Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen III (1996), pp.63-81

LÓGICA DIAGONAL

MANUEL SIERRA(*)

Resumen. Como resultado de explorar algunas conexiones entre lógica, teoría de categorías, teoría de combinadores, la paradoja de Russell, la regla de contracción, la regla de modus ponens y el axioma de separación irrestricta de conjuntos, se presentan sistemas lógicos consistentes que pueden ser extendidos hasta incorporar la paradoja de Russell como uno de sus teoremas.

Abstract. As a result of explorations between logic, category theory, combinators, Russell's paradox, contraction rule, modus ponens and the unrestricted comprehension schema, we present consistent logic systems, which can be extended until proving Russell's paradox as a theorem.
Keywords. Russell's paradox, contraction, modus ponens, substitution, triviality.

1. Introducción

En este artículo se presentan versiones axiomáticas originales [13] para dos sistemas lógicos, llamados *Lógica Diagonal 1* y *Lógica Diagonal 2*, en los cuales se codifica únicamente la regla estructural contracción. Se establecen las consecuencias más representativas, se presenta un mecanismo para refutar enunciados falsos (lectura en el cálculo proposicional clásico), se garantiza la consistencia y se muestra la independencia de los axiomas; por otro lado se exhiben modelos de la lógica a nivel categórico que tienen interés matemático.

(*)Texto recibido 28/4/97, revisado 15/9/97. Manuel Sierra, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Se prueba que estos sistemas tienen una importante peculiaridad técnica: no admiten la substitución arbitraria de fórmulas en fórmulas, por lo tanto las técnicas de prueba difieren de las usuales; se deducen así dos versiones no equivalentes y restringidas para la regla de modus ponens. Por último, se demuestra que la *lógica diagonal 2* puede ser extendida de manera natural a una lógica no trivial en la cual es demostrable la Paradoja de Russell.

1.1 Paradoja de Russell. Bertrand Russell, al iniciar este siglo, detectó que la clase $R = \{x: \neg(x \in x)\}$ no es un conjunto, ya que de serlo se tendría la contradicción lógica: $R \in R \Longleftrightarrow \neg(R \in R)$. Este hecho es conocido como la Paradoja de Russell.

1.2 Paradoja de Curry. Haskell Curry probó que cualquier teoría de conjuntos que incluya el axioma de separación irrestricta de conjuntos, $\exists z \forall (x \in z \Longleftrightarrow F(x))$ (donde $F(x)$ es una fórmula en la cual z no ocurre libre para x), es trivial si su lógica de base contiene las reglas de modus ponens: $A, A \Longrightarrow B \vdash B$, y contracción: $A \Longrightarrow (A \Longrightarrow B) \vdash A \Longrightarrow B$ (además de las reglas de especificación usuales para los cuantificadores $\forall$, $\exists$ y simplificación para $\Longleftrightarrow$). Este hecho es conocido como la Paradoja de Curry. A continuación se presenta la prueba:

1. $\exists z \forall x(x \in z \Longleftrightarrow (x \in x \Longrightarrow A))$	Construcción de conjuntos
2. $\forall x(x \in R \Longleftrightarrow (x \in x \Longrightarrow a))$	Especificación $\exists$ en 1
3. $R \in R \Longleftrightarrow (R \in R \Longrightarrow A)$	Especificación $\forall$ en 2
4. $R \in R \Longrightarrow (R \in R \Longrightarrow A)$	Simplificación de $\Longleftrightarrow$ en 3
5. $(R \in R \Longrightarrow A) \Longrightarrow R \in R$	Simplificación de $\Longleftrightarrow$ en 3
6. $R \in R \Longrightarrow A$	Contracción en 4
7. $R \in R$	Modus ponens entre 5 y 6
8. A	Modus ponens entre 6 y 7

La negación puede ser definida por $\neg A = A \Longrightarrow 0$, donde 0 es una fórmula tal que $0 \vdash B$ para toda fórmula B (0 representa la falsedad); si en la prueba anterior se hace $A = 0$, entonces el paso 3 sería $R \in R \Longleftrightarrow \neg(R \in R)$. Por lo tanto, una teoría de conjuntos que demuestre la Paradoja de Russell con una lógica de base que incluya simplificación para $\Longleftrightarrow$, modus ponens y contracción es trivial.

Se inicia este trabajo con la siguiente pregunta: ¿cuál sería un instrumentario lógico minimal y no trivial en el que se pueda desarrollar la Paradoja de Russell?

1.3 Teorema de Cantor. Georg Cantor probó que $A < P(A)$: existe una función inyectiva pero no una biyectiva entre un conjunto dado y el conjunto de sus subconjuntos. Puesto que existe una biyección entre $P(A)$ y 2^A (el conjunto de funciones de A en 2, donde 2 es un conjunto de 2 elementos), se tiene un enunciado equivalente: $A < 2^A$. Los enunciados anteriores son conocidos como el Teorema de Cantor.

1.4 Teorema de Lawvere. F.W. Lawvere probó que dados objetos A y B en una categoría cartesiana cerrada, si existe una flecha $g\colon B \to B$ sin puntos fijos entonces no existe una flecha $f\colon A \to B^A$ 1-sobre (si nos ubicamos al interior de una categoría cartesiana cerrada C, con objeto terminal 1, decimos que una flecha $f\colon A \to B$ de C es 1-sobre si para toda flecha $y\colon 1 \to B$ de C existe una flecha $x\colon 1 \to A$ de C tal que $fx = y$). Este enunciado es conocido como el Teorema de Lawvere. En conjuntos, esto nos dice que si existe una función $g\colon B \to B$ sin puntos fijos entonces no existe una función $f\colon A \to B^A$ sobre; para el caso particular $B = 2$, se tiene el Teorema de Cantor: $A < 2^A$.

El teorema de Lawvere vale en categorías cartesianas arbitrarias. Sin embargo, como una indicación, observemos la prueba en la categoría de conjuntos. Se supone que existe $g\colon B \to B$ sin puntos fijos y que además existe $f\colon A \to B^A$. Se define entonces la función h:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \Delta & & f^* & & g & & \\ h: & A & \longrightarrow & A \times A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B & \\ & a & \longrightarrow & (a,a) & \longrightarrow & [f(a)](a) & \longrightarrow & g([f(a)](a)) & . \end{array}$$

Como $h \in B^A$ entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = h$ y por lo tanto: $[f(a)](a) = h(a) = g([f(a)](a))$, es decir, $[f(a)](a)$ es punto fijo de g, lo cual contradice la hipótesis.

