. Por lo tanto $\gamma = \rho$. Entonces $(Set-Rel, U)$ es una categoría topológica. No obstante, $Set-Rel$ no es categoría Pr-topológica, pues sobre el conjunto unitario $\{a\}$ hay exactamente dos objetos en la fibra $(\mathrm{Fib}_U(\{a\}), \leq)$ que son $(\{a\}, \emptyset)$ y $(\{a\}, \{(a, a)\})$.

4. Algunos ejemplos

4.1. La categoría de los espacios topológicos. Sea $O : Top \to Conj$ el funtor olvido de estructura de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los conjuntos. Claramente O es fiel. Si $f = X \to Y$ es una función y (Y, α) es un espacio topológico, la topología para X que hace a f continua y satisface la condición de estructura inicial está dada por $\tau = \{f^{-1}(A)/A \in \alpha\}$. Ahora, si $g : X \to Y$ es una función y (X, Ω) es un espacio topológico, la topología para Y que hace a g continua y satisface la condición de estructura final es $\beta = \{B/f^{-1}(B) \in \Omega\}$. En cada conjunto X la colección de las topologías sobre X es un retículo completo definiendo $(X, \alpha_1) \leq (X, \alpha_2)$, si y sólo si, $\alpha_2 \subseteq \alpha_1$. Por lo tanto (Top, O) es una categoría C-topológica.

4.2. La categoría de los espacios de proximidad.

Definición 4.1. Un espacio de proximidad es un par (X, p) donde X es un conjunto y p es una relación binaria sobre $P(X)$, que satisface las siguientes propiedades para todos los subconjuntos A, B y C de X.

p1. $\emptyset \not p A$.

p2. $\{a\}\ p\ \{a\}$ para cada $a \in X$.
p3. $A\ p\ B$ implica que $B\ p\ A$.
p4. $A\ p\ (B\ \cup\ C)$, si y solamente si, $A\ p\ B$ o $A\ p\ C$.
p5. $A\ \not{p}\ B$, implica que existen C y D subconjuntos de X tales que $C \cap D = \emptyset$, $A\ \ \not{p}\ (X - C)$ y $B\ \not{p}\ (X - D)$.

Definición 4.2. Sean $(X,\ p)$ y $(Y,\ q)$ espacios de proximidad y sea $f : X \rightarrow Y$ una función, se dice que $f : (X,\ p) \rightarrow (Y,\ q)$ es una función de proximidad, si para todos A y B subconjuntos de X tales que $A\ p\ B$, se tiene que $f(A)\ q\ f(B)$.

Definición 4.3. La categoría de los espacios de proximidad notada $Prox$ se define por:

a) Objetos de $Prox$: La clase de los espacios de proximidad.
b) Morfismos de $Prox$: Para cada par de espacios de proximidad, la colección de morfismos corresponde a las funciones de proximidad entre ellos.
c) La ley de composición en los morfismos de $Prox$ corresponde a la composición usual de funciones.

Sea $O : Prox \rightarrow Set$ el funtor de olvido usual. O es un funtor fiel. Ahora, si $f : X \rightarrow Y$ es una función y (Y, p) es un espacio de proximidad, la relación de proximidad sobre X que hace de f una función de proximidad y satisface la condición de estructura inicial está dada por: "$A\ p\ B$, si y sólo si, $f(A)\ p\ f(B)$" para todos A y B subconjuntos de X. Sea $g : X \rightarrow Y$ una función y $(X,\ p)$ un espacio de proximidad. Antes de describir la estructura final para $(X,\ p)$ y g veamos algunos requerimientos previos.

En un espacio de proximidad $(X,\ p)$ se escribe $A \subset\subset B$, si y sólo si, $A\ \not{p}(X - B)$ y se llama a B una p–vecindad de A o una vecindad de proximidad de A.
Sea $(X,\ p)$ un espacio de proximidad y sea $f : X \rightarrow Z$ una función sobreyectiva. En el conjunto de partes de Z se definen (Ver [7]) las relaciones $\subset\subset_1$ y $\subset\subset_2$ así: Dados C y D subconjuntos de Z, se dice que:

1. $C\ \subset\subset_1\ D$, si y solamente si, $f^{-1}(C) \subset\subset_p\ f^{-1}(D)$
2. $C\ \subset\subset_2\ D$, si y solamente si; para cada racional binario s en $[0,\ 1]$ existe algún C_s subconjunto de Y tal que $C_o\ =\ C$, $C_1\ =\ D$ y si t es un racional binario en $[0,\ 1]$ y $s\ <\ t$, entonces $C_s\ \subset\subset_1\ C_t$.

