Construcción y algunas propiedades elementales del anillo de series formales torcidas

Edward O. Latorre Acero[1,a]

Resumen. En este artículo se presenta la construcción del anillo de series formales torcidas mediante el proceso de completación de anillo sobre una filtración para el anillo de polinomios torcidos. Esta estructura aparece en la teoría de álgebras cuánticas [6] y en la teoría de Iwasawa no conmutativa [13] y [16]. Bajo ciertas condiciones, la completación será un dominio local, noetheriano, primo y Auslander regular. Se incluye además, el cálculo de algunas dimensiones (dimensión de Krull, dimensión global y dimensión uniforme). La última sección muestra algunos ejemplos destacados que pueden ser consultados en [7, 8, 13, 16, 17].

Palabras claves: Anillos no-conmutativos noetherianos, dominios regulares Auslander, anillos y módulos graduados y filtrados, topología I-ádica, anillo de series torcidas, anillos coordenados de grupos cuánticos.

Abstract. In this paper the construction of skew power series ring is shown using the completion process over filtration for skew polynomial rings. This structure were motivated by issues in algebraic quantum theory [6] and noncommutative Iwasawa theory [13] y [16]. Under further conditions, the completion becomes a local, noetherian, prime, Auslander regular domain and some dimensions are reviewed (Krull, global and uniform dimension). The last part contains notable examples of [7, 8, 13, 16, 17].

Keywords: Noetherian noncommutative rings, Auslander regular domains, graded and filtered rings and modules, I-adic topology, skew power series ring, quantum coordinate rings.

Mathematics Subject Classification: Primary: 16S80, 16W35, 16S36, 16U20, Secondary: 16W50, 16E65.

Recibido: septiembre de 2014 Aceptado: octubre de 2014

1. Introducción

Las extensiones de Ore son estructuras ampliamente estudiadas por su alto valor teórico y práctico. En años recientes se ha visto su importancia en varios contextos del álgebra no conmutativa, incluyendo anillos de polinomios diferenciales, álgebras de grupo, álgebras envolventes de un álgebra de Lie soluble

[0]El presente trabajo fue presentado para el Concurso Nacional Otto de Greiff Mejores trabajos de grado, versión 17, año 2013, donde obtuvo el primer lugar dentro del Área Ciencias Naturales

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]eolatorrea@unal.edu.co

y anillos coordenados de grupos cuánticos. Algunos cuestiones acerca de estas extensiones motivan indagar acerca de grupos cuánticos, álgebras envolventes, teoría de localización y teoría de la dimensión, haciendo de especial interés documentar los desarrollos recientes para anillos no conmutativos.

Sea R un anillo con identidad (no necesariamente conmutativo) y sean σ un endomorfismo de R y δ una σ-derivación. El anillo de polinomios torcidos $R[x;\sigma,\delta]$ es un objeto clásico en el álgebra no conmutativa. El ánimo de este artículo es documentar las principales propiedades algebraicas y homológicas del anillo de series formales torcidas $R[[x;\sigma,\delta]]$ visto como la completación del anillo de polinomios torcidos y exhibir algunos ejemplos. Nuestra presentación esta orientada por los trabajos de Venjakob en [13] y en [16], y de Letzter en [7, 9, 8, 17].

El artículo esta organizado como sigue: la Sección 2 muestra la técnica de filtración-graduación como herramienta fundamental para estudiar algunas propiedades homológicas. Se realiza una breve introducción a la técnica de completación de anillos y módulos, destacando a la completación I-ádica como la completación generada por la filtración de las potencias de un ideal bilátero propio I del anillo R (filtración I-ádica), consultar [11] y [15].

La Sección 3 presenta al anillo de polinomios torcidos $R[x,\sigma,\delta]$ y expone la construcción de su completación desde los distintos enfoques considerados en la literatura existente, ver [13, 16, 17]. Haciendo uso de la técnica de filtración-graduación se introducen las propiedades homológicas que se conservan desde el anillo base a la respectiva extensión y completación, además incluye la construcción de las series de Laurent torcidas como en [13].

La Sección 4 hace una presentación de las álgebras de Iwasawa no conmutativas siguiendo la presentacion dada por Venjakob en [13] y [16]. En paralelo, se destaca el desarrollo de anillos de coordenadas cuánticas llevado a cabo por Wang dentro de su tesis doctoral [17], el cual incluye matrices cuánticas, espacios simplécticos cuánticos y espacios euclideanos cuánticos.

2. Anillos $\mathbb{Z}$-filtrados y su anillo graduado asociado

Una de las técnicas de la teoría de anillos más fructífera que puede ser aplicada al estudio de anillos no conmutativos es la provista por el estudio de anillos filtrados y su anillo graduado asociado. Una clase importante de anillos no conmutativos son las extensiones de Ore, para los cuales es bien conocido que muchas propiedades pasan desde el anillo base a su extensión polinomial. En esta sección se revisarán algunas de estas propiedades buscando mostrar resultados análogos para el anillo de series formales torcidas, que serán utilizados en las secciones siguientes.

Definición 2.1. Un anillo R es $\mathbb{Z}$**-graduado** si posee una familia de subgrupos del grupo aditivo R, $\{R_p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ tales que:

i) $R_pR_q \subseteq R_{p+q}, \forall p,q \in \mathbb{Z}$.

ii) $R = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \oplus R_p$.

Para $p \in \mathbb{Z}$, R_p es la parte homogénea de grado p de R. La familia $\{R_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es la **graduación** de R.

