Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen V No.2 (1998), pp. 147–157

UNA NOTA ACERCA DE LAS ESTRUCTURAS INICIALES Y FINALES EN LA CATEGORÍA DE LOS ESPACIOS DE PROXIMIDAD

VÍCTOR MANUEL ARDILA DE LA PEÑA
DANIEL AUGUSTO ROSAS RIAÑO
JOSÉ REINALDO MONTAÑEZ PUENTES(*)

Resumen. En esta nota se muestra una presentación de las estructuras iniciales y finales en la categoría de los espacios de proximidad.

Abstract. In this paper a presentation of initial and final structures in the category of proximity spaces is presented.

Keywords. Espacio de proximidad. Relación de p-vecindad. Función de proximidad. Estructura inicial. Estructura final.

Introducción

Los inicios de la teoría de los espacios de proximidad se ubican en el estudio de la "teoría de encadenamiento" de Riesz [11] alrededor de 1908. En el año 1952 Efremovic [3, 4] estudia el concepto de espacio de proximidad y lo axiomatiza generalizando la noción de espacio métrico y grupo topológico; Efremovic demuestra que los espacios topológicos proximizables corresponden a los completamente regulares; otra prueba de este hecho puede encontrarse entre otros

(*)Texto recibido 7/06/99, revisado 1/10/99. Víctor Manuel Ardila de la Peña, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia; e-mail: viardila@latinmail.com
José Reinaldo Montañez Puentes, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia; e-mail: montanez@matematicas.unal.edu.co
Daniel Rosas Riaño, Colegio IPARM, Universidad Nacional de Colombia.

en Willard [13]. Otras relaciones entre los espacios topológicos y los de proximidad fueron encontrados entre otros por Smirnov [12] en 1952, al estudiar los espacios compactos de Hausdorff y por Császár y Mrowka [2] en 1959, al relacionar los espacios de proximidad con la metrizabilidad. Alrededor del año 1963, Njastad [9] estableció la existencia de estructuras iniciales y finales en los espacios de proximidad a través de las uniformidades generalizadas. Datos de caracter histórico, así como también resultados que relacionan a los espacios de proximidad con algunas clases de espacios topológicos pueden ser encontrados en Naimpally-Warrack [8] 1970, de donde hemos tomado algunas de las referencias anteriores. En Willard [13] 1970 y en García Margalef [6] 1975, se muestra una estrecha relación entre las uniformidades totalmente acotadas y las proximidades sobre un mismo conjunto. En Willard [13] se sugiere la construcción de estructuras finales en espacios de proximidad para funciones sobreyectivas. En Lowen [7] 1997, se describe la construcción de las estructuras iniciales para espacios de proximidad a través de cubrimientos finitos.

De otra parte, las nociones de categoría topológica dadas por Preuss [10] y Adamek, Herrlich y Strecker [1] consideran como esenciales las nociones de estructuras iniciales y finales. Es conocido el hecho de que la categoría de los espacios de proximidad es una categoría topológica, lo cual se menciona entre otros en [10]. El objetivo de esta nota que consideramos de caracter divulgativo, es la construcción de una manera directa de las estructuras iniciales y finales en la categoría de los espacios de proximidad, considerando funciones arbitrarias. Un hecho importante de resaltar, es que la forma como se van a construir las estructuras finales en la categoría de los espacios de proximidad, provee la forma de extender una relación de proximidad a un superconjunto del conjunto en donde inicialmente se considera definida.

Es de anotar que para el desarrollo de este trabajo se han tomado de Willard [13] las definiciones pertinentes al tema como son: "relación de proximidad", "función de proximidad" y "relación de p-vecindad". Además, para la construcción de las estructuras finales en la categoría de los espacios de proximidad considerando funciones arbitrarias, se ha hecho uso de la construcción de la proximidad cociente sugerida también en Willard [13], en el cual se considera el caso de funciones sobreyectivas.

1. Conceptos básicos

1.1. Definición. Un espacio de proximidad es un par (X,p) donde X es un conjunto y p es una relación binaria sobre $\mathcal{P}(X)$, que satisface las siguientes propiedades para todos los subconjuntos A, B y C de X.

p_1. $\varnothing \not p A$

p_2. $\{a\}\ p\ \{a\}$ para cada $a \in X$.

p_3. $A\ p\ B$ implica que $B\ p\ A$.

p_4. $A\ p\ (B \cup C)$, si y solamente si, $A\ p\ B$ o $A\ p\ C$.

p_5. $A \not{p}\ B$, implica que existen C y D subconjuntos de X tales que $C \cap D = \varnothing$, $A \not{p}\ (X - C)$ y $B \not{p}\ (X - D)$.

