Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen III (1996), pp.55-62

CONECTIVOS EN EL TOPOS DE GRAFOS DIRIGIDOS

ARNOLD OOSTRA(*)

Resumen. En este artículo se describe el topos de grafos dirigidos y se presentan dos conectivos de aridad 1 que, junto con los de Heyting, constituyen un sistema completo de conectivos para el mismo.

Abstract. We provide a description of the topos of directed graphs and we present two connectives (of arity 1) which, together with Heyting's connectives, provide a complete system for the propositional logic of the topos.
Keywords. Connectives, directed graphs, topoi, Grothendieck topoi.

La teoría de topos surgió en la confluencia de dos grandes corrientes de trabajo matemático, la geometría algebraica y la teoría de categorías. En sus esfuerzos para resolver las conjeturas de Weil, la escuela de geometría algebraica dirigida por Alexander Grothendieck buscó una expresión axiomática para la noción de haz, estudiada por Leray, Cartan y Lazard. Esta formulación axiomática condujo a precisar las estructuras conocidas ahora como topos de Grothendieck. La teoría de categorías a su vez nació con los trabajos de Eilenberg y Mac Lane. Uno de los discípulos de Eilenberg, William Lawvere, concibió el proyecto de elaborar una fundamentación categórica de la matemática. Combinando esta idea con las propiedades de los topos de Grothendieck, hacia 1970 Lawvere y Tierney formularon la noción de topos elemental y desarrollaron buena parte de la teoría correspondiente.

(*)Texto recibido 23/6/97, revisado 10/7/97. Arnold Oostra, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima. e-mail: aoostra@utolima.ut.edu.co.

Pronto se descubrió que a cada topos corresponde una lógica. Ella se expresa mediante un lenguaje interno, similar al lenguaje clásico de primer orden, en tanto que posee sus conectivos y cuantificadores usuales. Sin embargo, la lógica de un topos no es, en general, clásica, pues su cálculo proposicional no siempre obedece las reglas clásicas. El cálculo proposicional de cualquier topos satisface las reglas del cálculo de Heyting, propuesto como un modelo de la lógica intuicionista introducida al principio del siglo por Brouwer. De esta manera, la teoría de topos constituye un ambiente para la lógica intuicionista y para la matemática desarrollada con ella.

Uno de los problemas en la lógica de los topos que merece un estudio más detallado es la descripción de sistemas completos de conectivos. En la lógica clásica, cualquier conectivo puede expresarse como combinación de los conectivos usuales. Pero no es difícil mostrar ejemplos de conectivos en topos que no pueden obtenerse de esta manera. Se plantea entonces la pregunta siguiente: ¿cuáles conectivos, añadidos a los usuales, proveen un sistema completo (y mínimo) de conectivos? Este problema general permanece sin solución. Resultados recientes obtenidos por Caicedo responden a este interrogante en topos de haces sobre un espacio topológico y, generalizándolos, en topos de Grothendieck sobre un conjunto ordenado. Entre los topos que no satisfacen estas últimas condiciones, uno de los más sencillos es el topos de grafos dirigidos, el cual se estudia a continuación llegando a una solución del problema mencionado.

Las secciones (1) y (2) de este artículo presentan información dispersa en la bibliografía. Las ideas presentadas en la sección (3) son originales y, hasta donde pudo verificarse, los resultados son novedosos.

1. Conectivos en un topos

Un *topos* es una categoría con límites finitos y exponenciales, que posee un clasificador de subobjetos $1 \xrightarrow{\top} \Omega$. Aquí 1 es un objeto terminal de la categoría; que $\top$ clasifica subobjetos significa que para cada monomorfismo $S \rightarrowtail A$ existe un único morfismo $A \longrightarrow \Omega$, denotado $c(S)$ o $c_A(S)$, tal que el diagrama siguiente es un "pullback":

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ A \arrow[r, "c(S)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

La categoría *Con* de los conjuntos y las funciones es un topos, el objeto clasificador es el conjunto $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. Si $\mathcal{C}$ es cualquier categoría pequeña, es decir, una cuya clase de morfismos es un conjunto, entonces la categoría de los funtores $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}on$ y las transformaciones naturales entre ellos también es un topos. Esta categoría se denota $\mathcal{C}on^{\mathcal{C}}$.