Definición 2.2. Un anillo R se dice **$\mathbb{Z}$-filtrado** con filtración $F(R)$ si existe una sucesión de subgrupos del grupo aditivo de R, $F(R) = \{F_p(R) : p \in \mathbb{Z}\}$ tal que:

i) $\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F_p(R) = R$,

ii) $1 \in F_0(R)$,

iii) $F_{p-1}(R) \subseteq F_p(R), \forall p \in \mathbb{Z}$,

iv) $F_p(R)F_q(R) \subseteq F_{p+q}(R), \forall p, q \in \mathbb{Z}$.

Se dice que $F(R)$ es *separada* si además satisface:

v) $\bigcap_{p\in\mathbb{Z}} F_p(R) = \{0\}$.

Sea R un anillo $\mathbb{Z}$-filtrado con filtración $F(R)$. El *anillo graduado asociado* de R con respecto a $F(R)$, denotado $Gr(R)$, esta definido como el anillo $\mathbb{Z}$-graduado $Gr(R) = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} Gr(R)_p$ con $Gr(R)_p = F_p(R)/F_{p-1}(R)$. Para un anillo filtrado R, algunas propiedades de la estructura algebraica de $Gr(R)$ deben pasar a R.

Proposición 2.3. *Sea R un anillo $\mathbb{Z}$-filtrado con filtración $F(R)$.*

i) Sea $F(R)$ separada. Si $Gr(R)$ es un dominio, entonces R es un dominio.

ii) Si $Gr(R)$ es un anillo primo, entonces R es un anillo primo.

iii) Si $Gr(R)$ es noetheriano a izquierda (derecha), entonces R es noetheriano a izquierda(derecha).

Demostración. Ver [12], Parte 1, capítulo 1, sección 6. □

2.1. Completación de anillos y módulos

Como el anillo de series formales $R[[x]]$ está definido como la completación del anillo de polinomios $R[x]$ para el caso conmutativo, ver [12], su análogo no conmutativo $R[[x;\sigma,\delta]]$ es construido siguiendo el mismo esquema: completando al anillo de polinomios torcidos $R[x;\sigma,\delta]$ con respecto a una filtración adecuada.

La completación sobre una filtración tiene un carácter tanto algebraico como topológico, lo que constituye una conexión entre el álgebra y la topología que funciona muy bien en el caso conmutativo. En álgebra no conmutativa, el puente entre estas dos ramas de la matemática es mucho más estrecho, sin embargo es posible aplicar algunas técnicas analíticas si se cuenta con buenas propiedades algebraicas, ver [11].

Definición 2.4. Sea R un anillo $\mathbb{Z}$-filtrado, con filtración $F(R)$. La **completación** del anillo R, denotado por $\widehat{R}$, con respecto a su filtración, se define como el límite inverso del sistema proyectivo $\{R/F_p(R), \phi_q^p : R/F_p(R) \mapsto R/F_q(R), p \leq q\}$.

Nota 2.5. La condición $i)$ de la Definición 2.2 permite considerar al anillo $\mathbb{Z}$-filtrado R como un **anillo topológico**, ver [2, 11]. Su topología esta dada por una base de entornos de 0 formada por la colección numerable $\{F_p(R)\}_{p\in\mathbb{Z}}$, lo que constituye una filtración topológica de abiertos-cerrados. Si la filtración sobre R satisface la condición $v)$ de la Definición 2.2, la correspondiente topológía sobre R es de **Hausdorff**.

Definición 2.6. Sea R un anillo topológico. Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, si para todo entorno U de 0, existe $N(U) \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in U$ siempre que $m, n \geq N(U)$. El anillo R se dice **completo**, si toda sucesion de Cauchy es convergente.

Definición 2.7. Una filtración $F(R)$ de un anillo $\mathbb{Z}$-filtrado R se dice completa si $\widehat{R} \cong R$.

2.1.1. Completación I-ádica

Definición 2.8. Sea R anillo, I un ideal de R. La filtración I-ádica de R se obtiene al considerar $F_n(R) = R, \forall n \geq 0$ y $F_n(R) = I^{-n}, \forall n < 0$ en el cual el sistema fundamental de vecindades de 0 en R está dado por las potencias de I.

2.2. Teoría de la dimensión

En esta subsección se utilizarán algunos conceptos del álgebra homológica para estudiar las dimensiones usadas con mayor frecuencia dentro del álgebra tanto conmutativa como no conmutativa.

Definición 2.9. Sea R un anillo. Para cada ordinal $\alpha \geq -1$ se definen las siguientes clases κ_α de R-módulos:

i) $\kappa_{-1} := \{0\}$.

ii) Se asume que la clase κ_β está definida para cada $\beta < \alpha$ y se define κ_α de la siguiente manera: $M \in \kappa_\alpha$ si y sólo si, para cadena de submódulos $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots$ de M se tiene que $M_i/M_{i+1} \in \bigcup_{\beta<\alpha} \kappa_\beta$, para casi todo i.

iii) Si $M \cong M'$, entonces $M \in \kappa_\alpha$ si y sólo si, $M' \in \kappa_\alpha$.

Se dice que la dimensión de Krull de M existe, o que está definida, si existe α tal que $M \in \kappa_\alpha$, y en tal caso se escribe $Kdim(M) \leq \alpha$. El menor α tal que $M \in \kappa_\alpha$ se denomina la **dimensión de Krull** de M y se escribe $Kdim(M) = \alpha$. Si para cada α, $M \notin \kappa_\alpha$, entonces M no tiene dimensión de Krull.