Surge entonces una pregunta natural: ¿existen categorías cartesianas cerradas donde toda flecha tenga puntos fijos? y, si tales categorías existen, ¿cuál es su sustrato lógico natural?

1.5 Teoría de combinadores. La teoría de combinadores fue inicialmente introducida por M. Schönfinkel en 1920, y fue redescubierta independientemente por Curry, quien es responsable de la mayor parte de su desarrollo; una de las ideas centrales de la teoría de combinadores es la de estudiar el concepto abstracto de operación como una base para la matemática. En la teoría de combinadores se considera un conjunto de símbolos primarios, llamados átomos, entre los cuales se distinguen las variables denotadas $x, y, z, \ldots$, y las constantes I, K, S. A partir de los átomos se construye el conjunto de términos así: si X es átomo y Y, Z son términos entonces X y YZ son términos. Se establece una relación transitiva entre términos, denotada $\equiv$, que además se preserva bajo concatenación y es regida por los siguientes 4 axiomas:

$$Ix \equiv x\,, \qquad Kxy \equiv x\,, \qquad Sxyz \equiv xz(yz)\,, \qquad x \equiv x.$$

Se omite asociatividad a la izquierda, es decir, abc es $(ab)c$; las variables que aparecen a continuación de las constantes se llaman argumentos; combinaciones de las constantes dan origen a los combinadores:

$$B = S(KS)K\,, \qquad W = SS(KI)\,, \qquad P = WS(BWB).$$

El comportamiento de estos combinadores respecto a la relación $\equiv$ es el siguiente:

$$Bxyz \equiv x(yz)\,, \qquad Wxy \equiv xyy\,, \qquad Pn \equiv n(Pn).$$

Prueba:

$$\begin{aligned} Bxyz &\doteq S(KS)Kxyz \equiv KSx(Kx)yz \equiv S(Kx)yz \equiv Kxz(yz) \equiv x(yz) \\ Wxy &= SS(KI)xy \equiv Sx(KIx)y \equiv SxIy \equiv xy(Iy) \equiv xyy \\ Pn &= WS(BWB)n \equiv S(BWB)(BWB)n \equiv BWBn(BWBn) \\ &\equiv W(Bn)(BWBn) \equiv Bn(BWBn)(BWBn) \\ &\equiv n(BWBn(BWBn)) \equiv n(Pn). \end{aligned}$$

Se tiene entonces un combinador (operador) de punto fijo P: todo operador n de un argumento tiene a Pn como punto fijo. La pregunta natural en este punto es: ¿es posible trasladar el operador de punto fijo a las categorías?

1.6 Cálculo secuencial clásico. El cálculo secuencial clásico es una de las más bellas ilustraciones de las simetrías de la lógica. Las ideas y un desarrollo muy completo se deben a Gentzen. Un secuente es una expresión de la forma $A \vdash B$ donde A y B son sucesiones ordenadas y finitas (posiblemente vacías) de fórmulas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_m$. La interpretación intuitiva de $A \vdash B$ es que la conjunción de los a_i implica la disyunción de los b_j; si B es vacío, el secuente asegura la negación de la conjunción de las a_i; si A y B son vacíos, el secuente asegura una contradicción. El cálculo secuencial clásico está gobernado por 3 reglas estructurales, que son las más importantes del cálculo, ya que sin especificar conectivos, queda determinado gran parte de su comportamiento. Estas reglas son obvias desde el punto de vista denotacional.

Las reglas de intercambio expresan de alguna manera la conmutatividad de la lógica:

$$\frac{A, a, b, B \vdash C}{A, b, a, B \vdash C}\,, \qquad \frac{C \vdash A, a, b, B}{C \vdash A, b, a, B}\,.$$

Las reglas de debilitamiento expresan la suficiencia de deducciones con premisas adicionales o conclusiones debilitadas:

$$\frac{A, B \vdash C}{A, c, B \vdash C}\,, \qquad \frac{C \vdash A, B}{C \vdash A, c, B}\,.$$

Las reglas de contracción expresan la idempotencia de la conjunción y de la disyunción:

$$\frac{A, c, c, B \vdash C}{A, c, B \vdash C} \quad , \quad \frac{C \vdash A, c, c, B}{C \vdash A, c, B} \quad .$$

El cálculo secuencial clásico, que es simétrico y no constructivo, puede ser alterado de dos maneras: restringiendo los secuentes o restringiendo las reglas. Cuando los secuentes son de la forma $A \vdash a$ o $A \vdash$ con a fórmula, se obtiene el cálculo intuicionista de Heyting; el cálculo resultante es asimétrico, pero con la particularidad de que es constructivo, es decir, existe una correspondencia entre pruebas y algoritmos. Cuando se omiten las reglas de contracción y debilitamiento y sólo se conserva la regla de permutación, se tiene la lógica lineal de Girard; desde el punto de vista de la teoría de la prueba, la lógica lineal introduce una nueva clase de invariantes llamadas pruebas netas.

1.7 Lógica diagonal. Partiendo de estudios en una pre-categoría de tipos (que no mencionaremos aquí, véase [13]), se llega al estudio de dos lógicas, una de ellas extensión de la otra, en las cuales se codifica únicamente la regla estructural contracción. Llamaremos a esas lógicas, *lógicas diagonales* 1 y 2, y pasaremos a estudiarlas a continuación.

2. Lógica diagonal LD1

2.1 Axiomas y reglas de inferencia de LD1. El alfabeto consta de un conjunto no vacío de símbolos primarios, un par de símbolos de puntuación, a saber, paréntesis izquierdo y derecho, y un par de conectivos binarios, representados por $\cdot$ y $\equiv$ (concatenación diagonal y equivalencia diagonal). El conjunto de fórmulas es generado recursivamente a partir de los símbolos primarios utilizando los conectivos diagonales. La lógica diagonal LD1 consta de los siguientes 3 axiomas (notación: $AB = A \cdot B, ABC = (AB)C$):

A1. Contracción $A(AB) \equiv AB$

A2. Asociatividad $ABC \equiv A(BC)$

A3. Contracción $A(ABC) \equiv ABC$.

