Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VII No. 1 (2000), pp. 29–38

CARACTERIZACIÓN DE LOS SUBESPACIOS COMPACTOS DE $\mathbb{R}^2$ CON ALGUNAS TOPOLOGÍAS DISTINTAS DE LA USUAL

JESÚS ANTONIO AVILA G.(*)

RESUMEN. En este artículo se caracterizan los subespacios compactos de $\mathbb{R}^2$, con algunas topologías distintas de la usual y algunos casos son relacionados con las S-topologías y topologías de colas a derecha.

Abstract. In this paper we caracterize the compact subespaces of $\mathbb{R}^2$, with some topologies different from de usual one and some cases related with S-topologies and right topologies.

Keywords: Compactness, S-topology, pre-ordered set.
2000 AMS Sub. Class. 54D30

1. Introducción

En el desarrollo de un curso de topología a nivel de pregrado, se estudia la compacidad desde un punto de vista teórico y se demuestran los teoremas sobre este invariante topológico desde un contexto general. Por esto el problema de caracterizar los subespacios compactos de un espacio topológico particular, no es considerado ni siquiera como ejercicio propuesto en los textos de estudio. En particular para el caso de $\mathbb{R}^2$ solo se caracterizan los subespacios compactos cuando es considerado con la topología inducida por la métrica, lo cual es bien conocido por todos.

(*) Trabajo recibido 18/12/00, revisado 20/03/01. Estudiante Maestría en Matematicas, Universidad Nacional de Colombia. Becario Universidad del Tolima y Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia. e-mail: javila@matematicas.unal.edu.co.

Por tal motivo, solucionar el problema con otras topologías sobre $\mathbb{R}^2$ distintas de la usual, no solo ayudará a enriquecer el conocimiento teórico del estudiante sino que le permitirá comprender mejor el concepto de compacidad y lo motivará a formularse otros problemas relacionados con esta área. Además el artículo puede considerarse como una herramienta de discusión, refuerzo y complementación teórica en el salón de clase, pues se desarrollan ejemplos que recuerdan la no equivalencia de compacto y cerrado-acotado en $\mathbb{R}^2$ con topologías arbitrarias, se relacionan estructuras aparentemente diferentes como son las S-topologías y relaciones de pre-orden y se motiva al estudiante a formular interrogantes referidos a otros invariantes topológicos.

2. Algunas topologías sobre $\mathbb{R}^2$ y caracterización de sus subespacios compactos

En el desarrollo de este artículo se hará uso de los siguientes teoremas, cuya demostración puede ser consultada en [2]:

Teorema 2.1. *Sea X un conjunto no vacío, $\beta \subseteq 2^X$ es base para una topología τ sobre X ssi:*

i) $X = \bigcup_{B \in \beta} B$
ii) *Si $U, V \in \beta$, entonces, $U \cap V$ es union de elementos de β.*

τ es entonces la topología generada por la base β.

Teorema 2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico, β una base para τ. $A \subseteq X$ es compacto ssi todo cubrimiento por abiertos básicos (elementos de β) se reduce a un subcubrimiento finito.*

En el desarrollo de este numeral, solo se demostrará la necesidad de las afirmaciones, la suficiencia se deja como ejercicio para el lector.

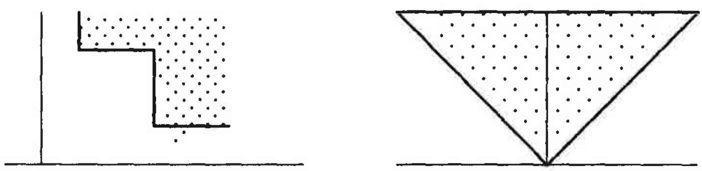
Caso 1. Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, \tau \times \tau)$, donde τ es la topología generada por la base $\beta = \{[a, +\infty) \diagup a \in \mathbb{R}\}$ y $\tau \times \tau$ es la topología producto sobre $\mathbb{R}^2$.

Mas adelante veremos porqué esta topología se conoce como topología de colas a derecha sobre $\mathbb{R}^2$.

Afirmación 1. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es compacto ssi existen puntos $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ en A, tales que, para todo $(a, b) \in A$, existe un (a_{i_0}, b_{i_0}), $1 \leq i_0 \leq n$, tal que, $a_{i_0} \leq a$ y $b_{i_0} \leq b$.