Definición 2.10. Sea R un anillo. Definimos $(r)Kdim(R) := Kdim(R_R)$, si esta última existe.

Proposición 2.11. *Sea R anillo noetheriano filtrado completo, entonces:*

i) $(r)Kdim(R) \leq (r)Kdim(Gr(R))$.

ii) Para $F_0(R)$ subanillo de R, se satisface que

$Kdim(F_0(R)) \leq Kdim(Gr(R)) + 1$.

Demostración. Ver [15], capítulo D. □

Definición 2.12. Sea M un R-módulo no nulo,

i) Se dice que la resolución proyectiva

$$\cdots \to P_{n+1} \overset{f_{n+1}}{\to} P_n \overset{f_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \overset{f_1}{\to} P_0 \overset{f_0}{\to} M \to 0$$

de M es **finita** de longitud $n \geq 0$ si $P_n \neq 0$ y $P_i = 0$ para $i \geq n+1$.

ii) Se dice que M tiene **dimensión proyectiva finita** si M tiene al menos una resolución proyectiva finita. Si este no es el caso, se dice que la dimensión proyectiva de M es **infinita** y se escribe que $\mathrm{pd}(M) = \infty$.

Definición 2.13. Sea R un anillo, la **dimensión global proyectiva a izquierda de** R se denota por lpgld(R), y se define por

$$\mathrm{lpgld(R)} := \sup\{\mathrm{pd(M)}|M \text{ es un } R\text{-módulo a izquierda}\}.$$

De manera similar se define la **dimensión global proyectiva a derecha** de R y se denota por rpgld(R).

Definición 2.14. Sea R un anillo. Se dice que R es **regular** a izquierda (derecha) si cada R-módulo izquierdo (derecho) finitamente generado tiene dimensión proyectiva finita.

Lema 2.15. *Sea R un anillo filtrado.*

(i) Si M_R es filtrado, entonces $\mathrm{pd(M_R)} \leq \mathrm{pd(Gr(M))}$.

(ii) $\mathrm{lgld(R)} \leq \mathrm{lgld(Gr(R))}$.

(iii) Si $Gr(R)$ es regular a izquierda(derecha), entonces R es regular a izquierda(derecha).

Demostración. Ver [12], Parte 2, capítulo 7. □

Definición 2.16. Sea R un anillo. El grado de un R-módulo M finitamente generado se define como

$$j_R(M) = min\{i|Ext^i_R(M,R) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

ó ∞ si tal i no existe.

Definición 2.17. Se dice que un anillo R:

i) satisface la **Condición de Auslander** si para cada R-módulo noetheriano M y para todo $i \geq 0$, $j_R(N) \geq i$ para todo submódulo $N \subseteq Ext^i_R(M,R)$.

ii) es **Auslander-Gorenstein** (AG) si R es noetheriano derecho e izquierdo, satisface la condición de Auslander, y tiene dimensión proyectiva finita.

iii) es **Auslander Regular** si es Auslander-Gorenstein y tiene dimensión global finita.

Proposición 2.18. *Sea R anillo noetheriano $\mathbb{Z}$-filtrado con filtración I-ádica. Si el anillo graduado asociado $Gr(R)$ es AG, respectivamente Auslander Regular, entonces R es AG, respectivamente Auslander Regular.*

Demostración. Ver [11], Teorema 4.2.5. □

3. El anillo de series formales torcidas

La construcción del anillo de series formales torcidas $S = R[[x; \sigma, \delta]]$ sigue el trabajo llevado a cabo por Venjakob en [16]: asume que el anillo base R es local con radial de Jacobson $J(R)$. Sin embargo, presentaciones de su construcción contemplan completaciones sobre anillos pseudocompactos no necesariamente noetherianos, ver [13] y en un aspecto más general, el anillo R se dota de una filtración I-ádica separada y completa, para la cual, el anillo graduado $Gr(R)$ asociado a la filtración I-ádica es noetheriano, condiciones de compatibilidad sobre σ, δ son impuestas para asegurar la existencia del anillo S, ver [7, 17].

3.1. Anillo de polinomios torcidos

Sea R un anillo con identidad (no necesariamente conmutativo) y sean σ un endomorfismo de R y δ una σ-derivación (i.e., una aplicación que satisface $\delta(a+b) = \delta(a)+\delta(b)$ y $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b$, para todo $a, b \in R$). Consideremos su extensión de Ore $T := R[x; \sigma, \delta]$ (ver [12]). Es bien conocido que T es un anillo de tipo polinomial con producto determinado por la relación $xr = \sigma(r)x+\delta(r)$, $\forall r \in R$. En el caso $\delta = 0$, la extensión de Ore tiene la forma de un anillo de polinomios torcidos $R[x; \sigma]$. Cuando σ es la aplicación identidad, la extensión de Ore se convierte en el anillo de operadores diferenciales $R[x; \delta]$, objetos clasificados como extensiones $\sigma - PBW$ torcidas, ver [10].

Hechos bien conocidos para el anillo de polinomios torcidos $R[x; \sigma, \delta]$, son enunciados a continuación sin demostración. Una fuente obligada para estos resultados es [5] y [12].

