Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VI No. 2 (1999), pp. 77–84

UNA CARACTERIZACIÓN DE LAS TOPOLOGÍAS COMPACTAS T_0

LORENZO ACOSTA Y EPIFANIO LOZANO(*)

RESUMEN. Se establece una caracterización de la compacidad para espacios T_0 en términos del conjunto de puntos cerrados. También se extiende un teorema de F. Lorrain [5] que caracteriza los espacios topológicos compactos de Alexandrov, estableciendo otra equivalencia con el resultado mencionado y precisando dicho resultado.

ABSTRACT. We give a characterization of the compactness for a T_0 Space in terms of the set of closed points. We also extend a theorem of F. Lorrain, which characterizes the compactness for Alexandrov spaces.

Keywords and phrases. Compactness, T_0-Spaces, closed point, specialization order.

1. Introducción

Aun cuando la caracterización de propiedades topológicas a partir de conjuntos pre-ordenados ha sido estudiada desde hace ya varios años por muchos autores entre los que podemos citar a Ore, Alexandrov, Lorrain, Larson, Andima, Thron, Scott, Lawson, Kopperman, Kronheimer, Wilson, entre otros, hemos encontrado en la literatura muy pocos resultados que establezcan puentes entre los espacios topológicos compactos y las relaciones de pre-orden. Una explicación de dicha ausencia será presentada en este artículo. Más aún, las caracterizaciones de los espacios topológicos compactos son escasas. Cabe destacar una debida a R. Larson [8], para topologías T_0 minimales y otra debida a F. Lorrain, en [5], donde establece:

(*)Texto recibido 12/10/2000, revisado 20/11/2000. Lorenzo Acosta, Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia. Epifanio Lozano Estudiante de la Maestría en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia.
e-mail:lacosta@matematicas.unal.edu.co y matemaepi@tutopia.com
2000 Mathematics Subject Classification: 54D30

Un espacio (X, τ) *de Alexandrov es compacto si y sólo si existe un subconjunto finito y denso en* X *con respecto a la topología* $\tau_c = \{U : U^c \in \tau\}$.

En el presente artículo extendemos el resultado de Lorrain a otras topologías que no son de Alexandrov; precisamos la naturaleza topológica del conjunto al que se refiere Lorrain, determinando el conjunto más pequeño que satisface la condición impuesta por él; establecemos otra equivalencia con el resultado de Lorrain, la cual no nos remite a otra topología, y por último caracterizamos la compacidad de cualquier topología T_0 en términos del conjunto de puntos cerrados de la topología dada.

2. Nociones Básicas

Las siguentes nociones son ya habituales en el contexto del estudio de los espacios topológicos y las relaciones de pre-orden; la mayoría de ellas han sido tomadas de [3], [4], [2] y [1].

Definición 2.1. Sean X un conjunto dotado de una relación de orden R, $E \subseteq X$ y $x \in X$; definimos:

(1) $\uparrow_R E = \{y \in X : xRy$ para algún $x \in E\}$, o simplemente $\uparrow E$.
(2) $\downarrow_R E = \{y \in X : yRx$ para algún $x \in E\}$, o simplemente $\downarrow E$.
(3) $\uparrow_R x = \uparrow_R \{x\}$, o simplemente $\uparrow x$, si no hay lugar a confusión.
(4) $\downarrow_R x = \downarrow_R \{x\}$, o simplemente $\downarrow x$, si no hay lugar a confusión.
(5) Decimos que E es **superior** si y sólo si $E = \uparrow_R E$.
(6) Decimos que E es **inferior** si sólo si $E = \downarrow_R E$.

Algunas de las topologías más conocidas asociadas a una relación de pre-orden son las siguientes

- **La topología de Alexandrov**[1] asociada a R:

$$\gamma(R) = \{\uparrow E : E \subseteq X\}.$$

- **La topología de Scott** asociada a R:

$$\sigma(R) = \{E \in \gamma(R) : (\forall D \quad \text{dirigido}^2\ )(SupD \in E \Rightarrow D \cap E \neq \emptyset)\}.$$

En este caso pedimos que la relación R sea antisimétrica. En gran parte de la literatura se exigen condiciones adicionales sobre el conjunto ordenado (X, R) para trabajar con la topología de Scott. En general se pide que (X, R) sea superiormente completo, es decir, que existan los extremos superiores de los conjuntos dirigidos. Sin embargo, en este

[1]Una topología se dice de Alexandrov si es cerrada para intersecciones arbitrarias.