Demostración. $\longrightarrow$) Los abiertos básicos de $\tau \times \tau$, son de la forma $[x, +\infty) \times [y, +\infty)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces la familia $\{[a, +\infty) \times [b, +\infty)\}_{(a,b)\in A}$ es un cubrimiento por abiertos básicos de A, es decir, $A \subseteq \bigcup_{(a,b)\in A} [a, +\infty) \times [b, +\infty)$. Como A es compacto, este cubrimiento abierto se reduce a un subcubrimiento finito, es decir, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, +\infty) \times [b_i, +\infty)$, con $(a_i, b_i) \in A$, para todo i. Entonces se tiene que para todo $(a, b) \in A$, $(a, b) \in [a_{i_0}, +\infty) \times [b_{i_0}, +\infty)$, para algún $i_0, 1 \leq i_0 \leq n$. Así, $a_{i_0} \leq a$, y $b_{i_0} \leq b$. $\square$

Ejemplo 1. El subespacio de la fig. 1 contiene los puntos p_1 y p_2, que cumplen con la condición necesaria, por lo tanto este subespacio es compacto.



Figuras 1, 2

Para el subespacio de la fig. 2 tenemos que $\{[a, +\infty) \times [b, +\infty) / (a, b) \in S\}$, es un cubrimiento abierto que no puede reducirse a uno finito. Por lo tanto este subespacio no es compacto.

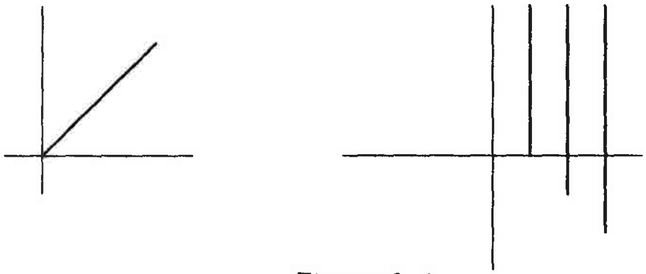
Caso 2. Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, \tau)$, donde τ es la topología generada por la base $\beta = \{\{x\} \times \mathbb{R} / x \in \mathbb{R}\}$. τ se conoce como topología de las rectas verticales.

Afirmación 2. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es compacto ssi existen puntos $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$ en A, tales que, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} \times \mathbb{R}$.

Demostración. $\longrightarrow$) La familia $\Re = \{\{a\} \times \mathbb{R} / a \in \pi_1(A)\}$, es un cubrimiento por abiertos básicos de A, entonces $A \subseteq \cup\Re$. Como A es compacto, este cubrimiento se reduce a un subcubrimiento finito, es decir, existen $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} \times \mathbb{R}$.

Esta implicación también se puede obtener observando que τ es la topología producto de $(\mathbb{R}, \textit{discreta})$ y $(\mathbb{R}, \textit{grosera})$. Tenemos así que si A es compacto entonces $\pi_1(A)$ es compacto en $(\mathbb{R}, \textit{discreta})$. Luego $\pi_1(A)$ es finito y por tanto $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} \times \mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 2. El subespacio de la fig. 3 no es compacto, el subespacio de la fig. 4 sí es compacto.



Figuras 3, 4

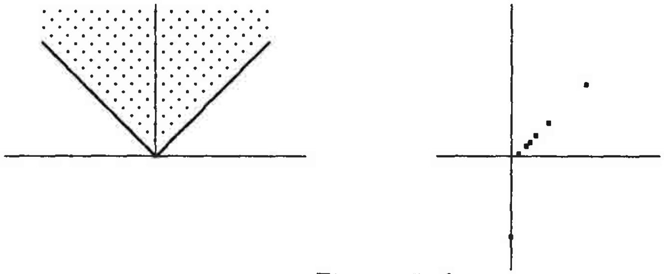
Caso 3. Fijemos un número real $a_0 > 0$ y consideremos la colección $\beta_{a_0} = \{T_{b,c}/b, c \in \mathbb{R}\}$, donde $T_{b,c} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/a_0x + b \leq y, -a_0x + c \leq y\}$. Sea τ la topología generada β.

Afirmación 3. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es compacto ssi existen puntos $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ en A, tales que, para todo $(p, q) \in A$, existe un (a_0, b_0), $1 \leq i_0 \leq n$, tal que, $a_0 |p - a_{i_0}| + b_{i_0} \leq q$.