Proposición 3.1. *Sea σ inyectivo y R dominio, entonces $R[x; \sigma, \delta]$ es un dominio.*

Proposición 3.2. *Sea σ automorfismo y R anillo primo, entonces $R[x; \sigma, \delta]$ es primo.*

Teorema 3.3 (Teorema de la base de Hilbert)**.** *Sea σ automorfismo y R noetheriano, entonces $R[x; \sigma, \delta]$ es noetheriano.*

Teorema 3.4 (Teorema de sicigias de Hilbert)**.** *Sea σ automorfismo y R noetheriano, entonces:*

i) $lgld(R) \leq lgld(R[x; \sigma, \delta]) \leq lgld(R) + 1$, *si* $lgld(R) < \infty$.

ii) Si R es semisimple, entonces $rgld(R[x; \sigma, \delta]) = 1$.

Teorema 3.5. *Sea R un anillo regular noetheriano a izquierda. Para σ automorfismo, se satisface que $R[x; \sigma, \delta]$ es regular noetheriano a izquierda.*

Teorema 3.6. *Sean R anillo noetheriano, M_R un R-módulo derecho finitamente generado Para σ automorfismo, $R[x; \sigma, \delta]$ y $M[x; \sigma, \delta] := M \otimes_R T$. Se cumple*

i) $Kdim(M) \leq Kdim(M[x; \sigma, \delta]) \leq Kdim(M) + 1$. *En particular,*
$(r)Kdim(R) \leq (r)Kdim(R[x; \sigma, \delta]) \leq (r)Kdim(R) + 1$.

ii) $(r)Kdim(R[x; \sigma]) = (r)Kdim(R) + 1$.

3.2. Construcción del anillo de series formales torcidas

Sea R un anillo, σ un endomorfismo de R y δ una σ-derivación, esto es, un homomorfismo de grupo que satisface $\delta(rs) = \delta(r)s + \sigma(r)\delta(s), \forall r, s \in R$. El par de aplicaciones (σ, δ) se denomina *derivación torcida* de R.

Sea S el grupo aditivo de series de potencias formales en x, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n x^n, r \in R$. Usando la regla de multiplicación a derecha entre x y las variables r dada por la relación $xr = \sigma(r)x + \delta(r), r \in R$, se tiene que la multiplicación entre dos elementos de S se determina como:

$$\left(\sum_{j\geq 0} a_j x^j\right)\left(\sum_{l\geq 0} b_l x^l\right) = \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{j\geq n} a_j M_{j-n,n}(\delta,\sigma)(b_{m-n})\right) x^m,$$

para $M_{k,l}(Y, Z)$ la suma de todos los monomios no conmutativos en las variables Y, Z con k factores Y y l factores Z, para enteros $k, l \geq 0$, ver [13].

Sin embargo, no siempre es el caso que $\sum_{n=0}^{m}\sum_{j\geq n} a_j M_{j-n,n}(\delta,\sigma)(b_{m-n})$ esté bien definido en R. Aunque, bajo las consideraciones siguientes, la fórmula de multiplicación estará bien definida y se podrá asegurar que S es un anillo de series formales torcido bien definido, el cual se denotará como $S = R[[x; \sigma, \delta]]$.

1) Al tomar $\delta = 0$ entonces $x^n r = \sigma^n(r)x^n$ así, la suma $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\sigma^i(b_{n-i})$ es finita y con elementos de R, por lo tanto el producto está bien definido y el anillo existe.

2) Al tomar R anillo completo con respecto a la topología I-ádica, para I algún ideal de R y σ automorfismo de R tal que $(\sigma(I) \subseteq I)$ y que $\delta(R) \subseteq I$, $\delta(I) \subseteq I^2$, entonces $\delta(I^n) \subseteq I^{n+1}$ es cierto para $n \geq 0$ asegurando que los términos libres $r + \delta(r) + \delta^2(r) + \cdots$ pertenezcan a R, ver [16].

Algunos resultados para el anillo $R[[x; \sigma]]$ aparecen descritos en [4, 12, 16]. Para el caso general $S = R[[x; \sigma, \delta]]$, Venjakob introduce dos filtraciones con al ánimo de extender tales propiedades en un ambiente global, ver [16]. En el resto de esta sección se asumirá que R es un anillo local con $J(R)$ su radical de Jacobson el cual es completo y separado con respecto a su topología $J(R)$-ádica,

$$F_0S := S, \quad F_kS := \prod_{i=0}^{\infty} J(R)^k x^i, n \geq 1,$$

donde S es identificado como $S = \prod\limits_{i=0}^{\infty} Rx^i$, y

$$G_0S := S, \quad G_kS := \sum_{i=0}^{k}(F_{n-i}S)x^i, n \geq 1,$$

donde la suma es una suma de R-módulos izquierdos. Por definición ambas filtraciones G_i y F_i son exhaustivas y $F_iS \subseteq F_jS$ respectivamente $G_iS \subseteq G_jS$ se tienen para $i \geq j$.

Nótese que el ideal bilátero G_kS puede ser descrito como:

$$G_kS = (\prod_{i=k}^{\infty} Rx^i) \times J(R)x^{k-1} \times \cdots \times J(R)^k x^0 = \prod_{i=0}^{\infty} J(R)^{k-i}x^i$$

para todo $k \geq 0$, donde $J(R)^l := R$ para enteros negativos l.

El siguiente lema exhibe el alcance topológico de la filtración $\{G_k(S)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ al ser caracterizada directamente por la filtración asociada al anillo R.