[2]Un subconjunto no vacío D de X es dirigido, con respecto a una relación de orden R definida sobre X, si para todo x, $y \in D$ existe un $z \in D$ tal que xRz y yRz

artículo solamente necesitamos que R sea una relación de orden sobre X.

- **La topología débil** asociada a R.

$$\nu(R) = \langle \{X \setminus \downarrow x : x \in X\} \rangle.$$

Estas topologías se estudian en la mayoría de los artículos y libros citados en la bibliografía de este escrito. Sin embargo cabe destacar [1](donde se estudia con especial detalle la topología de Scott) y [3].

En el estudio de las propiedades topológicas vía las relaciones de pre-orden, se ha privilegiado una relación conocida como el pre-orden de especialización, la cual se define de la siguiente manera:

Definición 2.2. Sea τ una topología sobre X, definimos la relación $\alpha(\tau)$ sobre X como: $\alpha(\tau) = \{(a\,,\,b) \in X \times X \,:\, a \in \overline{\{b\}}^{\tau}\}$, donde $\overline{\{b\}}^{\tau}$ designa la adherencia de $\{b\}$ con respecto a la topología τ.

El siguiente es el resultado básico que relaciona las topologías débil y de Alexandrov con el pre-orden de especialización, (ver [6] y [2]).

Proposición 2.1. *Sea τ una topología sobre X y R una relación de pre-orden sobre X. Son equivalentes*

a) $\alpha(\tau) = R$
b) $\nu(R) \subseteq \tau \subseteq \gamma(R)$.

Definición 2.3. Decimos que la topología τ es concordante con el pre-orden R si se satisfacen las condiciones de la Proposición 2.1

Podríamos decir, sin temor a equivocarnos, que el estudio de propiedades topológicas no se ha abordado desde las relaciones de pre-orden en general, sino desde el pre-orden de especialización. Al respecto de este hecho resulta seminal el trabajo de Andima y Thron (ver [2]). En él se establece la noción de invariante topológico pre-orden inducido. Dichos invariantes resultan ser los que se pueden caracterizar desde el pre-orden de especialización.

Definición 2.4. (Tomada de [2]) Un invariante topológico $\mathfrak{T}$ se dice *pre-orden inducido* si existe un invariante de pre-orden[3] $\mathfrak{K}$ tal que $(X\,,\,\tau) \in \mathfrak{T}$ si y sólo si $(X\,,\,\alpha(\tau)) \in \mathfrak{K}$.

En otras palabras un invariante topológico $\mathfrak{T}$ se dice pre-orden inducido si existe un $\mathfrak{K}$ invariante de pre-orden tal que toda topología concordante con $\alpha(\tau)$ está en $\mathfrak{T}$ si y sólo si $\alpha(\tau) \in \mathfrak{K}$.

[3]Por invariante de pre-orden significaremos una clase, $\mathfrak{K}$ de pre-órdenes, de forma tal que la imagen de cualquier relación de pre-orden, en $\mathfrak{K}$, por un isomorfismo de pre-orden, también se encuentra en la clase $\mathfrak{K}$.

Nota 2.1. La compacidad no es un invariante topológico pre-orden inducido. Tomemos $\mathbb{N}_w = \mathbb{N} \cup \{w\}$ y la siguiente relación de orden sobre $\mathbb{N}_w$:

$$\triangle_w = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, w) \mid x \in \mathbb{N}_w\}.$$

$\nu(\triangle_w)$ está contenida en la topología de complementarios finitos, luego es compacta. De otra parte $\gamma(\triangle_w)$ no es compacta, pues $\{\uparrow_{\triangle_w} x\}_{x \in N_w}$es un cubrimiento por abiertos del cual no se puede extraer un subcubrimiento finito. Por ende, la compacidad no es una propiedad pre-orden inducida.

Como se ha señalado, en el estudio clásico de topología y conjuntos pre-ordenados, se privilegia el pre-orden de especialización. Resulta entonces natural que no se aborde la caracterización de la compacidad desde las relaciones de pre-orden. Sin embargo en este artículo presentamos la caracterización de la compacidad de ciertas topologías concordantes, las cuales hemos llamado *U-Scott*, desde el orden de especialización.

Definición 2.5. Una topología τ que es T_0 se dice U-Scott si $\sigma(\alpha(\tau)) \subseteq \tau$.

