Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen III (1996), pp.37-41

UNA ADJUNCIÓN ENTRE RELACIONES BINARIAS Y ESPACIOS TOPOLÓGICOS

LORENZO ACOSTA, EPIFANIO LOZANO(*)

Resumen. Se presenta un caso particular de una adjunción funtorial que se traduce, por restricción a las fibras, en adjunción de conjuntos ordenados, dando lugar a una transformación natural entre dos funtores de la categoría de los conjuntos en la categoría de los retículos completos y pares adjuntos.

Abstract. Functorial-adjointness and order-adjointness are studied in categories of sets, orders and complete lattices.
Keywords. Adjoints, order, natural transformations, lattices.

1. Preliminares

Se recuerdan aquí los conceptos de adjunción de Kan y adjunción de Ore, así como la definición de la categoría **Ore**, fundamental en el resultado final del trabajo. Para las definiciones de categoría y funtor, que asumimos conocidas, se puede consultar [1]-[3].

Sean **C** y **D** dos categorías y $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ dos funtores. Decimos que F es adjunto a izquierda de G si existe una biyección natural entre los conjuntos $[FX;Y]$ y $[X;GY]$ para todo objeto X de **C** y todo objeto Y de **D** ($[A;B]$ denota el conjunto de morfismos de A en B en la categoría correspondiente). En este caso también se dice que (F,G) es un par adjunto de Kan.

(*)Texto recibido 1/3/96, revisado 27/11/96. Lorenzo Acosta, Epifanio Lozano, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia. Este trabajo fue presentado en el VI Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (Universidad Pedagógica, 1995) y una primera versión fue publicada en las Memorias correspondientes.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Recordemos ahora que todo conjunto ordenado $(X, \leq)$ puede verse como una categoría, donde los objetos son los elementos de X y el conjunto de morfismos de a en b es vacío si $a \not\leq b$ y consta del elemento (a,b) si $a \leq b$. Bajo este punto de vista un funtor entre dos conjuntos ordenados es simplemente una función monótona no decreciente. Sean ahora $f\colon (X,\leq) \to (Y,\leq)$ y $g\colon (Y,\leq) \to (X,\leq)$ dos funtores. Tenemos que f es adjunto a izquierda de g si y solamente si para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$

$$f(x) \leq y \Longleftrightarrow x \leq g(y).$$

Dentro de este contexto (f,g) se llamará un par adjunto de Ore.

Definición (*categoría Ore*). **Ore** es la categoría cuyos ejemplos son los retículos completos (conjuntos ordenados donde todo subconjunto posee extremo inferior) y cuyos morfismos son los pares adjuntos de Ore. Es decir que si X y Y son dos retículos completos, un morfismo de X en Y es una pareja de funciones (f,g), donde $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ y f es adjunta a izquierda de g. La composición se hace de la siguiente manera:

$$(f,g) \circ (h,k) = (f \circ h, k \circ g)$$

(es fácil comprobar que $f \circ h$ es adjunto a izquierda de $k \circ g$) y la identidad de X está dada por $(1_X, 1_X)$, que es claramente un par adjunto de Ore.

Definición *(constructos y preorden en las fibras).* Un constructo $\mathbf{C}$ es una categoría cuyos objetos son conjuntos dotados con algún tipo de estructura y cuyos morfismos son funciones que conservan la estructura. Los objetos se denotarán como parejas (X,α), donde X es un conjunto y α es una estructura sobre X. La clase de todas estas estructuras sobre X se denota por $\mathbf{C}[X]$ y es llamada la fibra sobre X. Sobre $\mathbf{C}[X]$ se define la siguiente relación de pre-orden:

$$\alpha \leq \beta \quad \text{si y sólo si} \quad 1_X\colon (X,\alpha) \to (Y,\beta) \quad \text{es un morfismo en } \mathbf{C}.$$