Lema 3.7. *La topología sobre S inducida por la filtración G_kS coincide con la topología producto de $S \cong \prod_{i=0}^{\infty} Rx^i$, donde R está dotado con su topología $J(R)$-ádica.*

El resultado central que se presenta en esta sección, relativo a la construcción del anillo graduado asociado es el siguiente,

Proposición 3.8. *Para $S = R[[x;\sigma,\delta]]$ se tiene que:*

i) Cada G_k es un ideal bilátero de S.

ii) $\{G_k\}_{k\geq 0}$ es una filtración de S.

iii) Si $\cap_{k\geq 0} J(R)^k = 0$ entonces $S = \varprojlim S/G_k$.

iv) El anillo graduado del anillo filtrado S es

$Gr_{G_k}(S) \cong (Gr_{J(R)}(R))[\overline{x};\overline{\sigma}]$, donde $\overline{x}$ denota el símbolo principal de x en $Gr_{G_k}(S)$.

Demostración. (i) Para ver que G_k es ideal bilátero de S basta verificar que el producto de un elemento de S por un elemento de G_k esta en G_k; sin embargo basta ver que sucede con productos de la variable x, entonces sea $f = \sum f_i x^i \in G_k$, por la regla de multiplicación de escalares en S se tiene que xf se descompone como la suma

$$xf = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(f_i)x^i + (\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(f_{i-1})x^{i-1})x,$$

donde las constantes del primer sumando están en $J(R)^{k+1}$ y las del segundo en $J(R)^k$, finalmente todos contenidos en G_k.

(ii) Nótese que $G_kS = \prod_{i=0}^{\infty} J(R)^{k-i}x^i = (\prod_{i=k}^{\infty} Rx^i) \times J(R)x^{k-1} \times \cdots \times J(R)^k x^0$ por lo tanto el hecho de ser filtración se debe a que $\{J(R)^k\}_k$ es filtración para R y por la regla de multiplicación de S.

(iii) Si $\cap_{k\geq 0}(J(R))^k = 0$ entonces también $\cap_{k\geq 0} G_k = 0$, y como $\ker(\phi) = \cap_{k\geq 0} G_k$ el homomorfismo de anillos $\phi : S \longrightarrow \widehat{S}$ es un isomorfismo, de donde S es un anillo completo respecto a la filtración G_k, así $S = \varprojlim S/G_k$.

(iv) Observemos que:

$$G_k/G_{k+1} \cong \prod_{i=0}^{k} (J(R)^i/J(R)^{i+1})\overline{x}^{k-i},$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \bigoplus_{k=0}^{\infty} G_k/G_{k+1} &\cong \bigoplus_{i,l\geq 0} J(R)^i/J(R)^{i+1}\overline{x}^l \\ &\cong \bigoplus_{i\geq 0} Gr_{J(R)}R\overline{x}^i \\ &\cong (Gr_{J(R)}R)[\overline{x};\overline{\sigma}]. \end{aligned}$$

□

De la anterior proposición, se derivan los siguientes teoremas,

Teorema 3.9. *Sean R anillo filtrado local, con radical de Jacobson $J(R)$ y $S = R[[x;\sigma,\delta]]$ el anillo de series formales torcidas. Entonces S es la completación del anillo de polinomios $R[x;\sigma,\delta]$ con respecto a la filtración $< J(R), x >$-ádica.*

Demostración. Sea $T = R[x;\sigma,\delta]$. Nótese que S y T son anillos topológicos de Hausdorff con respecto a la filtración inducida por $< J(R)^k, x >_S = G_k$ y por propiedad de Artin-Rees $< J(R)^k, x >_T = G_k \cap T$, pues T es un R-submódulo de S. Además, T es un subanillo denso de S bajo la topología G_k-ádica, por lo tanto S es la completación de T con respecto a la topología $G_k \cap T$-ádica. □

Lema 3.10. *Sea δ una σ-derivación con $\delta(R) \subseteq J(R)$. Si $Gr_{J(R)}R$ es noetheriano, entonces S es noetheriano.*

Demostración. El anillo S es completo con respecto a la topología $G_k(S)$-ádica y su anillo graduado $Gr_{G_k}S \cong Gr_{J(R)}R[\overline{x};\overline{\sigma}]$ asociado a la filtración es un anillo de polinomios torcidos sobre el anillo noetheriano $Gr_{J(R)}R$, el cual es noetheriano. Finalmente, es un hecho general que un anillo filtrado completo es noetheriano si su anillo graduado asociado tiene esta propiedad. □

Nota 3.11. Cuaquier elemento $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n x^n$ es una unidad en S si y sólo si, el término constante r_0 es una unidad en R. En particular, cualquier elemento en $1- < J(R), x >$ es una unidad, y entonces el radical de Jacobson $J(S) =< J(R), x >$. Por lo tanto, en vista del isomorfismo $S/J(S) \cong R/J(R)$, S es un anillo local.

Proposición 3.12. *Si $Gr(R)$ es un dominio y σ es inyectivo, entonces S es un dominio.*

Demostración. Es inmediato por la Proposición 3.1 que si $Gr(R)$ es un dominio entonces $Gr(R)[x;\overline{\sigma}]$ es un dominio, y por el isomorfismo $Gr(S) \cong Gr(R)[x;\overline{\sigma}]$ se tiene que $Gr(S)$ es un dominio. Por la Proposición 2.3 se obtiene que S es un dominio. □

Proposición 3.13. *Si $Gr(R)$ es primo y σ es un automorfismo, entonces S es primo.*

Demostración. Como $Gr(R)$ es primo, por la Proposición 3.2 se tiene que $Gr(R)[x;\overline{\sigma}] \cong Gr(S)$ es primo de donde $Gr(S)$ es primo y de nuevo por la Proposición 2.3 se concluye que S es primo. □

3.3. Propiedades homológicas

A continuación se muestran algunas propiedades homológicas del anillo de series formales torcidas S, y se detalla la construcción del anillo de series de Laurent torcidas mediante la localización de un subconjunto multiplicativamente cerrado que satisface la condición de Ore, ver [14].

