Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen II (1995), pp.121-140

UN CÁLCULO TEMPORAL DE PREDICADOS DE TIPO MODAL

José M. Muñoz Quevedo(*)

Resumen. Se construye un cálculo predicativo temporal de tipo modal, referido solamente al pasado, con una semántica natural de estructuras con dominios crecientes con el tiempo. Se hallan esquemas y reglas válidas para esta semántica y con algunas de ellas se axiomatiza el sistema, desarrollándolo lo suficiente para que sirva como marco lógico sobre el cual pueda construirse en el futuro una teoría temporal de conjuntos.

Abstract. A first-order temporal calculus is constructed, with a natural semantics given by structures which grow with time. Rules and schemas of the calculus are developped to allow a temporal set theory based on it.
Keywords. First-order modal calculus, temporal logic, set theory.

1. Motivación

Cuando se analizan los axiomas de una teoría de conjuntos como la de Zermelo-Fraenkel, se observa que ellos (con excepción del axioma de extensionalidad) son reglas que aseguran la existencia de ciertos objetos (conjuntos) asociados a otros objetos dados. Es entonces claro que el universo de los objetos matemáticos puede imaginarse como construido a lo largo del tiempo, a partir por ejemplo del conjunto vacío, utilizando los axiomas como leyes de formación de conjuntos nuevos a partir de otros ya existentes. Aunque es cierto que esta

(*)Texto recibido 3/7/96, revisado 20/11/96. José M. Muñoz, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional. Este trabajo ha sido elaborado dentro del proyecto de investigación "El tiempo en la lógica y en la teoría de conjuntos", cofinanciado por Colciencias, la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia y el Cindec, entidades a las cuales el autor está altamente agradecido.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

construcción gradual de los objetos matemáticos ha estado presente en las discusiones filosóficas sobre los fundamentos de las matemáticas (por ejemplo en el intuicionismo), en el desarrollo oficial de las matemáticas se ha mantenido a un nivel informal. Uno de nuestros propósitos futuros es mostrar que si se toma en serio la temporalidad de la existencia de los objetos matemáticos, hay vías para desarrollar genuinas teorías temporales de conjuntos. Como tales teorías no pueden llevarse a cabo en el contexto de la pura lógica clásica, es necesario crear lógicas temporales que sirvan como marcos dentro de los cuales puedan desarrollarse dichas teorías temporales de conjuntos. En [6] se presentó un cálculo proposicional temporal creado con el propósito antes mencionado. A continuación vamos a exponer los lineamientos generales de un cálculo predicativo temporal de tipo modal construido con el mismo propósito.

2. Construcción

A los símbolos usuales de un cálculo de predicados clásico de primer orden con igualdad, agreguemos los operadores temporales de tipo modal P y H. Vale la pena resaltar que pueden existir símbolos para predicados, símbolos funcionales y símbolos constantes. Los términos se generan en la forma usual a partir de las variables y constantes mediante los símbolos funcionales. Las reglas de formación de fórmulas son las de un cálculo de predicados de primer orden con igualdad (ver, por ejemplo, [1]) junto con la siguiente:

Si φ es una fórmula, entonces también lo son $P\varphi$ y $H\varphi$.

Intuitivamente los operadores temporales P y H tienen los significados siguientes:

$P\varphi$: en el pasado se verificó φ; en algún instante del pasado, φ.

$H\varphi$: siempre en el pasado se verificó φ; en todo instante del pasado, φ.

Además, y como es clásicamente evidente de los significados dados, $P\varphi$ se considerará como una abreviación de $\neg H\neg\varphi$, equivalencia que denotaremos así:

$$(DEF) \qquad P\varphi \leftrightarrow \neg H\neg\varphi.$$

Teniendo en cuenta el propósito del cálculo de predicados en construcción, es conveniente comenzar definiendo con precisión su semántica. Una estructura de tipo *Pred(H)* será una tripla

$$\mathcal{A} = \big((T,<), (\mathfrak{A}(t))_{t\in T}, (h_{st})_{s<t}\big),$$

donde $(T, <)$ es un conjunto no vacío provisto de una relación de orden estricto "$<$" (o sea irreflexiva, antisimétrica y transitiva), lineal hacia el pasado (es decir, $\forall x \forall y \forall z[((x < z) \wedge (y < z)) \rightarrow ((x < y) \vee (x = y) \vee (y < x))]$) y que opcionalmente puede poseer un momento inicial; estas propiedades que se piden al tiempo son intuitivamente plausibles para desarrollar una teoría de conjuntos con un universo inicial que se expande hacia el futuro con diversidad de posibilidades (ya que el tiempo puede ser ramificado) pero en forma tal que, al situarse en cualquier momento y al mirar retrospectivamente, "se observa una única historia", una única línea hasta el instante inicial.