La subcategoría plena de $\mathcal{C}on^{\mathcal{C}^{op}}$ cuyos objetos son los funtores *exactos* respecto a cierta noción de cubrimiento definida en $\mathcal{C}$, es un topos y recibe el nombre de *topos de Grothendieck*. Los ejemplos anteriores y los topos de haces sobre un espacio topológico son topos de Grothendieck. Las definiciones precisas, así como otros ejemplos de topos, pueden encontrarse en [1], [7] y [10].

En la lógica clásica, un conectivo binario se define mediante una "tabla de verdad", es decir, mediante una función $\mathbf{2} \times \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{2}$. En un topos arbitrario, un *conectivo* de aridad n (donde n es cualquier entero no negativo) es un morfismo $\Omega^n \longrightarrow \Omega$. Puesto que Ω clasifica subobjetos, un conectivo de aridad n puede verse como un subobjeto de Ω^n.

Por el lema de Yoneda [1], un morfismo $\Omega^n \longrightarrow \Omega$ corresponde a una transformación natural $Hom(-, \Omega^n) \xrightarrow{\bullet} Hom(-, \Omega)$. De nuevo, como Ω clasifica subobjetos, se tiene

$$Hom(-, \Omega^n) \cong Hom(-, \Omega)^n \cong Sub^n(-).$$

Luego, un conectivo de aridad n también puede verse como una transformación natural $Sub^n \xrightarrow{\bullet} Sub$, es decir, como una operación natural de aridad n entre subobjetos.

Por ejemplo, la intersección (el "pullback") de subobjetos corresponde a una transformación natural $Sub^2 \xrightarrow{\bullet} Sub$. El subobjeto de Ω^2 asociado a esta transformación se representa por el monomorfismo $1 \xrightarrow{\langle \top, \top \rangle} \Omega \times \Omega$ y el conectivo correspondiente, denotado $\wedge$, está definido por el siguiente "pullback":

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\langle \top, \top \rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
\Omega^2 \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega
\end{tikzcd}.$$

De manera similar, en un topos arbitrario se definen todos los conectivos usuales del cálculo proposicional clásico [5]. El conjunto de *conectivos de Heyting* es

$$\mathcal{H} = \{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$$

y un conectivo de cualquier aridad es *heytiniano* si es combinación de estos conectivos y de proyecciones.

Un subobjeto de X es *combinación heytiniana* de un conjunto $\mathcal{G}$ de subobjetos de X si su clasificador es combinación de un conectivo heytiniano y clasificadores de elementos de $\mathcal{G}$. Si S, T son subobjetos de un objeto X del topos, las operaciones naturales correspondientes a los conectivos de Heyting se denotan X, 0, $\backsim S$, $S \cap T$, $S \cup T$, $S \supset T$. La estructura

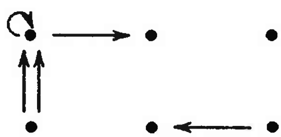
$$(\mathcal{S}ub(X), X, 0, \backsim, \cap, \cup, \supset)$$

no es, en general, un álgebra booleana sino un álgebra de Heyting [10]. En consecuencia, el cálculo proposicional de la lógica de un topos no es, en general, clásico sino intuicionista [7].

Un topos es *booleano* cuando, para cada objeto X, el álgebra $\mathcal{S}ub(X)$ es booleana. Esto equivale a que $\neg\neg = i_\Omega$ y significa que el cálculo proposicional del topos en cuestión es clásico. Por ejemplo, el topos de conjuntos es booleano.

2. El topos de grafos dirigidos

Un *grafo dirigido* G consiste en un conjunto de *vértices*, denotado $V(G)$, y un conjunto de *arcos*, denotado $A(G)$. A cada arco se asigna una pareja de vértices, el inicial y el final. Un grafo dirigido finito puede dibujarse representando los vértices con puntos y los arcos con flechas. Por ejemplo, el dibujo siguiente representa un grafo dirigido $\mathbf{5} \rightrightarrows \mathbf{6}$.