2. Los constructos Gra y Top.

En este parágrafo se definen los contructos **Gra** y **Top** y se construye un par adjunto entre ellos. **Gra** es la categoría cuyos objetos son los conjuntos dotados de una relación binaria y cuyos morfismos son las funciones compatibles. En otras palabras, un objeto de **Gra** es una pareja (X,R) donde X es un conjunto y R es una relación binaria sobre X; un morfismo de (X,R) en (Y,S) es una función f de X en Y que satisface la siguiente condición: si $(a,b) \in R$ entonces $(f(a), f(b)) \in S$. (Esta categoría es la categoría **Rel** de [2]; aquí usamos la notación de [1].) **Top** es la categoría cuyos objetos son los conjuntos dotados de una topología y cuyos morfismos son las funciones continuas.

Gra y **Top** son constructos donde cada fibra es un retículo completo con respecto a la relación binaria definida en el parágrafo anterior. En particular, este orden se traduce en **Gra**$[X]$ de la siguiente manera: $R \leq S$ si y solamente si $R \subseteq S$. Por el contrario, en **Top**$[X]$ la traducción del orden es: $\tau \leq \mu$ si y solamente si $\mu \subseteq \tau$.

Sea ahora (X, R) un objeto de **Gra**. Consideremos el subconjunto $F(R)$ de $P(X)$ definido por $F(R) = \{M \subseteq X | ((a,b) \in R \text{ y } a \in M) \Rightarrow b \in M\}$. Es fácil ver que $F(R)$ es una topología sobre X. Mas aún, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1. *Sea $f: X \to Y$ una función y sean R y S relaciones sobre X e Y. Si $f: (X,R) \to (Y,S)$ es un morfismo en* **Gra** *entonces $f: (X, F(R)) \to (Y, F(S))$ es un morfismo en* **Top**.

Corolario 1. *F:* **Gra** $\to$ **Top**, *definido por $F(X,R) = (X, F(R))$ y $F(f) = f$, es un funtor.*

Consideremos ahora un objeto (X, τ) de **Top**. Construimos a partir de τ la siguiente relación binaria sobre X: $A(\tau) = \{(a,b) \in X \times X | a \in \text{Adh}_\tau\{b\}\}$, donde $\text{Adh}_\tau\{b\}$ denota la adherencia de $\{b\}$ para la topología τ.

Proposición 2. *Sea $f: X \to Y$ una función y sean τ y μ topologías sobre X y Y. Si $f: (X,\tau) \to (Y,\mu)$ es un morfismo en* **Top**, *entonces $f: (X, A(\tau)) \to (Y, A(\mu))$ es un morfismo en* **Gra**.

Corolario 2. *A:* **Top** $\to$ **Gra**, *definido por $A(X,\tau) = (X, A(\tau))$ y $A(f) = f$, es un funtor.*

En realidad, tenemos la siguiente situación:

Teorema 1. *F:* **Gra** $\to$ **Top** *es adjunto a izquierda de A:* **Top** $\to$ **Gra**.

Nota 1. Las subcategorías $AF($**Gra**$)$ de **Gra** y $FA($**Top**$)$ de **Top** son isomorfas mediante los funtores F y A. Una caracterización de estas subcategorías es la siguiente: $AF($**Gra**$)$ es la subcategoría plena de **Gra** cuyos objetos son los conjuntos dotados de una relación de pre-orden, $FA($**Top**$)$ es la subcategoría plena de **Top** cuyos objetos son los conjuntos dotados de un topología casi-discreta. (Una topología es casi-discreta si la intersección de cualquier colección de abiertos es abierta. Estas topologías se llaman también topologías MA, pues para todo conjunto existe un Mínimo Abierto que lo contiene.)

Nota 2. Sea $I: AF($**Gra**$) \to$ **Gra** el funtor inclusión. Si, dada una relación R sobre X, definimos $J(R)$ como la relación de pre-orden sobre X generada por R, tendremos que J es un funtor de **Gra** en AF(**Gra**) y además J es adjunto a izquierda de I. Por otro lado, si $E: FA(\mathbf{Top}) \to \mathbf{Top}$ es el funtor inclusión y si definimos, para cada topología τ sobre X, $H(\tau)$ como la topología casi-discreta generada por τ, tendremos que H es un funtor de **Top** en FA(**Top**) que es adjunto a derecha de E.