1.2. Definición. Sean (X, p) y (Y, q) espacios de proximidad y sea $f : X \to Y$ una función, se dice que $f : (X, p) \to (Y, q)$ es una función de proximidad, si para todos A y B subconjuntos de X tales que $A\ p\ B$, se tiene que $f(A)\ q\ f\ (B)$.

1.3. Definición. La categoría de los espacios de proximidad notada *Prox* se define por:

a) Objetos de *Prox*: La clase de los espacios de proximidad.
b) Morfismos de *Prox*: Para cada par de espacios de proximidad, la colección de morfismos corresponde a las funciones de proximidad entre ellos.
c) La ley de composición en los morfismos de *Prox* corresponde a la composición usual de funciones.

2. Las nociones de estructura inicial y estructura final.

2.1. Definición. Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow$ Conj un funtor covariante. Sea $\mathbb{Y}$ un objeto de $\mathcal{C}$ con $F(\mathbb{Y}) = Y$. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Una F–estructura inicial para el conjunto X relativa a la función f y al objeto $\mathbb{Y}$ es un objeto $\mathbb{X}$ junto con un morfismo $\mathfrak{f} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ en la categoría $\mathcal{C}$ tales que $F(\mathfrak{f}) = f$ y $\mathfrak{f}$ cumple la propiedad universal inicial, ésto es, para todo objeto $\mathbb{Z}$ de $\mathcal{C}$ con $F(\mathbb{Z}) = Z$ y para toda función $g : Z \longrightarrow X$, si $\mathfrak{h} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Y}$ es tal que $F(\mathfrak{h}) = f \circ g$, entonces existe un único morfismo $\mathfrak{t} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{X}$ tal que $F(\mathfrak{t}) = g$ y $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{t} = \mathfrak{h}$. De manera dual se define F–estructura final.

2.2. Nota: Las estructuras iniciales y finales en la categoría *Prox* construidas en las secciones siguientes, son relativas al funtor de olvido de estructura de la categoría de los espacios de proximidad en la categoría de los conjuntos.

3. Estructuras iniciales en la categoría Prox.

3.1. Definición. Sea (Y, p) un espacio de proximidad y $f : X \to Y$ una función. En el conjunto de partes de X, se define la siguiente relación: si A y B son subconjuntos de X, entonces $A\ p'\ B$, sí y sólo si, $f(A)\ p\ f(B)$.

Enseguida vamos a mencionar dos hechos que se utilizarán en la construcción de las estructuras iniciales de *Prox*, en las cuales interviene p'.

3.2. Proposición. *La relación p' es de proximidad sobre X.*

Demostración.

p_1. Sea A un subconjunto de X. Veamos que $\varnothing \not{p}' A$. Si $\varnothing\ p'\ A$, entonces $f(\varnothing)\ p\ f(A)$, entonces $\varnothing\ p\ f(A)$ lo cual es una contradicción.

p_2. Sea $a \in X$. Veamos que $\{a\}\ p'\ \{a\}$. Como $f(\{a\})\ p\ f(\{a\})$, entonces $\{a\}\ p'\ \{a\}$.

p_3. Si A y B son subconjuntos de X tales que $A\ p'\ B$. Veamos que $B\ p'\ A$. Si $A\ p'\ B$, entonces $f(A)\ p\ f(B)$, luego $f(B)\ p\ f(A)$ y por lo tanto $B\ p'\ A$.

p_4. Sean A, B y C subconjuntos de X. Veamos que $A\ p'\ (B \cup C)$, sí y sólo si, $A\ p'\ B$ o $A\ p'\ C$. $A\ p'\ (B \cup C)$, sí y sólo si, $f(A)\ p\ (f(B) \cup f(C))$, sí y sólo si, $(f(A)\ p(f(B))$ o $(f(A)\ p\ f(C))$, sí y sólo si, $A\ p'\ B$ o $A\ p'\ C$.