Además $(\mathfrak{A}(t))_{t \in T}$ es una familia de estructuras de un tipo fijo en el cálculo de predicados clásico subyacente, y para cada pareja (s, t) con $s < t$, h_{st} es un homomorfismo inyectivo (monomorfismo) $h_{st}: \mathfrak{A}(s) \rightarrow \mathfrak{A}(t)$, de forma tal que si $r < s < t$, entonces $h_{rt} = h_{st} \circ h_{rs}$.

Dichos monomorfismos poseen en particular la propiedad siguiente: si R es un símbolo relacional n-ario y $R^{\mathfrak{A}(s)}$ y $R^{\mathfrak{A}(t)}$ son las relaciones que lo interpretan en los universos $\mathfrak{A}(s)$ y $\mathfrak{A}(t)$ respectivamente, y si $s < t$ y $a_1, a_2, \cdots, a_n \in |\mathfrak{A}(s)|$, entonces

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}(s)} \text{ implica } (h_{st}(a_1), h_{st}(a_2), \cdots, h_{st}(a_n)) \in R^{\mathfrak{A}(t)}.$$

Aquí $|\mathfrak{A}(s)|$ denota el dominio de la estructura $\mathfrak{A}(s)$.

Hemos impuesto a h_{st} la condición de ser un monomorfismo para que los dominios de las estructuras sean crecientes con el tiempo, conserven ciertas propiedades básicas de sus individuos y posean además un comportamiento correcto con respecto a los símbolos funcionales que puedan existir en el lenguaje. En particular si para todo $s < t$, las h_{st} son inyecciones canónicas ($h_{st}(x) = x$ para todo x), el universo existente en el instante s es un subconjunto del universo existente en el instante t, y la estructura de tipo $Pred(H)$ corresponde más exactamente a un modelo de un universo en expansión. Por otro lado, si un objeto b existe en un determinado momento, él seguirá existiendo siempre en adelante ya que siempre poseerá imagen por cualquier función h_{st} de transición, es decir, *los objetos son eternos hacia el futuro*; queremos que cuando un conjunto comience a existir, siga existiendo siempre en adelante.

La verificabilidad en cada instante se define en la forma clásica para las fórmulas sin H ni P (ver por ejemplo [1, p.139]): si $t_1, t_2, \cdots, t_k$ son términos con sus variables entre $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $\mathcal{A} \Vdash_s \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_k)[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ si y sólo si $\mathfrak{A}(s) \models \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_k)[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ donde $\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_k)[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ es la proposición que se obtiene al reemplazar todas las ocurrencias libres de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ por $a_1, a_2, \cdots, a_n$ respectivamente.

Para simplificar la escritura notaremos por $\overline{a}$ al elemento $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de $|\mathfrak{A}(s)|^n$. La igualdad se define sencillamente en la forma usual:

$$\mathcal{A} \Vdash_s (t_1 = t_2) \text{ si y sólo si para toda } \overline{a} \in |\mathfrak{A}(s)|^n, {t_1}^{\mathfrak{A}(s)}[\overline{a}] = {t_2}^{\mathfrak{A}(s)}[\overline{a}].$$

Debido a que las h_{st} son inyectivas, si dos objetos son distintos en un determinado momento, ellos seguirán siendo diferentes siempre en adelante, y puesto que son funciones, si dos objetos son iguales en un instante dado, entonces seguirán siendo iguales en todo instante posterior.

Interpretemos ahora las fórmulas que involucran H o P. Si en φ ocurren libres *exactamente* las variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$, y $p \geq i_n$ $\mathcal{A} \Vdash_s H\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_k)[a_1, a_2, \cdots, a_p]$ si y sólo si para todo $r < s$, cuando $(h_{rs}^{-1}(a_{i_1}) \in |\mathfrak{A}(r)| \wedge h_{rs}^{-1}(a_{i_2}) \in |\mathfrak{A}(r)| \wedge \cdots \wedge h_{rs}^{-1}(a_{i_n}) \in |\mathfrak{A}(r)|)$, entonces $\mathcal{A} \Vdash_r \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ $[h_{rs}^{-1}(a_{i_1}), h_{rs}^{-1}(a_{i_2}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{i_n})]$.