Proposición 3.14. *Sea $S = R[[x;\sigma,\delta]]$ con R anillo filtrado completo respecto a la topología I-ádica, para I ideal bilátero de R, entonces:*

i) Si la $lgld(Gr(R))$ (o derecha) es finita, entonces la $lgld(S)$ es finita y satisface

$$lgld(S) \leq lgld(Gr(R)) + 1$$

ii) $rKdim(Gr(S)) = rKdimGr(R) + 1$. Mas aún,

$rKdim(S) \leq rKdimGr(R) + 1$.

Demostración. i) Puesto que $Gr(S) \cong (Gr(R))[x;\overline{\sigma}]$ y que $\overline{\sigma}$ es un automorfismo por ser σ automorfismo, entonces por el Teorema 3.4 $lgld(Gr(R)[x;\overline{\sigma}]) = lgld(Gr(R)) + 1$. Por el Corolario 7.6.18 de [12] y al ser S anillo graduado, entonces $lgld(S) \leq lgld(Gr(S))$.

ii) Bajo las hipótesis del Teorema 3.6, se concluye que la dimensión de Krull a derecha de $(r)Kdim(Gr(S)) = (r)Kdim(Gr(R)[x;\overline{\sigma}])$ es $(r)Kdim(Gr(R)[x;\overline{\sigma}]) = (r)Kdim(Gr(R)) + 1$, como consecuencia de la Proposición 2.2 se concluye que $rKdim(S) \leq rKdimGr(R) + 1$.

□

Proposición 3.15. *Si $Gr(R)$ Auslander regular, R filtrado y completo y $\overline{\sigma}$ automorfismo, entonces S es Auslander regular.*

Demostración. Es suficiente mostrar que $Gr(S)$ es Auslander regular, pues por la Proposición 2.3 es inmediato. En efecto, al ser $Gr(R)$ Auslander regular y por el isomorfismo $Gr(R)[x;\overline{\sigma}] \cong Gr(S)$ el resultado es claro. □

3.4. Anillo de series de Laurent torcidas

El anillo de series de Laurent se constituye por series de la forma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_i x^i$, considerando el inverso multiplicativo x^{-1} de x. Para $\delta \neq 0$ se tendrán infinitos coeficientes $a_i \neq 0$ para $i \leq 0$ entonces, restricciones sobre δ serán impuestas para garantizar elementos cuya expansión negativa sea finita.

Definición 3.16. El conjunto $B := \{1, x, x^2, \dots\}$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado de S, constituido por todas las potencias de x.

El siguiente lema prueba que el conjunto B es un conjunto de Ore a izquierda, lo cual permitirá hacer la localización del anillo S por el conjunto B, mostrando la existencia de una nueva estructura: el anillo de series de Laurent torcidas. Los detalles de su demostración pueden ser consultados en [14].

Lema 3.17. *Sea δ una derivación σ-nilpotente, ver [13] de grado $m \geq 0$ ($\delta^m = 0$). Entonces:*

i) Para todo $r \in R$, se tiene que

$$x^m r = \left(\sum_{k=0}^{m-1} x^{m-1-k} \sigma \delta^k (r) \right) x$$

ii) Para todo $a \in S$ existe $b \in S$ tal que $x^m a = bx$.

iii) B es un conjunto de Ore a izquierda.

Proposición 3.18. *El conjunto B satisface la condición de Ore (derecha e izquierda), la localización S_B de S en B existe. Mas aún, para todo $r \in R$ y todo $j \geq 1$ se tiene que*

$$x^j r x^{-j} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{-k} \sigma M_{k,j-1}(\delta, \sigma)(r)$$

pertenece a S_B.

Demostración. Por el lema previo, B satisface la condición de Ore a izquierda. La condición de Ore a derecha sigue por un argumento análogo entonces, la localización existe ya que todo elemento en B es regular. Para k suficientemente grande, cualquier monomio que contenga k δ's y $j-1$ σ's debe contener una cadena de a lo sumo m δ's, y por lo tanto será nulo. La suma del lado derecho converge en $k = j(m-1)$ y por lo tanto esta en S_B. El caso $j = 1$ sigue del lema previo, y el caso general se tiene por inducción:

$$\begin{aligned} x^j r x^{-j} &= t \left(\sum_{l=0}^{\infty} x^{-l} \sigma M_{l,j-1}(\delta, \sigma)(r) \right) t^{-1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} x^{-l} \sum_{k=0}^{\infty} x^{-k} \sigma \delta^k \sigma M_{l,j-1}(\delta, \sigma)(r) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} \sigma \sum_{k+l=n} \delta^k \sigma M_{l,j-1}(\delta, \sigma)(r) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} \sigma M_{n,j}(\delta, \sigma)(r), \end{aligned}$$

el caso $j = 1$ se usó en la segunda ecuación y la relación

$$\sum_{k=0}^{n} Y^k Z M_{n-k,j-1}(Y, Z) = M_{n,j}(Y, Z)$$

para la última ecuación. □

Definición 3.19. El **anillo de series de Laurent** está definido como la localización del anillo de series formales torcidas S por el subconjunto de Ore B, $S_B := R((x;\sigma,\delta))$. Los elementos de S_B se representan como series de la forma $\sum_{i\geq -\infty} a_i x^i$ y $\sum_{i\geq -\infty} x^i a_i$ con parte negativa finita.