p_5. Sean A y B subconjuntos de X. Supongamos que $A \not{p}' B$ y veamos que existen C, D subconjuntos de X, tales que $C \cap D = \varnothing$, $A \not{p}'(X - C)$ y $B \not{p}'(X - D)$. Como $A \not{p}' B$, entonces $f(A) \not{p}\ f(B)$, por lo tanto existen $\overline{C}$ y $\overline{D}$ subconjuntos de Y tales que $\overline{C} \cap \overline{D} = \varnothing$, $f(A) \not{p}\ (Y - \overline{C})$ y $f(B) \not{p}\ (Y - \overline{D})$. Sean $C = f^{-1}\overline{(C)}$ y $D = f^{-1}\overline{(D)}$.
Como $\overline{C} \cap \overline{D} = \varnothing$, entonces $\varnothing = f^{-1}(\varnothing) = f^{-1}\overline{(C \cap D)} = f^{-1}\overline{(C)} \cap f^{-1}\overline{(D)} = C \cap D$, luego $C \cap D = \varnothing$. Como p es relación de proximidad en Y y como $f(A) \not{p}\ (Y - \overline{C})$ y $f(B) \not{p}\ (Y - \overline{D})$, $f^{-1}(f(A)) \not{p}' f^{-1}(Y - \overline{C})$ y $f^{-1}(f(B)) \not{p}' f^{-1}(Y - \overline{D})$. Pero $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ y $B \subseteq f^{-1}(f(B))$, entonces, se tiene que $A \not{p}' f^{-1}(Y - \overline{C})$ y $B \not{p}' f^{-1}(Y - \overline{D})$, luego $A \not{p}'(X - f^{-1}(\overline{C}))$ y $B \not{p}'(X - f^{-1}(\overline{D}))$. Por lo tanto $A \not{p}'(X - C)$ y $B \not{p}'(X - D)$.
☑

Se sigue entonces que $f : (X, p') \to (Y, p)$ es función de proximidad.

3.3. Proposición. *(X, p') es la estructura inicial relativa a (Y, p) y a la función f.*

Demostración. Veamos que la función de proximidad $f : (X, p') \longrightarrow (Y, p)$ satisface la propiedad universal inicial. Sean (Z, p'') un espacio de proximidad y $g : Z \to X$ una función tal que $f \circ g : (Z, p'') \to (Y, p)$ es función de proximidad. Veamos que $g : (Z, p'') \to (X, p')$ es función de proximidad. Supongamos que E y H son subconjuntos de Z tales que $E\ p''\ H$, debemos demostrar que $g(E)\ p'\ g(H)$. Como $f \circ g$ es función de proximidad, entonces $(f \circ g)(E)\ p\ (f \circ g)(H)$, luego $f(g(E))\ p\ f(g(H))$, por lo tanto por definición de p' se tiene que $g(E)\ p'\ g(H)$. ☑

4. Estructuras finales en la categoría *Prox*.

La construcción de las estructuras finales relativas a funciones sobreyectivas es sugerida en [13][ejerc. 41c], para lo cual se consideran relaciones denominadas $\subset\subset$, $\subset\subset_1$ y $\subset\subset_2$, que conducen a la construcción de la proximidad cociente.

A continuación ilustraremos dicha construcción y luego utilizaremos estas ideas para la construcción de estructuras finales en la categoría *Prox* relativas a funciones no necesariamente sobreyectivas.

4.1. Definición. En un espacio de proximidad (X, p) se escribe $A \subset \subset B$, si y solamente si, $A \not p\ (X - B)$ y se llama a B una p–vecindad de A o una vecindad de proximidad de A.

4.2. Proposición. *Sea (X, p) un espacio de proximidad. La relación $\subset\subset$ en $\mathcal{P}(X)$ dada por la definición anterior, satisface las siguientes propiedades para todos A, B y C subconjuntos de X.*

v_1. $\varnothing \subset \subset A$.
v_2. *Si* $A \subset \subset B$, *entonces* $A \subseteq B$.
v_3. $A \subset \subset (B \cap C)$, *si y solamente si,* $A \subset \subset B$ *y* $A \subset \subset C$.
v_4. *Si* $A \subset \subset B$, *entonces para algún* $C, A \subset \subset C \subset \subset B$.

4.3. Proposición. *Sea X un conjunto no vacío y $\subset\ \subset$ una relación en $\mathcal{P}(X)$ que satisface v_1 a v_4 entonces se determina una relación de proximidad p en $\mathcal{P}(X)$ la cual se define por $A\ p\ B$, si y solamente si, $A \subset\not\subset (X - B)$.*

4.4 Definición. Sea (X, p) un espacio de proximidad y sea $f : X \to Z$ una función sobreyectiva. En el conjunto de partes de Z se definen las relaciones $\subset \subset_1$ y $\subset \subset_2$ así:
Dados C y D subconjuntos de Z, se dice que:

1. $C \subset \subset_1 D$, sí y solamente si, $f^{-1}(C) \subset \subset_p f^{-1}(D)$.
2. $C \subset \subset_2 D$, sí y solamente si; para cada racional binario s en $[0,\ 1]$ existe algún C_s subconjunto de Y tal que $C_0 = C, C_1 = D$ y si t es un racional binario en $[0,\ 1]$ y $s < t$, entonces $C_s \subset \subset_1 C_t$.