Las letras mayúsculas son fórmulas generadas por concatenación; omitimos los paréntesis para indicar asociatividad a la izquierda. Los axiomas pretenden codificar una relación $\equiv$ entre las flechas de las pre-categorías de tipos; intuitivamente la concatenación principal de las fórmulas puede leerse como una flecha en dichas categorías. En lo que sigue, algunas veces escribiremos la flecha explícitamente; los axiomas toman entonces la forma:

A1. $A \to AB \equiv A \to B$
A2. $AB \to C \equiv A \to BC$
A3. $A \to ABC \equiv AB \to C$.

La lógica diagonal LD1 utiliza 3 reglas de inferencia para generar teoremas diagonales:

R1.	Transitividad	$A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$
		$A \equiv B,\ B \equiv C \vdash A \equiv C$
R2.	Simetría	$A \equiv B \vdash B \equiv A$
R3.	Modus ponens	$A \equiv B,\ A \vdash B$.

Las reglas pretenden codificar la composición en categorías, la preservación de la relación $\equiv$, el carácter de relación parcial de equivalencia para $\equiv$ y la preservación de la verdad por $\equiv$.

2.2 Modus Ponens en LD1. Existen reglas de Modus Ponens restringidas para la concatenación diagonal; estas dos reglas son las que permiten el "fraccionamiento" de la concatenación; desde el punto de vista categórico permiten la obtención de "buenas" flechas.

Modus ponens 1 $AB,\ AB \to AC \vdash AC$.

Utilizando $A1$, simetría, modus ponens, transitividad de $\to$ y $A1$ de nuevo, se tiene la prueba: $AB,\ AB \to AC \vdash A \to AB,\ \ AB \to AC \vdash A \to AC \vdash AC$.

Modus ponens 2 $AC,\ AC \to ABD \vdash ABD$.

Utilizando $A1$, simetría, modus ponens, transitividad de $\to$ y $A1$ de nuevo, se tiene la prueba: $AC,\ AC \to ABD \vdash A \to AC,\ \ AC \to ABD \vdash A \to ABD \vdash ABD$.

2.3 Regla de contracción total en LD1. La regla de contracción total nos dice: cualquier concatenación finita y arbitrariamente puntuada de un mismo símbolo primario a, es diagonalmente equivalente a la fórmula $a \to a$.

Sean $F(a)$, $G(a)$ y $H(A)$ fórmulas construidas a partir sólo del símbolo primario a por concatenación, sean B y C fórmulas arbitrarias.

Contracción izquierda: $F(a) \to B \equiv a \to B$.

Realizamos la prueba utilizando inducción sobre el número de ocurrencias de a en $F(a)$. Para el paso base, basta utilizar $A1$, simetría y transitividad de $\equiv$: $a \to B \equiv a \to aB \equiv a \to B$ (obsérvese que no tendríamos por qué poder usar reflexividad de $\equiv$ en general). Para el paso de inducción, suponemos que en $F(a)$, a figura al menos dos veces, es decir, $F(a)$ es de la forma $G(a)H(a)$, además la hipótesis de inducción nos dice que $G(a) \to C \equiv a \to C \equiv H(a) \to C$; utilizando $A2$, la hipótesis de inducción, $A1$, de nuevo la hipótesis de inducción y finalmente transitividad, tenemos: $F(a) \to B = G(a)H(a) \to B \equiv G(a) \to H(a)B \equiv H(a) \to H(a)B \equiv H(a) \to B \equiv a \to B$.

$$\textbf{Contracción derecha}: a \to F(a) \equiv a \to a.$$

Realizamos la prueba utilizando inducción sobre el número de ocurrencias de a en $F(a)$. Para el paso base, se procede como en la prueba anterior. Para el paso de inducción, suponemos que en $F(a)$, a figura al menos dos veces, es decir, $F(a)$ es de la forma $G(a)H(a)$; la hipótesis de inducción nos dice que $a \to H(a) \equiv a \to a$. Utilizando $A2$ y simetría, contracción izquierda y la hipótesis de inducción, tenemos: $a \to F(a) = a \to G(a)H(a) \equiv aG(a) \to H(a) \equiv a \to H(a) \equiv a \to a$.

$$\textbf{Contracción total}: F(a) \to G(a) \equiv a \to a.$$

La prueba es consecuencia de los dos resultados anteriores: $F(a) \to G(a) \equiv a \to G(a) \equiv a \to a$.

3. Interpretación clásica y consistencia de LD1

Traducimos las fórmulas diagonales en el cálculo proposicional clásico, interpretando la conjunción diagonal como conjunción clásica, la equivalencia diagonal como equivalencia clásica y los símbolos primarios como variables proposicionales. Las traducciones de los axiomas son teoremas en el cálculo proposicional clásico:

A1. $A \wedge (A \wedge B) \Longleftrightarrow A \wedge B$

A2. $(A \wedge B) \wedge C \Longleftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

A3. $A \wedge ((A \wedge B) \wedge C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$.

La traducción de las reglas de inferencia produce reglas clásicas que preservan validez:

R1. $A \wedge B, B \wedge C \vdash A \wedge C$

$A \Longleftrightarrow B, B \Longleftrightarrow C \vdash A \Longleftrightarrow C$

R2. $A \Longleftrightarrow B \vdash B \Longleftrightarrow A$

R3. $A \Longleftrightarrow B, A \vdash B$.

De las traducciones anteriores se infiere que la traducción de teoremas diagonales produce teoremas clásicos, es decir: si la traducción de una fórmula diagonal no es un teorema clásico entonces dicha fórmula no es un teorema diagonal; como los símbolos primarios no son teoremas clásicos, tenemos que LD1 no demuestra todas sus fórmulas y, por lo tanto, es consistente.