Demostración. Es similar a las anteriores, por tal motivo se deja como ejercicio para el lector. □

Obsérvese que si se considea τ' igual que τ pero sin considerar a_0 fijo, se tiene $\tau \subseteq \tau'$ y por lo tanto todo subespacio compacto en $(\mathbb{R}^2, \tau')$ es compacto en $(\mathbb{R}^2, \tau)$, pero no lo contrario como se aprecia en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. El subespacio de la fig. 5 es compacto en $(\mathbb{R}^2, \tau)$, solo si la pendiente $\alpha \geq a_0$. En $(\mathbb{R}^2, \tau')$ éste subespacio no es compacto para todo α. En la fig. 6 se encuentra como subespacio $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{(0, -1)\}$, que es compacto en ambas topologías.



Figuras 5, 6

Caso 4. Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, \tau)$, donde τ es la topología generada por la base $\beta = \{(-a,a) \times (-a,a)/a \in \mathbb{R},\ a > 0\}$.

Afirmación 4. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es compacto ssi existe $p = (a,b) \in A$, tal que, para todo $(x,y) \in A$, se tiene que, $|x| \leq |a|$ y $|y| \leq |a|$ ó $|x| \leq |b|$ y $|y| \leq |b|$.

Demostración. $\longrightarrow$) Para $\alpha \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, sea $V_{\alpha,\epsilon} = (-\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) \times (-\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$. Para todo $(x,y) \in A$, sea $m(x,y) = máx\{|x|, |y|\}$. Entonces la familia $\{V_{m(x,y),\epsilon}\}$ es un cubrimiento por abiertos básicos de A. Como A es compacto, este cubrimiento se reduce a un subcubrimiento finito, es decir, $A \subseteq V_{m(x_1,y_1),\epsilon} \cup \ldots \cup V_{m(x_n,y_n),\epsilon}$. Como los $V_{m(x,y),\epsilon}$ están encajados, existe alguno que contiene a todos, es decir, $A \subseteq V_{m(x_r,y_r),\epsilon}$, para algún r, $1 \leq r \leq n$. Entonces tomando $(a,b) = (x_r, y_r)$, se tiene que para todo $(x,y) \in A$, $(x,y) \in V_{m(a,b),\epsilon}$, es decir, $(x,y) \in (-m(a,b)-\epsilon, m(a,b)+\epsilon) \times (-m(a,b)-\epsilon, m(a,b)+\epsilon)$. Como $m(a,b) = |a|$ ó $|b|$ y ϵ es arbitrario, se concluye que $|x| \leq |a|$ y $|y| \leq |a|$ ó $|x| \leq |b|$ y $|y| \leq |b|$. $\square$

Una caracterización geométrica de la afirmación anterior puede darse así:

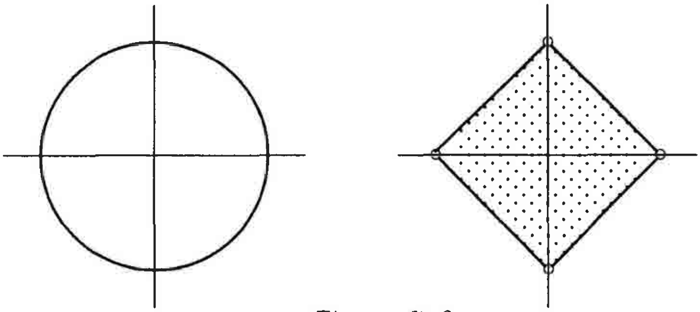
Afirmación 4'. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es compacto ssi $M = \{\|(a,b)\| / (a,b) \in \mathbb{A}\}$ tiene máximo, donde $\|(a,b)\| = máx\{|a|, |b|\}$.

Demostración. $\longrightarrow$) Por contradicción. Supóngase que A es compacto y M no tiene máximo. Hay dos posibilidades para M, si M no es acotado entonces A no es compacto. $\rightarrow\leftarrow$.
Si M es acotado entonces $\sup(M) \notin M$. Ahora, para $r \in \mathbb{R}$, sea $V_r = (-|r|, |r|) \times (-|r|, |r|)$, se tiene que $\{V_r / r < \sup(M)\}$ es un cubrimiento abierto de A, por tanto se reduce a un subcubrimiento finito, es decir, $A \subseteq V_{r_1} \cup \ldots \cup V_{r_n}$ y como estos abiertos están encajados se tiene que para algún $t \in \{r_1, \ldots, r_n\}$, $A \subseteq V_t$, $t < \sup(M)$. Entonces para todo $(a,b) \in A$, se tiene que $(a,b) \in V_t$, es decir, $\|(a,b)\| < t < \sup(M)$.$\rightarrow\leftarrow$. $\square$

Obsérvese que en esta topología ningún subespacio cerrado es compacto.