4.5. Proposición. $\subset\subset_2$ *es relación de p-vecindad.*

Demostración.

v_1. Veamos que para todo A subconjunto de Y, $\varnothing \subset\subset_2 A$. En efecto, definamos $C_0 = \varnothing$, $C_1 = A$ y para todo racional binario en el intervalo abierto $(0,1)$ (ésto es, $s = \frac{a}{2^k}$ donde a es un entero positivo menor que 2^k siendo k un entero positivo), $C_s = \varnothing$. Si s y t son racionales binarios en el intervalo abierto $(0,1)$ y $s < t$, entonces $C_s = \varnothing \subset\subset_1 C_t = \varnothing$ ya que $f^{-1}(\varnothing) \subset\subset_p f^{-1}(A)$ pues $\subset\subset_p$ es relación de p-vecindad. Además, $\varnothing \subset\subset_1 A = C_1$ pues $f^{-1}(\varnothing) \subset\subset_p f^{-1}(A)$, cualquiera que sea A.

v_2. Sean C y D subconjuntos de Y tales que $C \subset\subset_2 D$, veamos que $C \subseteq D$. Si $C \subset\subset_2 D$ entonces para todo racional binario s se tiene que existe $C_s \subseteq Y$ tal que $C_0 = C, C_1 = D$ y si s, t son racionales binarios en $(0,1)$ con $s < t$, entonces $C_s \subset\subset_1 C_t$, esto es $f^{-1}(C_s) \subset\subset_p f^{-1}(C_t)$, pero esto último implica que $f^{-1}(C_s) \subseteq f^{-1}(C_t)$ por ser $\subset\subset_p$ relación de p-vecindad. En particular si $s = 0$ y $t = 1$ se tiene $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$, de donde $f(f^{-1}(C)) \subseteq f((f^{-1}(D))$, luego $C \subseteq D$ pues f es sobreyectiva.

v_3. Veamos que $C \subset\subset_2 (D \cap E)$, si y solo si, $C \subset\subset_2 D$ y $C \subset\subset_2 E$. Supongamos primero que $C \subset\subset_2 (D \cap E)$. Entonces, para todo racional binario s en $[0,1]$ se tiene que existe $C_s \subseteq Y$ tales que $C_0 = C$, $C_1 = D \cap E$ y si s, t son racionales binarios en $[0,1]$, con $s < t$ entonces $C_s \subset\subset_1 C_t$, lo cual es equivalente a escribir $f^{-1}(C_s) \subset\subset_p f^{-1}(C_t)$. Definamos ahora $D_s = C_s$ si s es un racional binario en el intervalo $[0,1)$ y $D_1 = D$. Entonces $D_0 = C$, $D_1 = D$ y si s, t son racionales binarios en $[0,1)$ con $s < t$, $D_s \subset\subset_1 D_t$ mientras que si $t = 1$, debemos probar que $f^{-1}(D_s) \subset\subset_p f^{-1}(D)$; pero $f^{-1}(D_s) = f^{-1}(C_s) \subset\subset_p f^{-1}(D \cap E)$ y como además $D \cap E \subseteq D$ entonces $f^{-1}(D \cap E) \subseteq f^{-1}(D)$, por lo tanto $f^{-1}(D_s) \subset\subset_p f^{-1}(D)$, y así $D_s \subset\subset_1 D$, lo cual termina de probar que $C \subset\subset_2 D$. De igual forma se demuestra que $C \subset\subset_2 E$.

Ahora supongamos que $C \subset\subset_2 D$ y $C \subset\subset_2 E$. Para todo racional binario s en $[0,1]$ existen $C_s \subseteq Y$ y $K_s \subseteq Y$ tales que $C_0 = C$, $C_1 = D$, $K_0 = C$, $K_1 = E$ y si s y t son racionales binarios tales que $s < t$, entonces $C_s \subset\subset_1 C_t$ y $K_s \subset\subset_1 K_t$, por tanto $f^{-1}(C_s) \subset\subset_p f^{-1}(C_t)$ y $f^{-1}(K_s) \subset\subset_p f^{-1}(K_t)$. Sea $W = f^{-1}(C_s) \cap f^{-1}(K_s)$, entonces $W \subseteq f^{-1}(C_s)$ y $W \subseteq f^{-1}(K_s)$, pero $f^{-1}(C_s) \not\delta [(X - f^{-1}(C_t)]$ y $W \not\delta [X - f^{-1}(C_t)]$, luego $W \not\delta [(X - f^{-1}(C_t)) \cup (X - f^{-1}(K_t))]$, ésto es, $W \not\delta [X - (f^{-1}(C_t) \cap f^{-1}(K_t))]$, de donde $W \subset\subset_p (f^{-1}(C_t) \cap f^{-1}(K_t))$. Ahora, definiendo $F_s = C_s \cap K_s$ para cada s racional binario en $[0,1]$, se tiene que $F_0 = C$, $F_1 = D \cap E$ y si s, t son racionales binarios en $[0,1]$ con $s < t$, entonces $F_s \subset\subset_1 F_t$ ya que $f^{-1}(F_s) \subset\subset_p f^{-1}(F_t)$.

v_4. Si $C \subset\subset_2 D$ veamos que existe E, $E \subseteq Y$ tal que $C \subset\subset_2 E \subset\subset_2 D$.