4. Independencia de los axiomas

4.1 Independencia de $A3$ y de $A1$. Para probar la independencia de $A3$, supongamos que existe una prueba de $A3$ a partir de $A1$ y $A2$. Podemos asegurar que las reglas de inferencia $AB, BC \vdash AC$ y $A \equiv B, A \vdash B$ no se utilizan, puesto que para utilizarlas habría que añadir premisas adicionales que no se podrían eliminar posteriormente. Si definimos la *complejidad* de una fórmula, construida solo con concatenación, como el número de símbolos primarios que aparecen en ella, notamos que $A1$ y $A3$ alteran la complejidad mientras que $A2$ no la altera. Tenemos así, gracias a la simetría de $\equiv$, que la prueba tendría la forma $A(ABC) \equiv \cdots \equiv ABC$, aplicándose en algún momento $A1$ para reducir la complejidad. Considerando una prueba de longitud mínima, donde $A(AB) \equiv AB$ es la primera aplicación de $A1$ que reduce la complejidad, tendríamos que haber utilizado en los pasos anteriores dos veces $A2 : \cdots A(AB) \equiv AAB \equiv A(AB) \equiv AB \cdots$ lo que haría posible construir una prueba más corta, contradiciéndose la existencia de una prueba minimal. De esta forma se muestra la imposibilidad de construir tal prueba, es decir, $A3$ no es consecuencia de $A1$ y $A2$. Similarmente $A1$ no es consecuencia de $A3$ y $A2$.

4.2 Independencia de $A2$. De existir una prueba de A2 a partir de A1 y A3, gracias a la simetría de $\equiv$, la prueba tendría la forma $A(BC) \equiv \cdots \equiv ABC$ donde se utilizarían ambos axiomas (esto debido a que $A2$ preserva complejidad). Si la prueba se inicia con $A(BC)$, entonces solo podría aplicarse $A1$ produciendo $A(A(BC)), A(A(A(BC)))$, etc. y nunca podría aplicarse $A3$; concluimos que $A2$ no es consecuencia de $A1$ y $A3$.

5. LD1 es una lógica sin substituciones

La regla de substitución por equivalencia dice: si $A \equiv B$ entonces $F(A) \equiv F(B)$, donde $F(A)$ es una fórmula en la que aparece A y $F(B)$ es $F(A)$ donde al menos una ocurrencia de A ha sido substituida por B.

5.1 LD1 sin $A3$ no tiene substitución por equivalencia. Si la regla de substitución por equivalencia fuese válida en LD1 sin $A3$, al utilizar $A2$ y substitución, $A1$, $A2$ y simetría, tendríamos: $A(ABC) \equiv A(A(ABC)) \equiv A(BC) \equiv ABC$ que es, por transitividad de $\equiv$, una prueba de $A3$ a partir de $A1$ y $A2$, lo cual es imposible ya que $A3$ es independiente; por lo tanto, la regla de substitución por equivalencia no es válida en LD1 sin $A3$, y tampoco podemos obtener $A(ABC) \equiv A(A(BC))$ en LD1 sin $A3$.

5.2 LD1 sin $A2$ no tiene substitución por equivalencia. Puesto que ni $A1$ ni $A3$ pueden reagrupar $(AB)C$ como $A(BC)$, tampoco podemos obtener $A(ABC) \equiv A(A(BC))$ en LD1 sin $A2$; por lo tanto, la regla de substitución por equivalencia no es válida en LD1 sin $A2$.

5.3 LD1 sin $A1$ no tiene substitución por equivalencia. En LD1 tenemos la siguiente prueba de $A(ABC) \equiv A(A(BC))$:

1.	$A(ABC) \equiv ABC$	$A3$
2.	$ABC \equiv A(BC)$	$A2$
3.	$A(ABC) \equiv A(BC)$	Transitividad entre 1 y 2
4.	$A(BC) \equiv A(A(BC))$	$A1$
5.	$A(ABC) \equiv A(A(BC))$	Transitividad entre 3 y 4.

Sea P una prueba de longitud l mínima. Tenemos $l \leq 5$ y también $l \geq 3$, ya que en la prueba deben figurar $A3$ y $A2$. Ensayando las pocas posibilidades que se tienen, vemos que no existe una prueba de longitud 3, y concluimos así que la longitud de la prueba mínima es 5. Agotando las posibilidades observamos que es imposible prescindir de $A1$. Concluimos así que tampoco podemos obtener $A(ABC) \equiv A(A(BC))$ en LD1 sin $A1$; por lo tanto, la regla de substitución por equivalencia no es válida en LD1 sin $A1$.

En resumen, tenemos que si en LD1 vale la regla de substitución por equivalencia entonces se requieren los 3 axiomas para probarla.

5.4 LD1 no tiene substitución por equivalencia. Si en LD1 vale substitución por equivalencia entonces $B(AAA) \equiv B(AA)$ sería un teorema, puesto que $AAA \equiv AA$ es un teorema (axioma 1); pero $B(AAA) \equiv B(AA)$ no es un teorema, ya que en general no hay contracción a la derecha.

Si $B(AAA) \equiv B(AA)$ fuese un teorema, existiría una prueba de longitud mínima; examinando las posibilidades básicas tenemos ($\cdots \equiv_i \cdots$ indica equivalencia utilizando el axioma i):

$B \to AAA \equiv_1 B \to B(AAA) \equiv_2 BB \to (AAA) \equiv_3 B \to BB(AAA)$ no contrae.

$B \to AAA \equiv_1 B \to B(AAA) \equiv_3$ no aplicable.
$B \to AAA \equiv_2 B(AA) \to A \equiv_1 B(AA) \to B(AA)A \equiv_3 B \to B(AA)(B(AA)A)$ no contrae.
$B \to AAA \equiv_2 B(AA) \to A \equiv_3 B \to B(AA)A \equiv_1 B \to B(B(AA)A)$ no contrae.
$B \to AAA \equiv_3$ no aplicable.

Al intercalar repeticiones de los axiomas en los esquemas de prueba anteriores no se consigue contraer el número de ocurrencias de A. Concluimos así que, la regla de substitución por equivalencia no es válida en LD1.

6. LD1 sólo valida la regla de contracción

6.1 LD1 no valida regla de debilitamiento. La codificación de la regla de debilitamiento, es $A \equiv AB$ o $A \equiv BA$ que no son teoremas diagonales, puesto que sus interpretaciones clásicas tienen la forma $A \iff (A \wedge B)$, o $A \iff (B \wedge A)$, que no son teoremas clásicos. Por lo tanto, LD1 no valida la regla de debilitamiento.