3. Una caracterización de la compacidad de las topologías T_0

Sea (X, τ) un espacio topológico T_0. Es fácil verificar los siguientes hechos: $\alpha(\tau)$ es un orden y si τ es de Alexandrov entonces $\gamma(\alpha(\tau)) = \tau$. Una prueba de este último hecho se puede consultar en [5]. De otra parte, dado un conjunto X dotado de una relación de orden R, establecemos las siguientes definiciones

Definición 3.1. $Min_R X = \{a \in X : \downarrow_R a = \{a\}\}$. Este es el conjunto de los minimales de (X , R).

Definición 3.2. Decimos que R tiene suficientes minimales si para todo $y \in X$ existe por lo menos un $a \in Min_R X$ tal que aRy.

Al considerar el orden de especialización $\alpha(\tau)$ para una topología T_0, el conjunto de minimales resulta ser el conjunto de puntos cerrados; y tener suficientes minimales significa que, en la adherencia de todo punto, hay un punto cerrado.

Proposición 3.1. *Sea (X , τ) un espacio de Alexandrov T_0. (X , τ) es compacto si y sólo si el conjunto de puntos cerrados es finito y en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Sea $\{v_i\}_{i \in I}$ una colección de abiertos tal que $\bigcup_{i \in I} v_i = X$ y sea $M = \{x_1, ..., x_n\}$ el conjunto de puntos cerrados. Consideremos x_j en M, como $x_j \in \bigcup_{i \in I} v_i$, existe un v_{ij} en la colección de abiertos dados tal que $\uparrow_{\alpha(\tau)} x_j \subseteq v_{ij}$. Veamos que $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \uparrow_{\alpha(\tau)} x_j$. Consideremos

$x \in X$, como en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado, existe un x_j en M tal que $x_j\alpha(\tau)x$, de donde $x \in\uparrow_{\alpha(\tau)} x_j$. Hemos demostrado que X es compacto.

$\Rightarrow$) Veamos que (X, τ) compacto implica que hay un número finito de puntos cerrados. Supongamos que el conjunto M de puntos cerrados es infinito y consideremos $\mathfrak{C} = \{ \uparrow_{\alpha(\tau)} x : x \in M\}$. Sea

$$S = \{z : z \in X \setminus \bigcup_{x\in M} \uparrow_{\alpha(\tau)} x\}$$

y tomemos $T = \bigcup_{z\in S} \uparrow_{\alpha(\tau)} z$, el cual es un abierto de la topología. $\mathfrak{C} \cup \{T\}$ es un cubrimiento por abiertos de X del cual no se puede extraer un sub-cubrimiento finito.

Supongamos $x \in X$, de forma tal que en su adherencia no hay puntos cerrados, es decir sin minimales mediante $\alpha(\tau)$. Al considerar $\downarrow_{\alpha(\tau)}x$, por el lema de Zorn éste debe contener una cadena sin cotas inferiores (de lo contrario $\downarrow_{\alpha(\tau)}x$ tiene minimales contradiciendo la hipótesis). Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ dicha cadena. La colección de cerrados $\{\downarrow_{\alpha(\tau)} x_i\}_{i\in I}$, tiene la propiedad de intersección finita, pero $\bigcap_{i\in I} \downarrow_{\alpha(\tau)} x_i = \emptyset$, de donde (X, τ) no es compacto. □

La definición que se establece y los dos resultados siguientes nos permiten acercarnos al resultado de Lorrain citado en la introducción.

Definición 3.3. Sea τ una topología. Llamaremos τ_c a la topología generada por los cerrados de τ. Es decir, $\tau_c = \langle\{U : U^c \in \tau\}\rangle$.

Proposición 3.2. *Sea τ una topología T_0. El conjunto de puntos cerrados es denso en (X, τ_c) si y sólo si en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado.*

Demostración. Es de observar que $\nu(\alpha(\tau)) \subseteq \tau \subseteq \gamma(\alpha(\tau))$.

$\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y A una vecindad de x en τ_c. Puesto que $\tau_c \subseteq \gamma(\alpha(\tau))_c$, A resulta ser $\alpha(\tau)$-inferior; como en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado, existe un $y \in Min_{\alpha(\tau)}X$, de forma tal que $y\alpha(\tau)x$, luego $y \in A$; es decir $A \cap Min_{\alpha(\tau)}X \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in X$, como $\nu(\alpha(\tau)) \subseteq \tau$, $\downarrow_{\alpha(\tau)}x$ es cerrado en (X, τ), luego $\downarrow_{\alpha(\tau)}x \in \tau_c$ y $\downarrow_{\alpha(\tau)}x \cap Min_{\alpha(\tau)}X \neq \emptyset$. Entonces existe $y \in Min_{\alpha(\tau)}X$ tal que $y\alpha(\tau)x$. □

Proposicion 3.3. *Sean τ una topología T_0 sobre X, $\mathfrak{D} = \{A \subseteq X : \overline{A}^{\tau_c} = X\}$ y $S = \bigcap_{A\in\mathfrak{D}} A$. Entonces,*

(1) *$Min_{\alpha(\tau)}X \subseteq S$.*

(2) *Si en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado entonces*

$$Min_{\alpha(\tau)}X = S.$$

Demostración.