Supongamos que $C \subset\subset_2 D$, entonces para todo racional binario s en $[0,1]$ existe $C_s \subseteq Y$ tales que $C_0 = C$, $C_1 = D$ y si s, t son racionales binarios en $[0,1]$ con $s < t$ entonces $C_s \subset\subset_1 C_t$, ésto es $f^{-1}(C_s) \subset\subset_p f^{-1}(C_t)$.

Para todo racional binario s en $(0,1]$ definamos $H_s = C_{\frac{s}{2}}$. Si s y t son racionales binarios en $[0,1]$ y $s < t$ entonces $C_{\frac{s}{2}} \subset\subset_1 C_{\frac{t}{2}}$, lo cual implica que $H_s \subset\subset_1 H_t$, por lo tanto $C \subset\subset_2 C_{\frac{1}{2}}$.

Por otro lado, definamos $K_0 = C_{\frac{1}{2}}, K_1 = D$ y para todo racional binario t en $[0,1]$ definamos $K_t = C_{\frac{t+1}{2}}$. Sean j y t racionales binarios en $[0,1]$ con $j < t$, entonces $\frac{1}{2} < \frac{j+1}{2} < \frac{t+1}{2} < 1$ y a su vez $\frac{j+1}{2}$ y $\frac{t+1}{2}$

son racionales binarios, luego por hipótesis $C_{\frac{j+1}{2}} \subset\subset_1 C_{\frac{t+1}{2}}$, de lo cual se sigue que $K_j \subset\subset_1 K_t$. Por todo lo anterior, $C_{\frac{1}{2}} \subset\subset_2 D$. ☑

4.6. Definición. Con las hipótesis de 4.4, la relación de proximidad sobre Z inducida (según 4.3) por la relación $\subset\subset_2$, es llamada **proximidad cociente** y será notada como q_2.

A continuación se ilustra la construcción de las estructuras finales en la categoría *Prox* relativas a funciones arbitrarias.

4.7. Definición. Sea (X,p) un espacio de proximidad y $f : X \to Y$ una función. En el conjunto de partes de Y se define una relación q así:
Si, Z y W son subconjuntos de Y, entonces $Z\ q\ W$, si y sólo si, se cumple alguna de las siguientes condiciones:

i) $(Z - f(X)) \cap (W - f(X)) \neq \varnothing$, o,
ii) $(Z \cap f(X))\ q_2\ (W \cap f(X))$

donde q_2 es la proximidad cociente antes definida.

4.8. Proposición. La relación q es de proximidad sobre Y.

Demostración.

p_1. Sea K subconjunto de Y. Veamos que $\varnothing \not q\ K$
Hay dos posibilidades:
a) $K - f(X) = \varnothing$. Entonces $K \subseteq f(X)$. Si $\varnothing q K$, no se cumple (i), entonces debería cumplirse (ii), ésto es, $(\varnothing \cap f(X))\ q_2\ (K \cap f(X))$ o sea $\varnothing\ q_2\ K$, lo cual es un absurdo pues q_2 es relación de proximidad. Entonces se debe tener $\varnothing \not q\ K$.
b) $K - f(X) \neq \varnothing$. Entonces $K \nsubseteq f(X)$.
Si $\varnothing q K$, si se cumpliera (i) se tendría $(\varnothing - f(X)) \cap (K - f(X)) \neq \varnothing$ o sea $\varnothing \cap (K - f(X)) \neq \varnothing$ lo cual es un absurdo; ahora, si se cumpliera (ii), entonces se tendría $(\varnothing \cap f(X))\ q_2\ (K \cap f(X))$ es decir $\varnothing\ q_2\ (K \cap f(X))$ lo cual es un absurdo pues q_2 es relación de proximidad. Luego $\varnothing \not q\ K$.

Entonces de a) y b) se sigue que $\varnothing \not q\ K$.

p_2. Sea $b \in Y$. Veamos que $\{b\}\ q\ \{b\}$.
Consideramos dos posibilidades:
a) $b \in Y - f(X)$. En tal caso se cumple (i), pues $\{b\} - f(X) = \{b\}$ y claramente $\{b\} \cap \{b\} \neq \varnothing$. Por lo tanto $\{b\}\ q\ \{b\}$.
b) $b \in f(X)$. En tal caso se cumple (ii), pues $\{b\} \cap f(X) = \{b\}$ y $\{b\}\ q_2\ \{b\}$ porque q_2 es relación de proximidad. Por lo tanto $\{b\}\ q\ \{b\}$.