6.2 LD1 no valida regla de intercambio. Podemos refutar la regla de intercambio interpretando LD1 en la aritmética de la siguiente manera: los símbolos primarios se interpretan como números naturales, la concatenación como la función primera proyección, la equivalencia como igualdad. La interpretación de los tres axiomas tiene la forma $A = A$, las interpretaciones de las reglas de inferencia tienen la forma: $A, B \vdash A$; $A = B, B = C \vdash A = C$; $A = B \vdash B = A$; $A, A = B \vdash B$. Se tiene entonces que los números naturales con la relación de igualdad y con la operación binaria primera proyección son un modelo de LD1; además si A es diferente de B entonces no $\vdash AB \equiv BA$. Por lo tanto, LD1 no valida la regla de intercambio.

7. Modelos de LD1

7.1 Categorías con contracción. Diremos que una categoría tiene contracción si tiene productos finitos y para todo objeto a, se verifica el axioma de contracción $a \times a \cong a$, donde $\cong$ significa isomorfismo de objetos. Algunos ejemplos de categorías con contracción son los siguientes: (i) un semiretículo inferior visto como categoría (los productos son los ínfimos); (ii) la categoría de los conjuntos infinitos y su esqueleto: la categoría de los cardinales infinitos (los productos son los productos cartesianos); (iii) el monoide de los elementos idempotentes de cualquier semigrupo inverso, visto como categoría (los productos son los productos en el monoide). La conmutatividad y asociatividad del producto junto con el nuevo axioma, aseguran que: $a \times (a \times b) \cong a \times b$, $a \times (a \times b \times c) \cong a \times b \times c$.

7.2 Interpretación categórica de LD1. Hacemos la siguiente lectura de LD1 en una categoría con contracción: los símbolos primarios se interpretan como objetos, la concatenación como producto, la equivalencia como isomorfismo, las reglas de inferencia como "si existe una construcción de las premisas en la categoría, entonces existe una construcción de las conclusiones en la categoría". Las interpretaciones de los axiomas son teoremas en las categorías con contracción:

A1. $A \times (A \times B) \cong A \times B$

A2. $A \times B \times C \cong A \times (B \times C)$

A3. $A \times (A \times B \times C) \cong A \times B \times C$.

Las interpretaciones de las reglas de inferencia son válidas en las categorías con contracción:

R1. $A \times B, B \times C \vdash A \times C$

$A \cong B, B \cong C \vdash A \cong C$

R2. $A \cong B \vdash B \cong A$

R3. $A \cong B, A \vdash B$.

Tenemos entonces que la interpretación de todo teorema diagonal es teorema en las categorías con contracción, es decir, las categorías con contracción son modelos de LD1.

8. Lógica diagonal LD2

8.1 Axiomas y reglas de inferencia de LD2. El alfabeto consta de un conjunto no vacío de símbolos primarios, un par de símbolos de puntuación, a saber, paréntesis izquierdo y derecho, cuatro conectivos binarios representados por: $\cdot$ $\equiv$, $-$ $\longrightarrow$ (concatenación diagonal, equivalencia diagonal, adjunción diagonal e implicación diagonal). El conjunto de fórmulas, es generado recursivamente a partir de los símbolos primarios utilizando los conectivos diagonales.

La lógica diagonal LD2 consta de los siguientes tres axiomas:

A1. Contracción $A \to (A - B) \equiv A \to B$

A2. Asociatividad $AB \to C \equiv A \to (B - C)$

A3. Contracción $A \to (AB - C) \equiv AB \to C$.

Las letras mayúsculas son fórmulas generadas por concatenación y adjunción; se omiten los paréntesis para indicar asociatividad a la izquierda, y se omiten los puntos para indicar concatenación; $\equiv$ será considerado el conectivo principal, seguido por $\to$. Los axiomas pretenden codificar una relación entre las flechas de las pre-categorías de tipos con productos y exponenciales. Intuitivamente, la implicación diagonal puede leerse como una flecha en dichas categorías, la adjunción diagonal como exponencial y la conjunción diagonal como producto. LD2 utiliza 7 reglas de inferencia para la producción de teoremas:

R1. Transitividad	$A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$
	$A \to B' \equiv B \to B',\ B \to B' \equiv C \to C' \vdash$
	$A \to A' \equiv C \to C'$
R2. Simetría	$A \to A' \equiv B \to B' \vdash B \to B' \equiv A \to A'$
R3. Modus ponens	$A \to A' \equiv B \to B',\ A \to A' \vdash B \to B'$
R4. Reducción	$AB \vdash A$
	$AB \vdash B$
R5. Impresión	$A - B \to C \vdash AB \to C$
	$AB \to C - (A - B) \vdash A - B \to C - (A - B)$
R6. Modus ponens 1	$A \to B,\ AB \to A - C \vdash A \to C$
R7. Modus ponens 2	$A \to C,\ AC \to AB - D \vdash AB \to D$.

Las reglas de inferencia pretenden codificar los siguiente aspectos: la composición en las categorías y preservación de $\equiv$, el carácter de relación parcial de equivalencia para $\equiv$, la preservación de la verdad por $\equiv$, las proyecciones en los productos, la relación entre productos y exponenciales, algunos mecanismos que permiten detectar 'buenas' flechas (éstos justifican el nombre de implicación para $\to$).

8.2 Reducción a LD1. LD2 puede reducirse a LD1 (extendida con la regla de reducción) si se interpretan $-$ y $\to$ como concatenación; por lo tanto, LD2 es consistente. La regla de substitución por equivalencia no es válida en LD2, ya que su validez en la reducción se preservaría. Por esta misma razón, los axiomas son independientes.