Un *morfismo* de grafos dirigidos consiste en un par de funciones, una entre los conjuntos de vértices y otra entre los conjuntos de arcos, que preservan vértices iniciales y finales. Estos morfismos definen la categoría de los grafos dirigidos, denotada $\mathcal{G}raf$.

Una categoría pequeña puede verse como un grafo dirigido. Esta observación determina un funtor olvidadizo $\mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{G}raf$, donde $\mathcal{C}at$ denota la categoría de categorías pequeñas y funtores. Este funtor olvidadizo admite adjunto izquierdo. Por otro lado, si en un grafo dirigido existe a lo más un arco de un vértice a otro, el grafo puede describirse por las parejas de vértices entre las cuales existe un arco. Así, $\mathcal{G}raf$ posee una subcategoría equivalente a la categoría $\mathcal{R}el$ de relaciones binarias. Esta subcategoría es reflexiva.

Es claro que cualquier grafo dirigido puede verse como un funtor de la categoría pequeña $\bullet \rightrightarrows \bullet$ en la categoría de los conjuntos; un morfismo de grafos puede verse como una transformación natural entre tales funtores. Así, $\mathcal{G}raf$ es equivalente a $\mathcal{C}on^{\bullet \rightrightarrows \bullet}$ y se concluye que la categoría de los grafos dirigidos es un topos. No es difícil verificar este resultado de manera directa, como se hace en [2]. Allí también se calcula el objeto clasificador de subobjetos obteniendo el grafo siguiente, denotado Ω:

$$\begin{tikzcd} \underset{0}{\bullet} \arrow[loop left, "e"] \arrow[r, shift left, "c"] & \underset{1}{\bullet} \arrow[l, shift left, "d"] \arrow[loop right, "a"] \arrow[loop right, distance=4em, "b"] \end{tikzcd} \cdot$$

Las letras que denotan los arcos indican "niveles de pertenencia al subgrafo", como se explica a continuación.

Un subgrafo de un grafo dirigido G tiene como conjunto de vértices un subconjunto de $V(G)$ y, como arcos entre cada pareja de estos vértices escogidos, un subconjunto de los arcos que G posee entre ellos. En el grafo clasificador, a corresponde a los arcos del subgrafo; b a los arcos entre vértices del subgrafo que no pertenecen al mismo; c a los arcos que entran al subgrafo, es decir, a aquellos cuyo vértice final pertenece al subgrafo mientras su vértice inicial no; d a los que salen; e corresponde a los arcos cuyos vértices no pertenecen al subgrafo.

A continuación se describen los conectivos de Heyting del topos $\mathcal{G}raf$ como operaciones entre subgrafos S, T de un grafo dirigido fijo G.

Máximo. Es el subgrafo G.

Mínimo. Es el subgrafo vacío.

Extremo inferior. $S \cap T$ es el subgrafo cuyos vértices y arcos son los comunes a S y T.

Extremo superior. $S \cup T$ es el subgrafo cuyos vértices y arcos son los que pertenecen a S o a T.

Exponencial. El conjunto de vértices de $S \supset T$ es $V(S)^c \cup V(T)$, donde el complemento se considera respecto a $V(G)$; entre estos vértices, se toman los arcos que, si pertenecen a S, entonces también pertenecen a T. En otras palabras, todos los arcos cuyo vértice inicial y final pertenece a $V(S \supset T)$ excepto aquellos de S que no pertenecen a T.

Seudocomplemento. El conjunto de vértices de $\backsim S$ es $V(S)^c$; entre estos vértices, se toman todos los arcos de G.

De esta manera, $\backsim\backsim S$ es el subgrafo pleno correspondiente a S, el cual tiene los mismos vértices que S pero, entre ellos, todos los arcos de G. Es claro que, en general, $\backsim\backsim S \neq S$; luego el topos de grafos dirigidos no es booleano.

3. Conectivos en el topos de grafos dirigidos

En esta sección, $\mathfrak{M}$ denota el siguiente conjunto de grafos dirigidos:

$$\mathfrak{M} = \left\{ \bullet,\ \overset{\curvearrowright}{\bullet},\ \bullet \longrightarrow \bullet \right\}$$

3.1. Definición. Un *$\mathfrak{M}$-subgrafo* de un grafo dirigido G es un subgrafo de G isomorfo a alguno de los tres elementos de $\mathfrak{M}$.