La relación de proximidad sobre Z inducida por la relación $\subset\subset_2$, es llamada proximidad cociente y será notada como q_2. La relación de proximidad sobre Y que hace de g una función de proximidad y satisface la condición de estructura final está dada por: $Z\ q\ W$, si y solo si, se cumple alguna de las siguientes condiciones:

i. $[Z - f(X)] \cap [W - f(X)] \neq\ \emptyset$, o,
ii. $[Z \cap f(X)]\ q_2\ [W \cap f(X)]$ donde q_2 es la proximidad cociente antes definida.

Para cada conjunto X, la colección de las relaciones de proximidad sobre X es un retículo completo, definiendo $(X,\ p) \leq (X,\ q)$, si y sólo si, $p \subseteq q$. Por lo tanto $(Prox,\ O)$ es una categoría $C-$topológica. Ver [3].

4.3. La categoría de los espacios uniformes.

Definición 4.4. Una uniformidad diagonal sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de $X \times X$ que satisface los siguientes axiomas:

a. Si $D \in \mathcal{D}$, entonces $\Delta \subseteq D$, donde $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$
b. Si $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, entonces $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$.
c. Si $D \in \mathcal{D}$, entonces existe $E \in \mathcal{D}$, tal que $E \circ E \subseteq \mathcal{D}$.
d. Si $D \in \mathcal{D}$, entonces $E^{-1} \subseteq \mathcal{D}$ para algún $E \in \mathcal{D}$.
e. Si $D \in \mathcal{D}$ y $D \subseteq E$, entonces $E \in \mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D}$ es una uniformidad sobre X, al par $(X, \mathcal{D})$ se le llama espacio uniforme.

Definición 4.5. Sean $(X,\ \mathcal{D})$, $(Y,\ \mathcal{E})$ espacios uniformes. Se dice que una función $f : X \to Y$ es uniformemente continua, si y solamente si, para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $D \in \mathcal{D}$ tal que, si $(x,\ y) \in D$, entonces $(f(x),\ f(y)) \in E$.

Definición 4.6. La categoría de los espacios uniformes notada $Unif$ se define por:

a. Objetos: Colección de espacios uniformes.
b. Morfismos: Para cada par de espacios uniformes la colección de morfismos está dada por la colección de funciones uniformemente continuas.
c. La Ley de composición en los morfismos está dada por la composición usual de funciones.

Consideremos el funtor olvido de estructura $O :\ Unif \to Set$. O es un funtor fiel. La uniformidad que satisface la condición de estructura inicial para un espacio uniforme $(Y,\ \mathcal{E})$ y una función $f : X \to Y$ es $\mathcal{D} = \{D_E \mid E \in \mathcal{E}\}$ donde $D_E = \{\ (a,b) \in X \times X \mid (f(a), f(b)) \in E\}$. La uniformidad que satisface la definición de estructura final para un espacio $(X,\ \mathcal{A})$ y una función $f :\ X \to Y$ es $\mathcal{B} = \{H \cup \Delta \mid H \in \mathcal{B}^*\}$, donde $\mathcal{B}^*$ es una relación en Y definida por "$T \in \mathcal{B}^*$, si y solo si, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que si $(x,\ y) \in A$, entonces $(f(x),\ f(y)) \in T$".

Sean $(X,\ \mathcal{D}_1)$ y $(X,\ \mathcal{D}_2)$ espacios uniformes, se dice que $(X,\ \mathcal{D}_1) \leq (X,\ \mathcal{D}_2)$, si y sólo si, la función de inclusión $i :\ (X,\ \mathcal{D}_1) \to (X,\ \mathcal{D}_2)$ es uniformemente continua. Es de anotar que $(X,\ \mathcal{D}_1) \leq (X,\ \mathcal{D}_2)$, si y solo si, $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$.

Este orden corresponde al orden de la fibra sobre un conjunto X y resulta ser un retículo completo. Por lo tanto $(Unif,\ O)$ es una categoría $C-$topológica. Ver [4].