8.3 Categorías con contracción y exponenciales. Las categorías con contracción y exponenciales existen: un ejemplo de ellas es la categoría de conjuntos infinitos con el producto cartesiano y la exponencial conjuntista. Dada C una categoría con exponenciales, representamos por $C(a \rightarrow b)$ el conjunto de flechas de a en b, y por $b-a$ la exponencial b^a; con $X \sim Y$ indicamos que existe una biyección entre los conjuntos X y Y. Hacemos la siguiente interpretación de la lógica diagonal LD2 utilizando una categoría con contracción y exponenciales: los símbolos primarios se interpretan como objetos, la concatenación como producto, la adjunción como exponencial (las anteriores son lecturas en la categoría), la implicación entre dos fórmulas como el conjunto de flechas entre las interpretaciones de las fórmulas, la equivalencia entre las fórmulas como una biyección entre los conjuntos de flechas de las interpretaciones de las fórmulas, la regla de inferencia $A \vdash B$ como $\exists s A \vdash \exists s B$ donde $\exists c$ significa: c puede ser construído en la categoría, cuando c es un objeto; $\exists X$ significa: existe un elemento de X, cuando X es un conjunto, $\exists X \sim Y$ significa: existe una biyección entre X y Y, cuando X y Y son conjuntos. Las interpretaciones de los axiomas y reglas de inferencia de LD2 son teoremas y reglas de prueba válidas en las categorías con contracción y exponenciales:

A1. $C(A \rightarrow B) \sim C(A \rightarrow A - B)$

Prueba: usa contracción y exponenciales:

$C(A \rightarrow A - B) \sim C(A \times A \rightarrow B) \sim C(A \rightarrow B)$.

A2. $C(D \times A \rightarrow B) \sim C(D \rightarrow A - B)$

Prueba: definición de exponenciales.

A3. $C(A \rightarrow (A \times B) - D) \sim C(A \times B \rightarrow D)$

Prueba: usa contracción y exponenciales:

$C(A \rightarrow (A \times B) - D) \sim C(A \times (A \times B) \rightarrow D) \sim C(A \times B \rightarrow D)$.

R1. $\exists C(A \rightarrow B), \exists C(B \rightarrow D) \vdash \exists C(A \rightarrow D)$

Prueba: composición en C.

$\exists(C(A \rightarrow A') \sim C((B \rightarrow B')), \exists(C(B \rightarrow B') \sim C((C \rightarrow C')) \vdash$

$\exists(C(A \rightarrow A') \sim C((C \rightarrow C'))$

Prueba: composición de funciones biyectivas es biyectiva.

R2. $\exists(C(A \rightarrow A') \sim C(B \rightarrow B')) \vdash \exists(C(B \rightarrow B') \sim C(A \rightarrow A'))$

Prueba: la inversa de una función biyectiva es biyectiva.

R3. $\exists C(A \rightarrow A') \sim C((B \rightarrow B')), \exists(C(A \rightarrow A') \vdash \exists C(B \rightarrow B')$

Prueba: biyecciones preservan cardinal no nulo.

R4. $\exists(A \times B) \vdash \exists A$

$\exists(A \times B) \vdash \exists B$

Prueba: definición de producto.

R5. $\exists C(A - B \rightarrow D) \vdash \exists C(A \times B \rightarrow D)$

Prueba: usa exponenciales y composición:

$\exists C(A - B \rightarrow D) \vdash \exists C(A - B \rightarrow D), \exists C(B \times A \rightarrow B) \vdash$

$\exists C(A - B \rightarrow D), \exists C(B \rightarrow A - B) \vdash$

$\exists C(B \rightarrow D), \exists C(A \times B \rightarrow B) \vdash \exists C(A \times B \rightarrow D)$.

R5. $\exists C(A \times B \rightarrow D - (A - B)) \vdash \exists C(A - B \rightarrow D - (A - B))$.

Prueba: $\exists C(A \times B \rightarrow D - (A - B))$, $\exists C((A - B) \times D \rightarrow (A - B)) \vdash$

$\exists C(A - B \rightarrow D - (A - B)$.

R6. $\exists C(A \rightarrow B), \exists C(A \times B \rightarrow A - D) \vdash \exists C(A \rightarrow D)$

Prueba: usa exponenciales y contracción:

$\exists C(A \times B \rightarrow A - D), \exists C(A \rightarrow B) \vdash \exists C(A \times B \times A \rightarrow D)$

$\vdash \exists C(B \times A \times A \rightarrow D) \vdash \exists C(B \times A \rightarrow D) \vdash \exists C(B \rightarrow A - D)$,

$\exists C(A \rightarrow B) \vdash \exists C(A \rightarrow A - D) \vdash \exists C(A \times A \rightarrow D) \vdash \exists C(A \rightarrow D)$.

R7. $\exists C(A \rightarrow D), \exists C(A \times D \rightarrow (A \times B) - E) \vdash \exists C(A \times B \rightarrow E)$

Prueba: usa exponenciales y contracción:

$\exists C(A \rightarrow D), \exists C(A \times D \rightarrow (A \times B) - E) \vdash \exists C(D \times A \rightarrow (A \times B) - E)$

$\vdash \exists C(D \rightarrow A - ((A \times B) - E)), \exists C(A \rightarrow D) \vdash$

$\exists C(A \rightarrow A - ((A \times B) - E) \vdash \exists C(A \times A \rightarrow (A \times B) - E)$

$\vdash \exists C(A \rightarrow (A \times B) - E)) \vdash \exists C(A \times (A \times B) \rightarrow E) \vdash \exists C(A \times B \rightarrow E)$.

9. LD2 extendida y la paradoja de Russell

Al extender LD2 con el axioma

$$\text{A4.} \quad A \rightarrow B \equiv A - B \rightarrow B$$

la lógica resultante no se trivializa. Esto puede probarse teniendo en cuenta que, al interpretar $A \rightarrow B$ y $A - B$ como AB, LD2 se transforma en LD1 (extendida con la regla de reducción). Además la lectura del nuevo axioma, $AB \equiv ABB$, es consistente con LD1 ya que su interpretación en la lógica clásica es $A \wedge B \Longleftrightarrow A \wedge B \wedge B$. En el contexto anterior, aparece un objetivo futuro interesante: construir una teoría de conjuntos no trivial, que incluya el axioma de separación de conjuntos sin restricciones, y en la cual sea demostrable la paradoja de Rusell. Para lograr esto, habrá que extender LD2 con alguna versión de los cuantificadores universal y existencial $(\forall, \exists)$, de tal manera que satisfagan "reglas de especificación" adecuadas; además necesitaríamos admitir la *regla de simplificación para* $\equiv$:

$$A \to B \equiv A' \to B' \vdash A - B \to A' - B',$$

e incluir el predicado de pertenencia $\in$ y la constante 0, así como la negación: $\neg A = A \to 0$. La nueva regla de inferencia por sí misma no afecta la consistencia de LD2, puesto que su interpretación clásica es simplemente la regla de simplificación para $\Longleftrightarrow$, pero en cambio el nuevo axioma 4 hace $\to$ inconsistente el sistema (demuestra todas las fórmulas de la forma $A \to B$) (ver 9.3).