Nota 3.20. Un argumento análogo muestra que B es un conjunto de Ore para el anillo de polinomios torcidos $R[x;\sigma,\delta]$ por tanto, el *anillo de polinomios de Laurent*

$$R(x;\sigma,\delta) := R[x;\sigma,\delta]_B$$

existe bajo la hipotésis de esta subsección.

La filtración I-ádica de S induce una filtración J-ádica de S_B tomando $J_k := (I_k)_{S_B}, \forall k \geq 0$. Al ser R noetheriano, por el lema previo los conjuntos J_k son finitamente generados como S_B-módulos. Por lo tanto los cocientes J_k/J_{k+1} son módulos finitamente generados sobre $S_B/J_1 = R/I_1 \otimes_R S_B \cong (R/I_1)((x;\overline{\sigma}))$.

Los siguientes resultados se obtienen para el anillo $S = R[[x;\sigma]]$ con σ automorfismo según las hipótesis dadas por Letzter en [9]. Una generalización al caso $S = R[[x;\sigma,\delta]]$ aún no se encuentra en la literatura.

Proposición 3.21. *i) Sea R semiprimo y $S' = R[[x^{\pm};\sigma]]$ el anillo de series de Laurent torcidas de tipo automorfismo, entonces el anillo S' es semiprimo.*

ii) Sea R noetheriano a izquierda(derecha). R es semiprimo sí y solo sí, S (o S') es semiprimo.

Consecuencia directa de la anterior proposición es el siguiente teorema, su demostración puede ser consultada en [9].

Teorema 3.22. *Sea R semiprimo y noetheriano. Entonces*

$$udim(R) = udim(S) = udim(S').$$

3.5. Ejemplos

En trabajos recientes de [7, 8, 16, 17] se muestran algunos ejemplos de las series formales torcidas, las cuales motivaron su construcción y el estudio de sus propiedades. De modo que presentamos algunos ejemplos destacados de esta estructura.

3.5.1. Álgebras de Iwasawa no conmutativas

El ejemplo que motiva todos los desarrollos y construcciones anteriormente relacionadas en [1, 13, 14, 16], son las álgebras de Iwasawa no conmutativas $\Lambda(G)$, para grupos de Lie p-ádicos compactos G que contengan subgrupos normales cerrados H tales que $G/H \cong \mathbb{Z}_p$. En tal caso, $\Lambda(G) \cong \Lambda(H)[[t;\sigma,\delta]]$, para un automorfismo σ y una σ-dervación δ de $\Lambda(H)$. También se tiene que $\Omega(G) \cong \Omega(H)[[t;\sigma,\delta]]$; nuevamente consultar [1, 13, 14, 16].

3.5.2. Anillo de series de potencias torcidas iteradas

El anillo de series de potencias torcidas iteradas se estudia como la completación de un anillo de polinomios torcidos iterados, ver [17]. Esta construcción generaliza todos los resultados expuestos. Sea

$$R_n = C[x_1; \sigma_1, \delta_1][x_2; \sigma_2, \delta_2] \cdots [x_n; \sigma_n, \delta_n]$$

un anillo de polinomios torcidos iterados, donde C es un anillo completo, regular, local, noetheriano con ideal maximal m donde C es estable bajo cada σ_i, δ_i. Para cada $1 \leq i \leq n$, el conjunto $I_{i-1} = \mathrm{m} + \langle x_1, \ldots, x_{i-1} \rangle$, y asumiendo que $\sigma_i(I_{i-1}) \subseteq I_{i-1}, \delta_i(R_{i-1}) \subseteq I_{i-1}$, que $\delta_i(I_{i-1}) \subseteq I_{i-1}^2$. Entonces existe un anillo de series de potencias formales torcidas iteradas

$$S_n = C[[x_1; \widehat{\sigma_1}, \widehat{\delta_1}]] \cdots [[x_i; \widehat{\sigma_n}, \widehat{\delta_n}]]$$

tal que $\widehat{\sigma_i} \mid_{R_{i-1}} = \sigma_i$ y $\widehat{\delta_i} \mid_{R_{i-1}} = \delta_i, \forall 1 \leq i \leq n$. Más aún, S_n es la completación de R_n en el ideal $\mathrm{m} + \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Teorema 3.23. *Sea $S_0 = C$. Entonces existe un anillo de series de potencias formales torcidas iteradas*

$$S_n = C[[x_1; \widehat{\sigma_1}, \widehat{\delta_1}]] \cdots [[x_i; \widehat{\sigma_n}, \widehat{\delta_n}]]$$

donde cada (σ_i, δ_i) son endomorfismos de S_{i-1}.(Diremos que S_n la extensión en series de potencias de R_n)

Corolario 3.24. *Sean R_n y S_n como en lo anterior, entonces:*

i) La extensión en series de potencias S_n es la completación de R_n con respecto al ideal $\mathrm{m}_n = \mathrm{m} + \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Cualquier serie de potencias en S_n es unidad si y sólo, si su término constante es unidad en C.

ii) El anillo graduado asociado $Gr(S_n)$ es isomorfo a un anillo de polinomios torcidos iterados $Gr(C)[x_x; \overline{\sigma_1}] \cdots [x_n; \overline{\sigma_n}]$.

iii) Asumiendo que $\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}$ son automorfismos. Si $Gr(C)$ es un dominio, S_n es un dominio. Si $Gr(C)$ es noetheriano, entonces lo es S_n.

iv) Suponiendo que $Gr(C)$ es noetheriano a derecha y que $\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}$ son automorfismos, entonces $rKdim(S_n) \leq rKdimGr(C) + n$ y $rgld(S_n) \leq fgld(Gr(C)) + n$.