Ejemplo 4. El subespacio de la fig. 7 (circunferencia) es compacto, ya que cualquiera de los puntos p_1, p_2, p_3, p_4 cumplen la condición necesaria. El subespacio de la fig. 8 no es compacto.

Caso 5. Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, \tau)$, donde $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 / A^c es\ finito\}$. τ se conoce como cofinitos.



Figuras 7, 8

Afirmación 5. A es compacto para todo $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Demostración. Si $A = \varnothing$, A es compacto. Si $A \neq \varnothing$, sea $\{G_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de A, entonces para $x \in A$, existe $i_0 \in I$, tal que, $x \in G_{i_0}$. Ahora $G_{i_0}^c = \{y_1, ..., y_n\}$, por lo tanto, si alguno de los $y_j \in A$, entonces, existe G_{i_j}, tal que $y \in G_{i_j}$, y se tendría entonces $A \subseteq \bigcup_{j=0}^{n} G_{i_j}$. □

Para una demostración más elegante de éste hecho, puede consultarse [1].

Caso 6. Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, \tau_p)$, donde $\tau_p = \left\{A \subseteq \mathbb{R}^2 / p \in A\right\} \cup \{\varnothing\}$. τ_p se conoce como topología punto incluído.

Afirmación 6. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es compacto ssi A es finito.

Demostración. $\longrightarrow$) Por contradicción. Supóngase que A es compacto e infinito. La familia $\{p, q\}_{q \in A}$, es un cubrimiento abierto de A y por lo tanto se reduce a un subcubrimiento finito, es decir, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{p, q_i\}$ y ésto quiere decir que A es finito.$\rightarrow\leftarrow$. □

Caso 7. Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, \tau^p)$, donde $\tau^p = \left\{A \subseteq \mathbb{R}^2 / p \notin A\right\} \cup \left\{\mathbb{R}^2\right\}$. τ^p se conoce como topología punto excluído.

Afirmación 7. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es compacto ssi $p \in A$ ó A es finito.

Demostración. $\longrightarrow$) Por contradicción. Supóngase que A es compacto $p \notin A$ y A es infinito. Como $p \notin A$, entonces $A \subseteq \mathbb{R}^2 - \{p\}$ y la topología en este subespacio es la discreta, por lo tanto, A es finito.$\rightarrow\leftarrow$. □

3. Compacidad en S-topologías

Definición 3.1. Una topología τ sobre un conjunto X se dice S-topología (notación tomada de [5]) si la intersección arbitraria de abiertos es un abierto.

Nota: Estas topologías también son llamadas topologías de Alexandrov, topologías principales o topologías MA.

De acuerdo con lo anterior las topologías de los casos 1, 2 y 3 son S-topologías, mientras la del caso 4 no, pues $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\times\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=(0,0)$, que no es abierto.

Obsérvese que la caracterización de los subespacios compactos de los casos 1, 2 y 3 implicó la existencia de un conjunto finito de puntos del subespacio, que cumplían una condición especial respecto a los demás puntos del conjunto. Entonces podríamos preguntarnos si existe alguna relación entre estos casos y si la caracterización de los compactos puede generalizarse, pues bien la respuesta se da en términos de S-topologías [5].

Teorema 3.1. *Un conjunto X provisto con una S-topología β es compacto ssi existe un subconjunto finito de X, el cual es denso con respecto a β^*, donde $\beta^*=\{A\subseteq X/A^c\in\beta\}\in TOP(X)$.*

En los casos citados se probó en general que si A es compacto entonces existen $(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)$ en A, tales que, $A\subseteq\bigcup_{i=1}^n V(a_i,b_i)$, donde $V(a_i,b_i)$ para el caso 1 es el abierto básico $[a_i,+\infty)\times[b_i,+\infty)$; para el caso 2 el abierto básico $\{a_i\}\times\mathbb{R}$ y para el caso 3 el abierto básico cuyo vértice es (a_i,b_i). Ahora, considerando a A como subespacio, es decir, (A,β_A^*), se tiene que

$$A=\bigcup_{i=1}^n V(a_i,b_i)=\overline{\{(a_1,b_1)\}}\cup...\cup\overline{\{(a_n,b_n)\}}=\overline{\{(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\}}$$

esto quiere decir que A contiene un número finito de puntos, el cual es denso en (A,β_A^*).