9.1 Acerca de la $\Longrightarrow$ trivialidad. Toda teoría que contenga el axioma de separación irrestricta de conjuntos, las reglas de especificación para los cuantificadores universal y existencial, la regla de transitividad de la implicación, la regla de contracción y la regla de debilitamiento: $A \vdash B \Longrightarrow A$, es $\Longrightarrow$ trivial.

Prueba:

1. $\exists z \forall x(x \in z \Longleftrightarrow (x \in x \Longrightarrow A))$	Construcción de conjuntos
2. $\forall x(x \in R \Longleftrightarrow (x \in x \Longrightarrow A))$	Especificación de $\exists$ en 1
3. $R \in R \Longleftrightarrow (R \in R \Longrightarrow A))$	Especificación de $\forall$ en 2
4. $R \in R \Longrightarrow (R \in R \Longrightarrow A))$	Simplificación de $\Longleftrightarrow$ en 3
5. $(R \in R \Longrightarrow A) \Longrightarrow (R \in R)$	Simplificación de $\Longleftrightarrow$ en 3
6. $R \in R \Longrightarrow A$	Contracción en 4
7. $B \Longrightarrow (R \in R \Longrightarrow A)$	Debilitamiento en 6
8. $B \Longrightarrow (R \in R)$	Transitividad entre 5 y 7
9. $B \Longrightarrow A$	Transitividad entre 8 y 6

La trivialidad puede ser fatal:

1. $\forall x \forall y(\forall t(t \in x \Longleftrightarrow t \in y) \Longrightarrow x = y)$	Extensionalidad
2. $\forall t(t \in x \Longleftrightarrow t \in y) \Longrightarrow x = y$	Especificación de $\forall$ en 1
3. $t \in x \Longrightarrow t \in y$	$\Longrightarrow$ Trivialidad
4. $t \in y \Longrightarrow t \in x$	$\Longrightarrow$ Trivialidad
5. $t \in x \Longleftrightarrow t \in y$	La equivalencia es doble implicación
6. $\forall t(t \in x \Longleftrightarrow t \in y)$	Generalización universal en 5
7. $x = y$	Modus ponens en 2 y 6
8. $\forall x \forall y(x = y)$	Generalización universal en 7.

9.2 Interpretación clásica y $\rightarrow$ consistencia de LD2. LD2 es una lógica cuyos teoremas son fórmulas de la forma $A \rightarrow B \equiv C \rightarrow D$ o $E \rightarrow F$, donde A, B, C, D, E, F son fórmulas generadas a partir de los símbolos primarios utilizando solo concatenación y adjunción. Se tiene así que la $\rightarrow$ consistencia (existencia de al menos una fórmula de la forma $A \rightarrow B$ que no es teorema) es el tipo de consistencia buscada.

Traducimos las fórmulas diagonales en el cálculo proposicional clásico, interpretando la conjunción diagonal como conjunción clásica, la equivalencia diagonal como equivalencia clásica, la implicación y la adjunción diagonales como implicaciones clásicas y los símbolos primarios como variables proposicionales. Las traducciones de los axiomas son teoremas en el cálculo proposicional clásico:

1. $(A \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)) \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow B)$
2. $(A \wedge B \Longrightarrow C) \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C))$
3. $(A \Longrightarrow (A \wedge B \Longrightarrow C)) \Longleftrightarrow (A \wedge B \Longrightarrow C)$.

La traducción de las reglas de inferencia produce reglas clásicas que preservan validez:

R1. $A \Longrightarrow B, B \Longrightarrow C \vdash A \Longrightarrow C$

$(A \Longrightarrow A') \Longleftrightarrow (B \Longrightarrow B'), (B \Longrightarrow B') \Longleftrightarrow (C \Longrightarrow C') \vdash$

$(A \Longrightarrow A') \Longleftrightarrow (C \Longrightarrow C')$

R2. $(A \Longrightarrow A') \Longleftrightarrow (B \Longrightarrow B') \vdash (B \Longrightarrow B') \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow A')$

R3. $(A \Longrightarrow A') \Longleftrightarrow (B \Longrightarrow B'), (A \Longrightarrow A') \vdash B \Longrightarrow B'$

R4. $A \wedge B \vdash A$

$A \wedge B \vdash B$

R5. $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C \vdash (A \wedge B) \Longrightarrow C$

$(A \wedge B) \Longrightarrow (C \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)) \vdash (A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (C \Longrightarrow (A \Longrightarrow B))$

R6. $A \Longrightarrow B, (A \wedge B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C) \vdash A \Longrightarrow C$

R7. $A \Longrightarrow C, (A \wedge C) \Longrightarrow ((A \wedge B) \Longrightarrow D) \vdash (A \wedge B) \Longrightarrow D.$

De las traducciones anteriores se infiere que la traducción de teoremas diagonales produce teoremas clásicos. De forma equivalente, si la traducción de una fórmula diagonal no es un teorema clásico entonces dicha fórmula no es un teorema diagonal; como en general la traducción de $A \rightarrow B$ no es un teorema clásico, tenemos que LD2 no demuestra todas las fórmulas de la forma $A \rightarrow B$, y por lo tanto, es $\rightarrow$ consistente.

9.3 LD2 extendida es $\rightarrow$ trivial. LD2 extendida, es decir, LD2 con el axioma 4 (contracción izquierda) y la regla de simplificación para $\equiv$, demuestra todas las fórmulas de la forma $A \rightarrow B$. En efecto,

1. $A \rightarrow B \equiv A - B \rightarrow B$	Axioma 4
2. $A - B \rightarrow (A - B) - B$	Simplificación en 1
3. $A - B \rightarrow (A - B) - B \equiv A - B \rightarrow B$	Axioma 1
4. $A - B \rightarrow B$	MP entre 2 y 3
5. $A - B \rightarrow B \equiv A \rightarrow B$	Axioma 4
6. $A \rightarrow B$	MP entre 4 y 5.