Nótese que no se exige la existencia de las preimágenes por h_{rs} de todos los elementos $a_1, \cdots, a_p$, sino tan solo de aquellos $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$ que se van a utilizar para evaluar las variables libres $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$ de φ. Por este motivo, la evaluación de las variables que no ocurren libres en la fórmula φ, no tiene influencia en el valor de verdad resultante para φ.

Cuando las h_{st} son inyecciones canónicas, la definición anterior significa "siempre que los objetos $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$ hayan existido simultáneamente, deben haber verificado φ", o más coloquialmente, " los $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$ deben haber verificado φ durante toda su vida común". Abusando del lenguaje, lo mismo puede decirse en el caso general si identificamos hacia el pasado b con $h_{st}^{-1}(b)$, y hacia el futuro identificamos b con $h_{st}(b)$.

Como consecuencia tenemos que bajo las mismas condiciones anteriores, $\mathcal{A} \Vdash_s P\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_k)[a_1, a_2, \cdots, a_p]$ si y sólo si existe $r < s$ tal que $(h_{rs}^{-1}$ $(a_{i_1}) \in |\mathfrak{A}(r)|) \wedge (h_{rs}^{-1}(a_{i_2}) \in |\mathfrak{A}(r)|) \wedge \cdots \wedge (h_{rs}^{-1}(a_{i_n}) \in |\mathfrak{A}(r)|)$ y $\mathcal{A} \Vdash_r$ $\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_k)[h_{rs}^{-1}$ $(a_{i_1}), h_{rs}^{-1}(a_{i_2}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{i_n})]$ es decir, vale en el pasado φ cuando todas las preimágenes de los a_{i_k} existieron en un momento r anterior a s y en ese instante verificaron φ. Abusando del lenguaje nuevamente, este enunciado equivale a " existió un momento r anterior a s en el cual todas las a_{i_k} existieron simultáneamente y en ese instante verificaron φ".

También vale la pena destacar el hecho de que, al igual que en el cálculo de predicados usual, no tiene sentido considerar $\mathcal{A} \Vdash_s P\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_k)[a_1, a_2,$ $\cdots, a_p]$ cuando alguno de los a_i no es del universo $|\mathfrak{A}(s)|$. Si se permitieran expresiones como $\mathfrak{A}(s) \models \varphi[b]$ cuando $b \notin |\mathfrak{A}(s)|$, tendríamos que admitir, por ejemplo para un símbolo relacional unario R, que

$$\mathfrak{A}(s) \not\models R[b] \text{ si y sólo si } ((b \in |\mathfrak{A}(r)| \wedge b \notin R^{\mathfrak{A}(s)}) \vee b \notin |\mathfrak{A}(r)|).$$

Entonces para un b que no esté en $|\mathfrak{A}(r)|$, $\mathfrak{A}(s) \not\models R[b]$ e igualmente $\mathfrak{A}(s) \not\models \neg R[b]$, lo cual significaría que, o bien se debe modificar radicalmente la semántica, o bien se debe cambiar la lógica clásica bivalente por otra trivalente al menos, ya que $\mathfrak{A}(s) \not\models R[a]$ no sería equivalente a $\mathfrak{A}(s) \models \neg R[a]$.

De lo anterior se deduce que para esta semántica, en un instante dado *solo puede predicarse sobre los individuos existentes en dicho instante*, y no sobre individuos que ya no existen o que solo van a existir.

Además, diremos que $\mathcal{A} \Vdash_t \varphi(\bar{x})$ si y solo si $\mathfrak{A}(t) \vDash \varphi(\bar{x})[\bar{a}]$ para toda n-tupla $\bar{a}$ de elementos de $\mathfrak{A}(t)$. Análogamente al caso proposicional, $\mathcal{A} \Vdash \varphi$ si y solo si $\mathcal{A} \Vdash_t \varphi$ para todo t de T. Finalmente, diremos que φ es válida ($\Vdash \varphi$) si y solamente si para toda estructura $\mathcal{A}$ de tipo $Pred(H)$, $\mathcal{A} \Vdash \varphi$.

En adelante usaremos la abreviación $(PRED)$ para justificar el empleo de resultados conocidos del cálculo de predicados clásico subyacente al sistema, y la abreviación $(PROP)$ para justificar el empleo de resultados del cálculo proposicional clásico subyacente.