Entonces de a) y b) se deduce que $\{b\}\ q\ \{b\}$

p_3. Sean L y M subconjuntos de Y, tales que $L\ q\ M$. Veamos que $M\ q\ L$.
Se debe tener:

$(L - f(X)) \cap (M - f(X)) \neq \varnothing$, o, $(L \cap f(X))\ q_2\ (M \cap f(X))$, de donde $(M - f(X)) \cap (L - f(X)) \neq \varnothing$, o, $(M \cap f(X))\ q_2\ (L \cap f(X))$; de lo cual se sigue que $M\ q\ L$.

p_4. Sean L, M y N subconjuntos de Y. Veamos que $L\ q(M \cup N)$, si y sólo si, $L\ q\ M$ o $L\ q\ N$.
Supongamos que $Lq(M \cup N)$, entonces se tienen las siguientes posibilidades:
a) $(L - f(X)) \cap [(M \cup N) - f(X)] \neq \varnothing$, o,
b) $(L \cap f(X)) q_2 [(M \cup N) \cap f(X)]$.
Si se cumple a) entonces
$(L - f(X)) \cap [(M - f(X)) \cup (N - f(X))] \neq \varnothing$, luego
$[(L - f(X)) \cap (M - f(X))] \cup [(L - f(X)) \cap (N - f(X))] \neq \varnothing$,
entonces $(L - f(X)) \cap (M - f(X)) \neq \varnothing$, o, $(L - f(X)) \cap (N - f(X)) \neq \varnothing$, por lo tanto $L\ q\ M$ o $L\ q\ N$.
Ahora, si se cumple (b), se tiene que $(L \cap f(X))\ q_2\ [(M \cap f(X)) \cup (N \cap f(X))]$ y como q_2 es relación de proximidad se tiene que $(L \cap f(X))\ q_2\ (M \cap f(X))$, o, $(L \cap f(X)) q_2 (N \cap f(X))$, luego $L\ q\ M$ o $L\ q\ N$.
Recíprocamente, supongamos que $L\ q\ M$ o $L\ q\ N$.
Entonces, si $L\ q\ M$ se tienen los siguientes casos:
a) $(L - f(X)) \cap (M - f(X)) \neq \varnothing$,
b) $(L \cap f(X))\ q_2\ (M \cap f(X))$.
Si $(L - f(X)) \cap (M - f(X)) \neq \varnothing$ entonces $(L - f(X)) \cap [(M \cup N) - f(X)] \neq \varnothing$, de donde $L\ q\ (M \cup N)$.
Ahora, si $(L \cap f(X))\ q_2\ (M \cap f(X))$, entonces $(L \cap f(X))\ q_2\ [(M \cup N) \cap f(X)]$, por lo tanto $L\ q\ (M \cup N)$.
Así, en cualquiera de los dos casos se tiene que $L\ q\ (M \cup N)$.
Similarmente se tiene que si $L\ q\ N$, entonces $L\ q\ (M \cup N)$.

p_5. Sean L y M subconjuntos de Y, tales que $L \not{q}\ M$.
Entonces $(L - f(X)) \cap (M - f(X)) = \varnothing$, y, $(L \cap f(X))\ \not{q}_2\ (M \cap f(X))$.
Como q_2 es relación de proximidad sobre $f(X)$, existen H y K subconjuntos de $f(X)$ tales que $H \cap K = \varnothing$, $(L \cap f(X))\ \not{q}_2\ (f(X) - H)$ y $(M \cap f(X))\ \not{q}_2\ (f(X) - K)$.
Sean $H_1 = H \cup (L - f(X))$ y $K_1 = K \cup (M - f(X))$; claramente $H_1 \cap K_1 = \varnothing$.
Ahora veamos que $L \not{q}\ (Y - H_1)$ y que $M \not{q}\ (Y - K_1)$. Obsérvese que $(L - f(X)) \cap [(Y - H_1) - f(X)] = \varnothing$ y que $[(Y - H_1) \cap f(X)] = f(X) - H$, por lo tanto $(L \cap f(X))\ \not{q}_2\ [(Y - H_1) \cap f(X)]$, de lo cual se deduce que $L \not{q}\ (Y - H_1)$.
Similarmente se tiene que $M \not{q}\ (Y - K_1)$. ☑

4.9. Nota. Obsérvese que en la demostración anterior, se ha mostrado implícitamente como extender una relación de proximidad a un superconjunto del conjunto en donde inicialmente se considera definida.