3.6. Anillos de coordenadas cuánticas

Siguiendo la exposicion de [8] y de [17] se presentan los anillos de coordenadas cuánticas como anillos de polinomios torcidos siguiendo los trabajos de [2, 3]

$$k[y][y_1; \sigma_1, \delta_1] \cdots [y_n; \sigma_n, \delta_n]$$

sobre un cuerpo k, para adecuados automorfismo σ_i y σ_i-derivaciones δ_i. (Para mayor información, consultar [3]). En [17], muestra, bajo consideraciones especiales, que la completación en $< y, y_1, \ldots, y_n >$ es un anillo de series formales torcidas iteradas

$$k[[\widehat{y}]][[\widehat{y_1}; \widehat{\sigma_1}, \widehat{\delta_1}]] \cdots [[\widehat{y_n}; \widehat{\sigma_n}, \widehat{\delta_n}]]$$

donde cada $\widehat{y_i}$ representa a la imagen de y_i en la completación. Ejemplos en los cuales tal resultado es aplicable, incluye el anillo coordenado cuantizado de matrices $n \times n$, de espacios simplécticos y de espacios euclideanos.

3.6.1. Álgebras de Weyl

En el estudio de las extensiones de series de potencias torcidas inversas $R[[x^{-1}; \sigma, \delta]]$, con R noetheriano, junto a endomorfismos σ, δ, se ve que el anillo de series de potencias torcidas inversas iteradas correspondiente a la n-ésima álgebra de Wey,l es un dominio completo, local, noetheriano, cuya dimensión de Krull a derecha y dimensión global corresponde a $2n$, ver [8].

Proposición 3.25. *Sean C dominio noetheriano completo, regular y local, con radical de Jacobson $J(C)$ y $D = C[[x_1^{-1}; \sigma_1, \delta_1]][[x_2^{-1}; \sigma_2, \delta_2]] \cdots [[x_m^{-1}; \sigma_m, \delta_m]]$ entonces:*

i) D es dominio noetheriano, (izquierdo y derecho).

ii) $rgld(D) = rKdim(D) = Kdim(C) + m$.

4. Agradecimientos

El presente artículo recoge gran parte de los temas estudiados por el autor en el desarrollo del trabajo de grado titulado **Construcción y algunas propiedades elementales del anillo de series formales torcidas** dirigido por el Dr. José Oswaldo Lezama Serrano, dentro del seminario de Álgebra Constructiva SAC^2 en 2012. Agradezco la dedicación, atención y ánimo constante del Profesor Lezama en el desarrollo del presente documento, así como a los referees y al comité editorial por sus acertadas recomendaciones.

Referencias

[1] K. Ardakov and K. A. Brown, *Ring-theoretic properties of Iwasawa algebra: a survey*, Doc. Math. Extra **7-33**.

[2] S.T. Arnautov, V.I. Glavatsaky and A.V. Mikhalev, *Introduction to the theory of topological rings and modules*, Pure and Applied Mathematics, vol. 197, Marcel Dekker Inc., 1996.

[3] K.A. Brown and K.R. Goodearl, *Lectures on Algebraic Quantum Groups*, Advanced courses in mathematics CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[4] P. M. Cohn, *Skew fields*, Theory of general division rings, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[5] K.R. Goodearl and Jr. R.B. Warfield, *An introduction to noncommutative rings*, London Mathematical Society (2004).

[6] R.M. Kashaev, *The Heisenberg double and the pentagon relation*, Algebra i Anliz **8(4)** (1996), 63–74.

[7] E.S. Letzter, *On prime ideals of noetherian skew power series ring*, Israel Journal of Mathematics **192(1)** (2012), 67–81.

[8] E.S. Letzter and L. Whang, *Noetherian skew inverse power series rings*, Algebras and Representation Theory **13(3)** (2010), 303–314.

[9] ______, *Goldie ranks of skew power series rings of automorphic type*, Communications in Algebra **40** (2014), 1911–1917.

[10] O. Lezama and M. Reyes, *Some homological properties of skew pbw extensions*, Comunications in Algebra **42** (2014), 1200–1230.

[11] H.S. Li and F. Van Oystaeyen, *Zariskian Filtration*, K-Monographs in Mathematics 2, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1996.

[12] J.C. McConell and Robson J.C., *Noncommutative noetherian rings*, American Mathematical Society (2000).

[13] P. Schneider and O. Venjakob, *On the codimension of modules over skew power series rings with applications to Iwasawa algebras*, J. Pure Appl. Algebra (2006), 349–367.

[14] ______, *Localizations and completions of skew power series rings*, American Journal of Mathematics **132(1)** (2010), 1–36.

[15] O. Van and C. Nastasescu, *Graded ring theory*, North Holland Publishing Company (1982).

[16] O. Venjakob, *A noncommutative Weiertrass preparation theorem and applications to Iwasawa theory (with an appendix by Denis vogel)*, J. Reine Angew, Math. **559** (2003), 153–191.

[17] L. Wang, *Completion of quantum coordinate rings*, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (2009), 911–919.