Nota 3. Surge naturalmente la pregunta: ¿qué subcategorías de **Top** corresponden a las siguientes subcategorías de **Gra**?:

(a) los conjuntos ordenados
(b) los conjuntos dotados de una relación de equivalencia
(c) los retículos
(d) los retículos distributivos
(e) los retículos de Boole
etc.

Podemos adelantar que a las relaciones de orden les corresponden las topologías T_0 y a las relaciones de equivalencia les corresponden las topologías casi discretas R_0. (Para mayor información sobre la propiedad R_0 ver [5] y [6].)

3. Gra y Top como funtores

Mostraremos aquí que **Gra** y **Top** pueden verse como funtores de la categoría de los conjuntos **Con** en la categoría **Ore** definida en el parágrafo 1. En esa situación (F, A) resulta ser una transformación natural de **Gra** en **Top**.

Sea $f: X \to Y$ una función cualquiera. Dada una topología τ sobre X podemos asociarle de manera natural una topología sobre Y, la topología más grande que hace que f sea continua (es decir la topología final asociada a f y a τ). Esta topología la llamaremos $f_T(\tau)$. Por otro lado si fijamos una topología μ sobre Y, podemos asociarle la topología más pequeña sobre X que hace continua a f (es decir la topología inicial asociada a f y a μ). A esta topología la llamaremos $f^T(\tau)$.

Proposición 3. f_T: **Top**$[X] \to$ **Top**$[Y]$ *es adjunta a izquierda de* f^T: **Top**$[Y] \to$ **Top**$[X]$.

Corolario 3. Top *es un funtor de* **Con** *en* **Ore**.

En efecto, basta definir **Top**$(f) = (f_T, f^T)$.

De igual manera, a cada función $f: X \to Y$, podemos asociarle un par adjunto de Ore, **Gra**$(f) = (f_G, f^G)$, donde, para una relación binaria R sobre X, $f_G(R)$ es la relación binaria más pequeña sobre Y que hace que f sea compatible y para cada relación binaria S sobre Y, $f^G(S)$ es la relación binaria más grande sobre X que hace que f sea compatible.

Corolario 4. Gra *es un funtor de* **Con** *en* **Ore**.

Fijemos ahora un conjunto X. Llamaremos F_X la restricción de F a **Gra**$[X]$ y A_X a la restricción de A a **Top**$[X]$. Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 5. *(F_X, A_X) es un par adjunto de Ore.*

Para terminar, enunciamos un teorema que relaciona los funtores **Gra** y **Top** mediante una transformación natural asociada a F y A.

Teorema 6. *(F, A) es una transformación natural de* **Gra** *en* **Top**.

En efecto, para cada función $f\colon X \to Y$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo en **Ore**:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Gra}[X] \arrow[r, "{(F_X, A_X)}"] \arrow[d, "{(f_G, f^G)}"'] & \mathbf{Top}[X] \arrow[d, "{(f_T, f^T)}"] \\
\mathbf{Gra}[Y] \arrow[r, "{(F_Y, A_Y)}"'] & \mathbf{Top}[Y]
\end{tikzcd}$$

Referencias

1. J. Adamek, *Theory of Mathematical Structures*, New York: Reidel, 1980.
2. J. Adamek, H. Herrlich, G. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, New York: Wiley, 1990.
3. S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, New York: Springer Verlag, 1971.
4. R. Montañés, *Fibraciones Categóricas*, Tesis de Magister, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, 1994.
5. M.G. Murdeshwar, *General Topology*, New York: Wiley, 1983.
5. G. Preuss, *Theory of Topological Structures*, New York: Reidel, 1988.