Para demostrar que $f : (X,p) \to (Y,q)$ es una función de proximidad, debemos probar primero la siguiente proposición

4.10. Proposición. *Sean (X,p) y (Y,q) espacios de proximidad y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es una función de proximidad, sí y solo si, para todos subconjuntos C y D de Y, $C \subset \subset_q D$ implica $f^{-1}(C) \subset \subset_p f^{-1}(D)$.*

Demostración. Supongamos que f es una función de proximidad. Sean C y D subconjuntos de Y tales que $C \subset \subset_q D$. Si $f^{-1}(C) \subset \not\subset_p f^{-1}(D)$ entonces $f^{-1}(C)\ p\ (X - f^{-1}(D))$. Como f es una función de proximidad se tiene que $f(f^{-1}(C))\ q\ f[X - f^{-1}(D)]$. Pero $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ y $f[X - f^{-1}(D)] \subseteq f(X) - D \subseteq Y - D$. Entonces $C\ q\ (Y - D)$, luego $C \subset \not\subset_q D$, lo cual es un absurdo.

Recíprocamente, supongamos que para todos subconjuntos C y D de Y se tiene que $C \subset \subset_q D$ implica $f^{-1}(C) \subset \subset_p f^{-1}(D)$ y veamos que f es función de proximidad.
Sean A y B subconjuntos de X tales que $A\ p\ B$, veamos que $f(A) q f(B)$.
Supongamos que $f(A) \not{q}\ f(B)$, entonces $f(A) \subset \subset_q (Y - f(B))$ luego $f^{-1}(f(A)) \subset \subset_p f^{-1}(Y - f(B))$. Pero $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ y $f^{-1}(Y - f(B)) = X - f^{-1}(f(B))$, y como $B \subseteq f^{-1}(f(B))$ entonces $f^{-1}(Y - f(B)) = X - f^{-1}(f(B)) \subseteq X - B$. Por lo tanto, $A \subset \subset_p (X - B)$, entonces $A \not{p}\ B$, lo cual es absurdo. ☑

4.11. Proposición. *Sea (X,p) un espacio de proximidad, $f : X \to Y$ una función y q la relación de proximidad sobre Y dada por 4.7 y 4.8. Entonces la función $f : (X,p) \to (Y,q)$ es de proximidad.*

Demostración. Por la proposición anterior, ésto equivale a probar que si C y D son subconjuntos de Y tales que $C \subset \subset_q D$ entonces $f^{-1}(C) \subset \subset_p f^{-1}(D)$. Si $C \subset \subset_q D$ entonces $C \not{q}\ (Y - D)$, entonces $(C - f(X)) \cap [(Y - D) - f(X)] = \varnothing$ y $(C \cap f(X)) \not{q_2} [(Y - D) \cap (f(X))]$. Como $(Y - D) \cap f(X) = f(X) - D = f(X) - [D \cap (f(X)]$ entonces, $(C \cap f(X)) \not{q_2} [f(X) - (D \cap (f(X))]$. Pero de esto último se deduce que $(C \cap f(X)) \subset \subset_2 (D \cap f(X))$. Luego, como $\subset \subset_2$ está contenido en $\subset \subset_1$, entonces $(C \cap f(X)) \subset \subset_1 (D \cap f(X))$, luego $f^{-1}(C \cap f(X)) \subset \subset_p f^{-1}(D \cap f(X))$, ésto es $f^{-1}(C) \subset \subset_p f^{-1}(D)$. Por lo tanto f es función de proximidad. ☑

4.12. Proposición. Veamos que $f : (X,p) \to (Y,q)$ con las condiciones dadas en 4.11 cumple la propiedad universal final.

Demostración. Sea (Z,r) un espacio de proximidad y sea $h : Y \to Z$ una función tal que $h \circ f : (X,p) \to (Z,r)$ es función de proximidad. Debemos demostrar que $h : (Y,q) \to (Z,r)$ es función de proximidad. Para ver ésto, sean $f_1 : (X,p) \to (f(X), q_2)$ definida por $f_1(x) =: f(x)$ donde q_2 es la proximidad cociente y $h_1 : (f(X), q_2) \to (Z, r)$ definida por $h_1(x) =: h(x)$. Veamos primero algunos resultados:

i) Si $h_1 \circ f_1$ es función de proximidad, entonces h_1 es función de proximidad.
En efecto, sean C y D subconjuntos de Z tales que $C \subset\subset_r D$, entonces para todo s racional binario en [0, 1] existe L_s subconjunto de Z tales que $L_0 = C$, $L_1 = D$, y si s, t son racionales binarios en [0, 1] tales que $s < t$, entonces $L_s \subset\subset_r L_t$. Como $h_1 \circ f_1$ es función de proximidad, entonces $(h_1 \circ f_1)^{-1}(L_s) \subset\subset_p (h_1 \circ f_1)^{-1}(L_t)$, de donde, $f_1^{-1}[h_1^{-1}(L_s)] \subset\subset_p f_1^{-1}[h_1^{-1}(L_t)]$.
Sean $D_s = h_1^{-1}(L_s)$ para cada s racional binario en [0, 1]. Entonces $f^{-1}(D_s) = f_1^{-1}(D_s)$ y $f_1^{-1}(D_s) \subset\subset_p f_1^{-1}(D_t)$ si $s < t$, por lo tanto $D_s \subset\subset_1 D_t$ (4.1), luego $D_s \subset\subset_2 D_t$, ésto es $h_1^{-1}(L_s) \subset\subset_2 h_1^{-1}(L_t)$; en particular $h_1^{-1}(C) \subset\subset_2 h_1^{-1}(D)$, haciendo $L_0 = C$ y $L_1 = D$. En consecuencia, h_1 es función de proximidad.

ii) Si h_1 es función de proximidad, entonces h es función de proximidad.
En efecto, sean C y D subconjuntos de Y tales que $C \; q \; D$. Entonces $(C - f(X)) \cap (D - f(X)) \neq \varnothing$ o $(C \cap f(X)) \; q_2 \; (D \cap f(X))$. Entonces $(C \cap D) - f(X) \neq \varnothing$, o, $h_1(C \cap f(X)) \; r \; h_1(D \cap f(X))$. Entonces $h(C \cap D) \neq \varnothing$, o, $h(C \cap f(X)) \; r \; h(D \cap f(X))$. Entonces $h(C) \cap h(D) \neq \varnothing$, o, $h(C) \; r \; h(D)$, de donde $h(C) \; r \; h(D)$, en cualquiera de los dos casos. Por lo tanto h es función de proximidad.

iii) Si $h \circ f$ es función de proximidad, entonces $h_1 \circ f_1$ es función de proximidad.
Sean A, B subconjuntos de X tales que $A \; p \; B$, entonces $h(f(A)) \; r \; h(f(B))$ puesto que $h \circ f$ es función de proximidad. Pero $f(A)$ y $f(B)$ son subconjuntos de $f(X)$, de donde $h(f(A)) = h_1(f(A))$ y $h(f(B)) = h_1(f(B))$. Por lo tanto $h_1(f(A)) \; r \; h_1(f(B))$. Pero además $f(A) = f_1(A)$ y $f(B) = f_1(B)$; de donde $h_1(f_1(A)) \; r \; h_1(f_1(B))$. ☑

Volvamos ahora a nuestro objetivo principal, es decir, supongamos que $h \circ f$ es función de proximidad y veamos que h es función de proximidad. Si $h \circ f$ es función de proximidad por (iii), $h_1 \circ f_1$ es función de proximidad, luego por (i), h_1 es función de proximidad y finalmente por (ii), h es función de proximidad.

Referencias

1. Adámek J., Herrlich H., Strecker G., *Abstract and concrete categories*, Wiley - interscience, New York, 1990.
2. Császár A. et Mrówka S., *Sur la compactification des espaces de proximité*, Fundam. Math. **46**, 195-207; MR 20# 7255.
3. Efremovic V. A., *Infinitesimal spaces*, Dokl. Akad. Nauk. **76** (1951), SSSR, 341-343 (in Russian); MR 12, 744.

4. Efremovic V. A., *The geometry of proximity*, I. Mat. Sb. **31(73)** (1952), 189-200 (in Russian); MR 14, 1106.
5. Engelking R., *Outline of General Topology*, North-Holland, Publishing Company, 1968.
6. García M., Margalef J., Olano C., Outerelo E. and Pinilla J., *Topología. Tomo 1*, Alhambra, Madrid, 1975.
7. Lowen R., *Aproach Spaces*, Clarendon Press, Oxford, 1997.
8. Naimpally S. A. and Warrack B. D., *Proximity Spaces*, Cambridge at the University Press, London, 1970.
9. Njastad O., *Some properties of proximity and generalized uniformity*, Math. Scand. **12**, 47-56; MR 28#2523.
10. Preuss G., *Theory of Topological Structures*, "An aproach to categorical topology", D. Reidel Publishing Company, 1988.
11. Riesz F., *Stetigkeitsbegriff and Abstrakte Mengenlehre, Atti IV*, Congr. Intern. Mat. Roma **II**, 18-24.
12. Smirnov Y. M., *On Proximity spaces*, Mat. Sb. **31(73)**, 543-574 (in Russian); English translation in Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 38, 5-35; MR 14, 1107.
13. Willard S., *General Topology*, Addison Wesley Publishing Company, 1970.