4.4. **La categoría Moni.** Sea $\mathcal{E}$ una categoría pequeña, con productos fibrados, intersecciones e imágenes, entonces se determina una categoría Moni que notaremos $\mathcal{E}^*$, como:

Objetos de $\mathcal{E}^*$ =: colección de parejas de la forma $(X, \overline{h})$, donde X es un objeto de $\mathcal{E}$ y h es un elemento de $Moni(X)$, donde $Moni(X)$ corresponde a la colección de monomorfismos con codominio X y $\overline{h}$ es la clase de los monomorfismos equivalentes a h.

Morfismos de $\mathcal{E}^*$ =: dados dos objetos $(X, \overline{h})$ y $(Y, \overline{k})$ de $\mathcal{E}^*$, $f_{hk} : (X, \overline{h}) \to (Y, \overline{k})$ es un morfismo de $\mathcal{E}^*$, si y sólo si $f : X \to Y$ es un morfismo de $\mathcal{E}$ y si (P, k', f') es el producto fibrado de k y f entonces $\overline{h} \leq \overline{k}'$. Esta definición es independiente del representante de $\overline{h}$ y $\overline{k}$. La ley de composición en los morfismos de $\mathcal{E}^*$ corresponde a la composición de morfismos en $\mathcal{E}$.
Determinamos un funtor $O : \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}$, por $O(X, \overline{h})$ =: X y $O(f_{hk})$ =: f.

Veamos que $(\mathcal{E}^*, O)$ es C–topológica. Es claro que O es fiel. Ahora, sea $f : X \to Y$ un morfismo de $\mathcal{E}$ y $(Y, \overline{k})$ un objeto de $\mathcal{E}^*$. Sea (P, k', f') el producto fibrado de f y k. Entonces $(X, \overline{k}')$ junto con el morfismo $f_{k'k} : (X, \overline{k}') \to (Y, \overline{k})$ satisface la condición de estructura inicial.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo de $\mathcal{E}$ y $(X, \overline{h})$ un objeto de $\mathcal{E}^*$. Veamos la construcción de la estructura final para $(X, \overline{h})$ relativa a f. Sean a y b morfismos de $\mathcal{E}$ tales que $a \circ b = f \circ h$ siendo a la imagen de $f \circ h$; entonces (Y, a) junto con el morfismo $f_{h_a} : (X, \overline{h}) \to (Y, \overline{a})$ satisface la condición de estructura final. Además, para cada objeto X de $\mathcal{E}$ la fibra $Moni(X)$ es un retículo completo. Por lo tanto $(\mathcal{E}^*, O)$ es una categoría C–topológica.

4.5. **La Categoría Crib$_r$.** Una categoría pequeña $\mathcal{E}$ determina una categoría $Crib_r$ que notaremos $\mathcal{E}_r$, la cual se define de la siguiente manera:

Los objetos de $\mathcal{E}_r$ son pares de la forma $(X, \mathcal{A})$, donde X es un objeto de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{A}$ es un criba sobre X en la categoría $\mathcal{E}$, esto es, $\mathcal{A}$ es un colección de morfismos de $\mathcal{E}$ con codominio X tal que si $f \in \mathcal{A}$ y g es un morfismo de $\mathcal{E}$ tal que $f \circ g$ está definido, entonces $f \circ g \in \mathcal{A}$. Entre cada par de objetos $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ de $\mathcal{E}_r$ un morfismo $f_{\mathcal{AB}} : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ está determinado por un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{E}$, donde $f \circ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, siendo $f \circ \mathcal{A} = \{f \circ g \mid g \in \mathcal{A}\}$. La ley de composición en los morfismos de $\mathcal{E}_r$ está determinada por la composición en $\mathcal{E}$.