Como se puso de presente en [8], la definición dada de igualdad captura la idea de que dos individuos son iguales en un instante dado si y solo si son iguales a lo largo de toda su historia, es decir, si comenzaron a existir simultáneamente y son iguales en cada momento de su existencia.

En [8] se probó que para esta semántica, son válidas entre otras, tanto la fórmula

$$(FB) \qquad \forall x H\varphi(x) \to H\forall x\varphi(x),$$

como su recíproca

$$(RB) \qquad H\forall x\varphi(x) \to \forall x H\varphi(x).$$

A la primera la llamaremos fórmula Barcan, ya que posee la forma de la expresión modal que lleva dicho nombre.

Si en las fómulas anteriores reemplazamos $\varphi(x)$ por $\neg\varphi(x)$, H por $\neg P \neg$ y $\forall x$ por $\neg\exists x\neg$ respectivamente, y eliminamos negaciones, obtenemos

$$(FB^*) \qquad P\exists x\varphi(x) \to \exists x P\varphi(x),$$

$$(RB^*) \qquad \exists x P\varphi(x) \to P\exists x\varphi(x),$$

las cuales son equivalentes a FB y RB respectivamente. El que valgan tanto la fórmula Barcan como su recíproca, facilitará el trabajo posterior .

En [8] se demostró que fórmulas que eran válidas en el cálculo proposicional construido en [5], como

$$(AR) \qquad H(A \to B) \to (HA \to HB) \qquad \text{(axioma de regularidad)},$$

no son válidas para la semántica anterior. También se probó que ciertas reglas deductivas, válidas en el caso proposicional, *no lo son* en el caso predicativo general. Entre ellas merecen destacarse:

$$\text{si } \ \varphi \to \psi \ \text{ entonces } \ P\varphi \to P\psi,$$

(RK) si $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ entonces $H\varphi_1 \wedge H\varphi_2 \wedge \cdots \wedge H\varphi_n \rightarrow H\psi$.

La segunda vale en el cálculo proposicional temporal subyacente, pero no vale para la semántica dada para el cálculo predicativo temporal, como se probó en [8].

La falla de la regla RK se debe a que en el consecuente de la implicación no ocurren libres todas las variables que ocurren libres en el antecedente, lo cual permite que haya instantes anteriores donde no existan simultáneamente los objetos utilizados para evaluarlas. Lo mismo sucede si en el antecedente ocurren constantes distintas a las del léxico que no ocurren en el consecuente.

Introduzcamos una notación que simplificará el enunciado de la regla deductiva correcta: si $x_1, x_2, \cdots, x_m$ son variables que no ocurren en ψ,

$$H_{x_1 x_2 \cdots x_m}\psi \text{ abreviará } H((x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge \cdots \wedge x_m = x_m) \rightarrow \psi),$$

cuyo significado es el siguiente: siempre que $x_1, x_2, \cdots, x_m$ y las variables libres de ψ han existido simultáneamente, han verificado ψ. Obsérvese que si abreviamos $P(x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge, \cdots, \wedge x_m = x_m) \wedge \psi)$, por $P_{x_1 x_2 \cdots x_m}\psi$, entonces

$$\neg H_{x_1 x_2 \cdots x_m} \neg\psi \leftrightarrow P_{x_1 x_2 \cdots x_m}\psi,$$

equivalencia a la cual también llamaremos simplemente (DEF).

La regla deductiva correcta es la siguiente:

$(RK+)$ Si $\Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ entonces

$$\Vdash H\varphi_1 \wedge H\varphi_2 \wedge \cdots \wedge H\varphi_n \rightarrow H_{x_1 x_2 \cdots x_m b_1 b_2 \cdots b_k}\psi,$$

donde $x_1, x_2, \cdots, x_m$ son las variables libres de $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ que no ocurren libres en ψ, y $b_1, b_2, \cdots, b_k$ son las constantes de $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ diferentes a las del léxico que no ocurren libres en ψ. La prueba de validez de $(RK+)$ puede verse en [8].

Nótese que si el conjunto de variables libres de $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ es un subconjunto del conjunto de variables libres de ψ y el conjunto de constantes (distintas a las del léxico) de $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ es también un subconjunto del conjunto de constantes de ψ, entonces la regla anterior viene a ser simplemente la (RK) usual, no habiendo necesidad de colocar subíndices a H.