(1) Supongamos que $Min_{\alpha(\tau)}X \nsubseteq S$, luego existe un $A \in \mathfrak{D}$ tal que $Min_{\alpha(\tau)}X \nsubseteq A$. Consideremos $m \in Min_{\alpha(\tau)}X \setminus A$, por tanto $\downarrow_{\alpha(\tau)} m = \{m\} \in \tau_c$ y $\downarrow_{\alpha(\tau)} m \cap A = \emptyset$. Esto contradice el hecho de tomar A en $\mathfrak{D}$.

(2) Se sigue de la Proposición 3.2. □

La siguiente proposición establece una nueva equivalencia con el resultado expuesto en [5] para topologías de Alexandrov T_0; también se precisa al haberse determinado el conjunto denso más pequeño, $Min_{\alpha(\tau)}X$, en τ_c.

Proposición 3.4. *Sea τ una topología T_0 de Alexandrov. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) *τ es compacta.*

ii) *X tiene un subconjunto finito y denso en (X , τ_c).*

iii) *El conjunto de puntos cerrados es finito y en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado. En otras palabras, $\alpha(\tau)$ tiene finitos y suficientes minimales.*

Demostración.

i) $\Rightarrow$ ii) $\mathfrak{L} = \{\uparrow_{\alpha(\tau)} x : x \in X\}$ es un cubrimiento por abiertos de τ. Por ser X compacto existe $Y = \{x_1, ..., x_n\}$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^{n} \uparrow_{\alpha(\tau)} x_j$. En otros términos $\uparrow_{\alpha(\tau)} Y = X = \bigcup_{j=1}^{n} \uparrow_{\alpha(\tau)} x_j$, de donde:

$$\begin{aligned} x \in X &\Leftrightarrow x \in \uparrow_{\alpha(\tau)} Y \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in Y)(y\alpha(\tau)x) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in Y)(\forall V \in \tau_c)(x \in V \Rightarrow y \in V) \\ &\Rightarrow (\forall V \in \tau_c)(x \in V \Rightarrow Y \cap V \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{Y}^{\tau_c}. \end{aligned}$$

Hemos demostrado que $X = \overline{Y}^{\tau_c}$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea $Y \in \mathfrak{D}$ finito, donde $\mathfrak{D}$ es como en la Proposicón 3.3. Sabemos que $Min_{\alpha(\tau)}X \subseteq S \subseteq Y$, luego $Min_{\alpha(\tau)}$ es finito.
Sea $x \in X$. Como $y \in \mathfrak{D}$ y $\downarrow_{\alpha(\tau)} x$ es una vecindad de x en (X, τ_c), $Z = Y \cap \downarrow_{\alpha(\tau)} x \neq \emptyset$. Puesto que Z es finito tiene minimales. Sea z un minimal de Z. Si z no es un punto cerrado , existe $w \in \downarrow_{\alpha(\tau)} z$ con $w \neq z$. Tenemos que $\downarrow_{\alpha(\tau)} w \cap Y \neq \emptyset$, lo cual implica que existe $y \in Y$ tal que $y \in Z$, $y\alpha(\tau)z$, $y \neq z$, lo cual contradice el hecho que z es minimal de Z.Por consiguiente z es un punto cerrado en la adherencia de x.