Definimos el funtor $O : \mathcal{E}_r \to \mathcal{E}$, por $O(X, \mathcal{A}) = X$ y $O(f_{\mathcal{AB}})$ =: f. El funtor O es fiel. Sea $(Y, \mathcal{B})$ un objeto de $\mathcal{E}_r$ y $f : X \to Y$ un morfismo de $\mathcal{E}$, entonces se define: $\mathcal{A} = \{g \mid codominio(g) = X, \wedge, f \circ g \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{A}$ es criba sobre X, $f \circ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y $(X, \mathcal{A})$, junto con $f_{\mathcal{AB}}$ satisfacen la condición de estructura inicial.
Ahora, si $(X, \mathcal{D})$ es un objeto de $\mathcal{E}_r$ y $f : X \to Y$ es un morfismo de $\mathcal{E}$,

definiendo $\mathcal{M} = f \circ \mathcal{D}$, entonces $\mathcal{M}$ es una criba sobre Y, $f \circ \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}$ y $(Y, \mathcal{M})$ junto con $f_{\mathcal{DM}}$ satisfacen la condición de estructura final.

Si X es un objeto de $\mathcal{E}$, la fibra sobre X resulta ser un retículo completo con el preorden usual de la fibra, ya que $(X, \mathcal{A}) \leq (X, \mathcal{B})$ en la fibra sobre X equivale a $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. De lo anterior se deduce que $(\mathcal{E}_r, O)$ es una categoría $C-$topológica.

4.6. **La Categoría Crib^r.** Si en el ejemplo 4.5, en la definición de los morfismos, en lugar de $f \circ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, se exige $\mathcal{A} \subseteq f^*(\mathcal{B})$, donde $f^*(\mathcal{B}) = \{g \mid codominio(g) = X, \wedge, f \circ g \in \mathcal{B}\}$, se determina una categoría $Crib^r$ que notaremos $\mathcal{E}^r$. Definiendo el funtor $O : \mathcal{E}^r \rightarrow \mathcal{E}$ por $O(X, \mathcal{A}) =: X$ y $O(f_{\mathcal{AB}}) = f$ se tiene que $(\mathcal{E}^r, O)$ es $C-$topológica como se ilustra a continuación.

El funtor O es fiel. Dado $(Y, \mathcal{B})$ objeto de $\mathcal{E}^r$ y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de $\mathcal{E}$, al definir $\mathcal{A} = f^*(\mathcal{B})$ se tiene que $\mathcal{A}$ es criba sobre X, $\mathcal{A} \subseteq f^*(\mathcal{B})$ y $(X, \mathcal{A})$ junto con el morfismo $f_{\mathcal{AB}}$ satisface la condición de estructura inicial. Ahora, dado $(X, \mathcal{D})$ objeto de $\mathcal{E}^r$ y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de $\mathcal{E}$, al definir $\mathcal{K} = f \circ \mathcal{D}$ se tiene que $\mathcal{K}$ es criba sobre Y, $\mathcal{D} \subseteq f^*(\mathcal{K})$ y $(Y, \mathcal{K})$ junto con el morfismo $f_{\mathcal{DK}}$ satisface la condición de estructura final; para ver esto último, sea (Z, α) un objeto de $\mathcal{E}^r$ y $g : Y \rightarrow Z$ un morfismo de $\mathcal{E}$, tal que $(g \circ f)_{\mathcal{D}_\alpha} : (X, \mathcal{D}) \rightarrow (Z, \alpha)$ es un morfismo de $\mathcal{E}^r$, entonces $\mathcal{D} \subseteq (g \circ f)^*(\alpha)$, $(g \circ f)^*(\alpha) = f^*(g^*(\alpha))$, luego $f \circ \mathcal{D} \subseteq f \circ f^*(g(\alpha)) \subseteq g^*(\alpha)$. Nuevamente para cada objeto X de $\mathcal{E}$ la fibra sobre X es un retículo completo en $\mathcal{E}^r$.

Referencias

[1] Adamek J., *Theory of mathematical structures.* D. Reidel Publishing Company. Boston, Lancaster. 1983.

[2] Adamek J., Herrlich H., Strecker G., *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1990.

[3] Ardila V., Rosas D., Montañez R. *Una nota acerca de las estructuras iniciales y finales en la categoría de los espacios de proximidad.*, Boletín de Matemáticas, Nueva serie, Volumen V, Número 2; Diciembre de 1998, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.

[4] Ardila V., Rosas D., Montañez R. *La categoría de los espacios uniformes.*, Publicación del XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Diciembre de 1997.

[5] Mac Lane S., *Categories for the Working Mathematician.*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[6] Preuss G., *Theory of Topological Structures.*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

[7] Willard S., *General Topology.*, Addison Wesley Publisshing Company. 1970.