Cuando en una fórmula ocurre una constante del léxico, debido a que ella debe tener interpretación en toda estructura del tipo del lenguaje, dicha constante "existirá" en todo universo de toda estructura de tipo $Pred(H)$. Por esto, no hay necesidad de incluirla como subíndice de H para asegurar su existencia.

Una consecuencia inmediata de $(RK+)$ es la forma correcta que adquiere el axioma de regularidad.

$(AR+)$ $\Vdash H(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (H\varphi \rightarrow H_{x_1 x_2 \cdots x_m b_1 b_2 \cdots b_k}\psi)$.

En efecto: $\Vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ $(PROP)$, implica $\Vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi)(PROP)$, luego, por $(RK+)$, $\Vdash (H(\varphi \rightarrow \psi) \wedge H\varphi) \rightarrow H_{x_1 x_2 \cdots x_m b_1 b_2 \cdots b_k}\psi$ de donde $\Vdash H(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (H\varphi \rightarrow H_{x_1 x_2 \cdots x_m b_1 b_2 \cdots b_k}\psi)$.

Corolario 1. $\Vdash H\forall x\varphi(x,\bar{y}) \rightarrow H\varphi(x,\bar{y})$.

Demostración. Como $\Vdash \forall x\varphi(x,\bar{y}) \rightarrow \varphi(x,\bar{y})$ y todas las variables libres de $\forall x\varphi(x,\bar{y})$ ocurren libres en $\varphi(x,\bar{y})$, por (GH), $(RK+)$ y (MP) se obtiene el resultado.

De manera completamente análoga se prueba el siguiente corolario.

Corolario 2. $\Vdash H\forall x\varphi(x,\bar{y}) \rightarrow H\varphi(t,\bar{y})$,

siendo t un término libre para x en φ, y sobreentendiéndose que en una estructura $\mathfrak{A}(r)$ la fórmula completa es interpretable cuando las posibles constantes de t existan en el universo de la estructura.

Se tiene trivialmente $\Vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$, luego por $(RK+)$, se obtiene el corolario:

Corolario 3. $\Vdash H(\varphi) \wedge H(\psi) \rightarrow H(\varphi \wedge \psi)$,

ya que las variables libres y constantes del antecedente de la primera implicación, son las mismas del consecuente. Es claro que este resultado es equivalente a $\Vdash P(\varphi \vee \psi) \rightarrow P\varphi \vee P\psi$.

Como $\Vdash \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ y $\Vdash \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$ y también las variables libres y constantes de los antecedentes ocurren (libres) en los consecuentes, entonces por $(RK+)$, $\Vdash H\varphi \rightarrow H(\varphi \vee \psi)$ y $\Vdash H\psi \rightarrow H(\varphi \vee \psi)$. Se deduce $(PROP)$ el corolario:

Corolario 4. $\Vdash H\varphi \vee H\psi \rightarrow H(\varphi \vee \psi)$.

Vale la pena notar que si solo se consideran estructuras de tipo $Pred(H)$ con universos constantes, todos los individuos existen simultáneamente en todos los universos, y entonces son válidos sin restricciones de ninguna naturaleza todos los esquemas modales estándar.

Para axiomatizar este cálculo temporal de predicados con axiomas válidos, es necesario probar la validez de otros esquemas, tanto proposicionales como predicativos. El siguiente describe la transitividad hacia el pasado de los diferentes instantes:

(TR) $\qquad \Vdash PP\varphi \rightarrow P\varphi \quad$ (equivalente a $\quad \Vdash H\varphi \rightarrow HH\varphi$).

Chequeemos su validez: sean $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$ las variables libres de $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_k)$. Entonces $\mathcal{A} \Vdash_t PP\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_k)[\varphi_1,a_2,\cdots,a_p]$ si y sólo si $(\exists s)(s < t \wedge h_{st}^{-1}(a_{i_1}) \in |\mathfrak{A}(s)|, \cdots, h_{st}^{-1}(a_{i_n}) \in |\mathfrak{A}(s)| \wedge \mathcal{A} \Vdash_s P\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_k)[h_{st}^{-1}(a_{i_1}), \cdots, h_{st}^{-1}(a_{i_n})])$ si y sólo si $(\exists s)(s < t \wedge h_{st}^{-1}(a_{i_1}), \cdots, h_{st}^{-1}(a_{i_n}) \in |\mathfrak{A}(s)| \wedge (\exists r)(r < s \wedge h_{rs}^{-1}(h_{st}^{-1}(a_{i_1})), \cdots, h_{rs}^{-1}(h_{st}^{-1}(a_{i_n})) \in |\mathfrak{A}(r)| \wedge \mathcal{A} \Vdash_r \varphi(t_1,t_2,\cdots,t_k)[h_{rs}^{-1}(h_{st}^{-1}(a_{i_1})), \cdots, h_{rs}^{-1}(h_{st}^{-1}(a_{i_n}))])$ y como $h_{rs}^{-1}(h_{st}^{-1}(z) = h_{rt}^{-1}(z)$ y la primera pertenencia es redundante, entonces $(\exists s)(s < t \wedge (\exists r)(r < s \wedge h_{rt}^{-1}(a_{i_1}), \cdots, h_{rt}^{-1}(a_{i_n}) \in$