Estos subgrafos permiten la clasificación de los subgrafos de Ω^n, es decir, de los conectivos del topos de grafos dirigidos. El primer paso consiste en la observación siguiente, tan obvia que la prueba se omite.

3.2. Lema. *Sea G un grafo dirigido. Todo subgrafo de G es la unión de los $\mathfrak{M}$-subgrafos de G que contiene.*

En particular, cada subgrafo de Ω^n se obtiene como unión de algunos de sus $\mathfrak{M}$-subgrafos. Como Ω^n es un grafo finito, sólo se requieren uniones binarias. El paso siguiente permite obtener los $\mathfrak{M}$-subgrafos de Ω^n a partir de los de Ω.

3.3. Lema. *Sean G, H grafos dirigidos. Todo $\mathfrak{M}$-subgrafo del grafo producto $G \times H$ es combinación heytiniana de $\mathfrak{M}$-subgrafos de G y H, considerados como subgrafos de $G \times H$.*

Prueba. El conjunto de vértices de $G \times H$ es $V(G) \times V(H)$; entre dos vértices (x, y), (w, z) de $G \times H$ existe un arco $(x, y) \longrightarrow (w, z)$ por cada pareja de arcos $(x \longrightarrow w, y \longrightarrow z)$.

Los $\mathfrak{M}$-subgrafos de $G \times H$ que tienen la forma $\bullet$, $\overset{\frown}{\bullet}$, $(a, b) \longrightarrow (a, d)$ con $b \neq d$ o $(a, b) \longrightarrow (c, b)$ con $a \neq c$, son el producto de $\mathfrak{M}$-subgrafos de G y H. Puesto que para subobjetos arbitrarios S, T de G, H se tiene

$$c_{G\times H}(S \times T) = \big(c_G(S)\pi_G\big) \wedge \big(c_H(T)\pi_H\big),$$

en todos estos casos la afirmación es válida.

Para el único caso no considerado, se nota que si $a \neq c$ y $b \neq d$ entonces

$$\left[(a, b) \xrightarrow{(g,h)} (c, d)\right] = \left[(a \xrightarrow{g} c) \times (b \xrightarrow{h} d)\right] \cap \backsim \big([(a, d)] \cup [(c, b)]\big).$$

Se concluye que los subgrafos de todas las potencias Ω^n son combinación heytiniana de los $\mathfrak{M}$-subgrafos de Ω. Éstos son sólo siete, pero aún puede prescindirse de algunos de ellos.

3.4. Lema. *Los $\mathfrak{M}$-subgrafos del grafo clasificador Ω son combinación heytiniana de los dos subgrafos $\overset{\frown}{\bullet}^{\,b}$ y $\bullet \xrightarrow{c} \bullet$.*

Prueba.

$$c\left[\overset{\frown}{\bullet}^{\,a}\right] = i_\Omega;$$
$$c\left[\bullet \xleftarrow{d} \bullet\right] = c\left[\bullet \xrightarrow{c} \bullet\right]\neg;$$
$$c\left[\overset{\frown}{\bullet}^{\,e}\right] = \neg;$$
$$c\,[\bullet 1] = c\left[\bullet \xrightarrow{c} \bullet\right] \wedge i_\Omega;$$
$$c\,[\bullet 0] = c\left[\bullet \xrightarrow{c} \bullet\right] \wedge \neg.$$

3.5. Notación. β, γ denotan los conectivos de aridad 1 correspondientes a los subgrafos $\overset{\frown}{\bullet}^{\,b}$, $\bullet \xrightarrow{c} \bullet$ del grafo clasificador Ω.

A continuación se describen estos conectivos como operaciones aplicadas a un subgrafo S del grafo dirigido G.
B. El conjunto de vértices de $B(S)$ es $V(S)$; entre estos vértices se toman los arcos de G que no pertenecen a S.
Γ. El conjunto de vértices de $\Gamma(S)$ es $V(G)$; los arcos de $\Gamma(S)$ son aquellos que entran a S.