iii) $\Rightarrow$ i) Esto fue demostrado en la Proposición 3.1. □

Proposición 3.5. *Sea $(X\ ,\ \tau)$ un espacio topológico T_0. $(X\ ,\ \sigma(\alpha(\tau)))$ es compacto si y sólo si el conjunto de puntos cerrados es finito y en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Asumiendo $\sigma(\alpha(\tau))$ compacta, para demostrar que en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado, se hace una prueba análoga a la exhibida en la Proposición 3.1. Nos resta ver que el conjunto de puntos cerrados es finito.
Consideremos $A_y=(X\setminus Min_{\alpha(\tau)}X)\cup\{y\}$, con $y \in Min_{\alpha(\tau)}X$. Por ser y minimal, $\downarrow_{\alpha(\tau)}y=\{y\}$, más aún $\downarrow_{\alpha(\tau)}Min_{\alpha(\tau)}X=Min_{\alpha(\tau)}X$, luego A_y es $\alpha(\tau)$-superior. Veamos que A_y es inaccesible por sups de dirigidos. Supongamos D un dirigido con sup, de forma tal que $A_y \cap D = \emptyset$; de ésto se desprende que $D \subseteq Min_{\alpha(\tau)}X$ y $D = \{p\}$ con p minimal de $\alpha(\tau)$, $y \neq p$ de donde, $supD = p$ y $p \notin A_y$, pues en A_y solo se encuentra el minimal y. Es decir, A_y es inaccesible por conjuntos dirigidos. $\{A_y\}_{y\in Min_{\alpha(\tau)}X}$ constituye un cubrimiento por abiertos de X que en caso de ser $Min_{\alpha(\tau)}X$ infinito no puede reducirse a un subcubrimiento finito.

$\Leftarrow$) Si asumimos que el conjunto de puntos cerrados es finito y en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado, por la Proposición 3.1 podemos concluir que $(X, \gamma(\alpha(\tau)))$ es compacto. Puesto que $\sigma(\alpha(\tau)) \subseteq \gamma(\alpha(\tau))$, $(X, \sigma(\alpha(\tau)))$ resulta compacto. □

Corolario 3.1. *Sea τ una topología T_0. $(X, \sigma(\alpha(\tau)))$ es compacto si y sólo si $(X, \gamma(\alpha(\tau)))$ es compacto.*

El siguiente resultado extiende la Proposición 3.4 a topologías T_0 que no son de Alexandrov.

Teorema 3.1. *Sea τ una topología T_0 y U-Scott. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *τ es compacta.*
ii) *El conjunto de puntos cerrados es finito y en la adhrencia de todo punto hay un punto cerrado.*
iii) *El conjunto de puntos cerrados es finito y denso en $(X\ ,\ \tau_c)$.*

Demostración. Se sigue de los resultados anteriores y del hecho de tener
$\sigma(\alpha(\tau)) \subseteq \tau \subseteq \gamma(\alpha(\tau))$. □

Nos resta por determinar qué otras topologías T_0 además de las U-Scott resultan compactas cuando su conjunto de puntos cerrados es finito y en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado, estudio que no abordamos en este artículo. El resultado de Lorrain y el teorema anterior son un caso particular del siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sea τ una topología T_0. τ es compacta si y sólo si el conjunto de puntos cerrados es compacto y en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Consideremos $\{F_i\}_{i\in I}$ una colección de cerrados de X con la propiedad de intersección finita. Puesto que en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado, la intersección de cualquier cerrado con $Min_{\alpha(\tau)}X$ es no vacía y por consiguiente $\{Min_{\alpha(\tau)}X \cap F_i\}_{i\in I}$ es una colección de cerrados de $Min_{\alpha(\tau)}X$ con la topología de subespacio, con la propiedad de intersección finita. Puesto que el conjunto de puntos cerrados es compacto $\bigcap_{i\in I}(Min_{\alpha(\tau)}X \cap F_i) \neq \emptyset$. Concluimos que $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ de donde (X,τ) es compacto.

$\Rightarrow$) Si asumimos (X,τ) compacto, para demostrar que en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado se hace una prueba análoga a la presentada en la Proposición 3.1. $Min_{\alpha(\tau)}X$ resulta compacto, pues si en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado, todo cubrimiento de $Min_{\alpha(\tau)}X$ es un cubrimiento (X,τ). □

Referencias

1. L. Acosta, *Topologías consistentes*, Boletín de Matemáticas Nueva Serie **5 No-1** (1998), 15–26.
2. S. Andima, y J. Thron, *Order-Induced topological properties*, Pacific Journal of Mathematics **75 No-2** (1978), 297–317.
3. G. Gierz, *A Compendium of Continuos Lattices*, Springer Verlag, New York, 1980.
4. B. Davey, H. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, University Press, Cambridge, 1990.
5. F. Lorrain, *Notes on topological spaces with minimun neighborhoods*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 616–627.
6. P. Johnstone, *Stone spaces*, University Press, Cambridge, 1982.
7. M. Murdeshwar, *General Topology*, John Wiley-Sons, New York, 1980.
8. R. Larson, *Minimal T_0-Spaces and Minimal T_D-Spaces*, Pacific Journal of Mathematics **31 No-2** (1969), 451-457.