Con el fin de evitar este tipo de inconsistencia, debemos suprimir MP.

9.4 LD2 sin Modus Ponens. Las reglas R6 y R5 tienen una importante consecuencia que llamaremos igualmente Modus Ponens 1:

$$\text{MP1} \qquad A \rightarrow B,\ A - B \rightarrow A - C \vdash A \rightarrow C.$$

Prueba: utilizando reglas de impresión y Modus Ponens 1: $A \rightarrow B$, $A - B \rightarrow A - C \vdash A - B$, $AB \rightarrow A - C \vdash A \rightarrow C$.

Tenemos además que en LD2 sin MP y con regla de simplificación se demuestra una forma un poco más general que el MP1, pero menos general que MP, que denominaremos MP1':

$$\text{MP1'} \qquad A \rightarrow B, A \rightarrow B \equiv A \rightarrow C \vdash A \rightarrow C.$$

Prueba: utilizando reglas de simplificación y MP1 tenemos: $A \rightarrow B$, $A \rightarrow B \equiv A \rightarrow C \vdash A \rightarrow B$, $A - B \rightarrow A - C \vdash A \rightarrow C$.

Tenemos entonces que la prueba de $\rightarrow$ trivialidad dada en 9.3 no es válida para LD2 extendida sin MP. Tampoco podemos concluir que LD2 extendida sin MP es $\rightarrow$ trivial por el camino mostrado en 9.1 puesto que no vale la regla de debilitamiento.

9.5 LD2 extendida sin MP es $\rightarrow$ consistente. Llamaremos LD2E-MP al sistema LD2 extendido con A4 y la regla de simplificación, sin MP. A partir de LD2E-MP construimos el sistema LD2E-MP-$\equiv$, cambiando las fórmulas $A \rightarrow B \equiv C \rightarrow D$ por el par de fórmulas $A - B \rightarrow C - D$ y $C - D \rightarrow A - B$; observamos que en el nuevo sistema desaparecen las reglas de transitividad, simetría y simplificación para $\equiv$.

Afirmamos que LD2E-MP-$\equiv$ es $\rightarrow$ consistente, puesto que al interpretar $\cdot$ y $-$ como $\wedge$, $\rightarrow$ como $\Longrightarrow$, obtenemos un fragmento consistente del cálculo proposicional clásico. Finalmente, concluimos que LD2E-MP- es $\rightarrow$ consistente, ya que si suponemos que LD2E-MP es $\rightarrow$ trivial, entonces afirmaríamos que existe una prueba para cada fórmula $A \rightarrow B$, y si en dicha prueba substituimos las fórmulas $C \rightarrow D \equiv E \rightarrow F$ por el par de fórmulas $C - D \rightarrow E - F$ y $E - F \rightarrow C - D$, obtendríamos una prueba de $A \rightarrow B$ en LD2E-MP-$\equiv$, es decir LD2E-MP-$\equiv$ sería $\rightarrow$ trivial, lo cual no es cierto.

9.6 La paradoja de Curry no es válida en LD2E-MP-$\equiv$. La prueba de la paradoja de Curry sigue el esquema:

1. $\exists z \forall x(x \in z \rightarrow A \equiv x \in x - A \rightarrow A)$	Abstracción
2. $\forall x(x \in R \rightarrow A \equiv x \in x - A \rightarrow A)$	Especificación $\exists$ en 1
3. $R \in R \rightarrow A \equiv R \in R - A \rightarrow A$	Especificación $\forall$ en 2
4. $R \in R - A \rightarrow R \in R - A - A$	Simplificación $\equiv$ en 3
5. $R \in R - A - A \rightarrow R \in R - A$	Simplificación $\equiv$ en 3
6. $R \in R - A \rightarrow R \in R - A - A \equiv R \in R - A \rightarrow A$	Axioma 4
7. $R \in R - A \rightarrow A$	MP1 entre 4 Y 6.

El paso siguiente, modus ponens entre 5 y 7, trivializando LD2E-MP, no es posible; la no validez de la paradoja de Curry parece depender de la restricción de la regla de modus ponens MP. Si A es 0, el paso 3 nos dice que $\neg(R \in R) \equiv \neg\neg(R \in R)$. Así, LD2E-MP con el axioma de construcción irrestricta de conjuntos y con la regla de especificación para los cuantificadores, demuestra una forma débil de la paradoja de Rusell y, además, ésta última por sí misma no trivializa, ni $\rightarrow$ trivializa la lógica.

Referencias

1. H. Curry, *Foundations of Mathematical Logic*, New York: Dover, 1963.
2. R. Epstein, *The Semantic Foundations of Logic, volume 1: Propositional logics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
3. R. Feys y F. Fitch, *Los símbolos de la lógica matemática*, Madrid: Paraninfo, 1980.
4. G. Gentzen, *Recherches sur la deduction logique*, Paris: Presses Universitaires de France, 1955.
5. J. Girard, P. Taylor, Y. Lafont, *Proofs and Types*, New York: Cambridge University Press, 1989.
6. R. Goldblatt, *Topoi: the categorical analysis of logic*, Amsterdam: North-Holland, 1979.
7. J. Hindley, B. Lercher, J. Seldin, *Introduction to Combinatory Logic*, New York: Cambridge University Press, 1972.
8. J. Lambek, "Multicategories revisited" (1989), Americal Mathematical Society, Contemporary mathemathics vol 92, 217-239.
9. J. Lambek, P. Scott, *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, New York: Cambridge University Press, 1986.
10. H. Leblanc, *Tecniques of deductive inference*, New York: Prentice Hall, 1966.
11. R. Martin, *Verdad y denotación*, Madrid: Editorial Tecnos, 1962.
12. H. Rasiowa, *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*, Amsterdam: North-Holland, 1974.
13. M. Sierra, *Lógica diagonal*, Tesis de Magister. Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, 1996.
14. D. Van Dalen, *Logic and Structure*, New York: Springer-Verlag, 1980.
15. A. Whitehead, B. Russell, *Principia mathematica*, Madrid: Paraninfo, 1981.