3.6. Teorema. *En el topos de grafos dirigidos, todo conectivo es combinación de*

$$\mathcal{H} \cup \{\beta, \gamma\}.$$

Prueba. Se demuestra una afirmación equivalente, a saber: para cada entero $n \geq 0$, todo subgrafo de Ω^n es combinación heytiniana de los subgrafos $\overset{\frown}{\bullet}^{\,b}$, $\bullet \xrightarrow{c} \bullet$ del grafo clasificador Ω. Los lemas (3.2) y (3.4) establecen la validez del resultado para $n = 1$.
$n = 0$. El objeto terminal es el grafo $\overset{\frown}{\bullet}$ con un solo vértice y un solo arco. Su único subgrafo no heytiniano es $\bullet$ y para éste se tiene

$$c_1[\bullet] = c_\Omega[\bullet 1]\top.$$

Paso inductivo. Supóngase que la afirmación es válida para cierto entero $n \geq 1$. Por el lema (3.2) y teniendo en cuenta que Ω es finito, todo subgrafo de Ω^{n+1} es combinación heytiniana de sus $\mathfrak{M}$-subgrafos. Por el lema (3.3), todo $\mathfrak{M}$-subgrafo de $\Omega^{n+1} \cong \Omega^n \times \Omega$ es combinación heytiniana de $\mathfrak{M}$-subgrafos de Ω^n y Ω. Por hipótesis de inducción, todo $\mathfrak{M}$-subgrafo de Ω^n es combinación heytiniana de $\overset{\frown}{\bullet}^{\,b}$ y $\bullet \xrightarrow{c} \bullet$; por el lema (3.4), todo $\mathfrak{M}$-subgrafo de Ω es combinación heytiniana de $\overset{\frown}{\bullet}^{\,b}$ y $\bullet \xrightarrow{c} \bullet$.

4. Preguntas abiertas

Aunque se ha encontrado un conjunto de conectivos que, añadido a los de Heyting, permite obtener todos los conectivos del topos de grafos dirigidos, no se ha probado que es el más pequeño. Así queda la pregunta siguiente: ¿existe un conectivo que, junto con los de Heyting, constituye un sistema completo de conectivos para el topos de grafos? Por el teorema (3.6), basta probar que β, γ son combinación heytiniana de un solo conectivo o que ésto no es posible.

El resultado de este artículo establece que, a nivel proposicional, la lógica de los grafos puede expresarse con los conectivos de Heyting junto con β, γ. En seguida se plantea el problema sintáctico de encontrar un conjunto de axiomas que describa estos dos conectivos nuevos.

La técnica desarrollada para clasificar los conectivos en el topos de grafos dirigidos puede aplicarse con éxito en los topos de Grothendieck cuya categoría base es un conjunto ordenado. ¿Puede aplicarse esta herramienta a todos los topos de Grothendieck?

Bibliografía

1. M. Barr y C. Wells, *Toposes, Triples and Theories*, New York: Springer-Verlag, 1985.
2. X. Caicedo, *Introducción a los topos de Grothendieck, I*, Apuntes Matemáticos No. 8 (1988), Bogotá: Universidad de los Andes.
3. X. Caicedo, *Lógica de los haces de estructuras*, Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **XIX** No. **74** (1995), 569–586.
4. H.-D. Ebbinghaus, J. Flum y W. Thomas, *Mathematical Logic*, (Segunda edición), New York: Springer-Verlag, 1994.
5. P. Freyd, *Aspects of topoi*, Bull. Austral. Math. Soc. **7** (1972), 1–76.
6. P. Freyd y A. Scedrov, *Categories, Allegories*, Amsterdam: North-Holland, 1990.
7. R. Goldblatt, *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*, Amsterdam: North-Holland, 1979.
8. P. T. Johnstone, *Topos Theory*, London: Academic Press, 1977.
9. F. W. Lawvere, *Categories of spaces may not be generalized spaces as exemplified by directed graphs*, Revista Colombiana de Matemáticas **XX** (1986), 179–186.
10. S. Mac Lane e I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, New York: Springer-Verlag, 1992.