Nota: Una generalización de este teorema puede encontrarse en [8].

4. Compacidad y topologías de colas a derecha

La relación entre los casos 1, 2 y 3 también puede hacerse mediante la topología de colas a derecha sobre un conjunto no vacío X, con una relación de pre-orden $\preceq$, obteniéndose según [5] el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Sea X un conjunto no vacío con una relación de pre-orden $\preceq$, τ la topología sobre X generada por la clase $\gamma=\{\gamma_a/a\in X\}$, donde $\gamma_a=$*

$\{x \in X/a \preceq x\}$. *$A \subseteq X$ es compacto ssi existen $p_1, ..., p_n \in A$, tales que, para todo $p \in A$, existe p_{i_0}, $1 \leq i_0 \leq n$, tal que, $p_{i_0} \preceq p$.*

Veamos entonces cuáles son las relaciones de preorden subyacentes en los casos 1, 2 y 3:

Sea $\leq$ el orden usual en $\mathbb{R}$, entonces para $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, la relación $\leq_1$, definida por: $(a_1, b_1) \leq_1 (a_2, b_2)$ ssi $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \leq b_2$, es una relación de orden sobre $\mathbb{R}^2$ y la topología de colas a derecha está dada por la topología generada por la clase $\{C_x/x \in \mathbb{R}^2\}$, donde $C_x = \{y \in \mathbb{R}^2/x \leq_1 y\}$ y ésta es la topología del caso 1.

Para $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, la relación $\leq_2$, definida por: $(a_1, b_1) \leq_2 (a_2, b_2)$ ssi $a_1 = a_2$, es una relación de pre-orden sobre $\mathbb{R}^2$ y la respectiva topología de colas a derecha coincide con la topología del caso 2.

Para $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$, sea

$$T_{(a_1,b_1)} =$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/a_0x - a_0a_1 + b_1 \leq y, \text{ y}, \ -a_0x + a_0a_1 + b_1 \leq y,\ a_0 > 0\ (fijo)\}$$

Esta es una zona triangular infinita hacia arriba, con vértice en (a_1, b_1) y pendiente de las rectas a_0 y $-a_0$. Entonces para $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, la relación $\leq_3$, definida por: $(a_1, b_1) \leq_3 (a_2, b_2)$ ssi $T_{(a_2,b_2)} \subseteq T_{(a_1,b_1)}$, es una relación de orden sobre $\mathbb{R}^2$ y la respectiva topología de colas a derecha coincide con la topología del caso 3.

Ahora bien, por los numerales 3 y 4 restaría preguntarse si existe alguna relación entre pre-órdenes y S-topologías sobre un conjunto X. La respuesta es afirmativa y en [5] se prueba que el conjunto de S-topologías sobre un conjunto X y el conjunto de pre-órdenes sobre X, son retículos completos canónicamente isomorfos.

Para un estudio detallado de esta relación puede consultarse [9].

REFERENCIAS

[1] Rubiano, G.N. *Topología General*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 1997.

[2] Simmons, G.F. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill, International Editions. Auckland 1963.

[3] Lipschutz, S. *Teoría y Problemas de Topología General*. McGraw-Hill Inc. México. 1970.

[4] Munkres, J.R. *Topology a First Course*. Prentice-Hall. New Jersey. 1975.

[5] Lorrain, F. *Notes on Topological Spaces with Minimun Neighborhoods*. American Mathematical Monthly, 76 (1969), 616-627.

[6] Kelley, J.L. *General Topology*. Springer-Verlag. New York. 1955.

[7] Restrepo, G. *Los Fundamentos de la Matemática*. Universidad del Valle. Cali. 1998.

[8] Acosta, L. y Lozano E.· *Una Caracterización de las Topologías Compactas* T_0. Boletín de Matemáticas Nueva Serie, Vol. VI No. 2, 1999, 77-84.

[9] Lozano, E. *Algunas Propiedades de los Constructos.* Trabajo de Grado Carrera de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 1995.