$|\mathfrak{A}(r)| \wedge \mathcal{A} \Vdash_r \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_k)[h_{rt}^{-1}(a_{i_1}), \cdots, h_{rt}^{-1}(a_{i_n})]))$, luego $\mathcal{A} \Vdash_t P\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_k)[a_1, a_2, \cdots, a_p]$, quedando demostrado.

En [6] se probó que la fórmula

$$(MI) \qquad H(\varphi \wedge \neg\varphi) \vee PH(\varphi \wedge \neg\varphi)$$

fuerza la existencia de un momento inicial para el tiempo.

¿Será válida $H(\varphi \wedge \neg\varphi) \vee PH(\varphi \wedge \neg\varphi)$ para la nueva semántica? Si aceptamos que el tiempo posee un instante inicial y éste es 0, entonces claramente $\mathcal{A} \Vdash_0 H(\varphi \wedge \neg\varphi)$ ya que al no existir instantes anteriores a 0, las condiciones se satisfacen vacíamente (implicación con antecedente falso). Igualmente es obvio que $\mathcal{A} \nVdash_0 PH(\varphi \wedge \neg\varphi)$, pero si $s \neq 0$, ¿ cuándo se verifica $\mathcal{A} \Vdash_s PH(\varphi \wedge \neg\varphi)$? Si $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$ son las variables libres de φ, entonces $\mathcal{A} \Vdash_s PH(\varphi \wedge \neg\varphi)[a_1, a_2, \cdots, a_p]$ si y sólo si $(\exists r)(r < s \wedge h_{rs}^{-1}(a_{i_1}) \in |\mathfrak{A}(r)|, \cdots, \wedge h_{rs}^{-1}(a_{i_n}) \in |\mathfrak{A}(r)| \wedge \mathcal{A} \Vdash_r H(\varphi \wedge \neg\varphi)[h_{rs}^{-1}(a_{i_1}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{i_n})])$, pero el único instante anterior a t que se conoce con seguridad es 0, y se debería tener $h_{0s}^{-1}(a_{i_1}), \cdots, h_{0s}^{-1}(a_{i_n}) \in |\mathfrak{A}(0)| \wedge \mathcal{A} \Vdash_0 H(\varphi \wedge \neg\varphi)[h_{0s}^{-1}(a_{i_1}), \cdots, h_{0s}^{-1}(a_{i_n})])$. En particular todos los $h_{0s}^{-1}(a_{i_j})$ deberían pertenecer a $|\mathfrak{A}(0)|$ y esto para toda escogencia de los a_{i_j}, o sea que las preimágenes de todos los elementos de $\mathfrak{A}(s)$ deberían estar en $|\mathfrak{A}(0)|$, lo cual va en contra de la filosofía del trabajo de partir de un dominio inicial pequeño.

Este problema no se presentaría si φ fuese una fórmula cerrada sin constantes distintas a las del léxico, por lo cual, para que el axioma sea válido en general, debemos reemplazar a φ por su clausura universal $\overline{\varphi}$. En consecuencia,

$$(MI) \qquad \Vdash H(\overline{\varphi} \wedge \neg\overline{\varphi}) \vee PH(\overline{\varphi} \wedge \neg\overline{\varphi}),$$

cuando φ no posee constantes distintas a las del léxico y el tiempo tiene un primer instante.

En las estructuras de tipo *Pred*(H), el orden se tomó lineal hacia el pasado, para que en esta clase de estructuras tal propiedad semántica quedase sintácticamente caracterizada por la fórmula: $P\varphi \wedge P\psi \rightarrow (P(\varphi \wedge \psi) \vee P(P\varphi \wedge \psi) \vee P(\varphi \wedge P\psi))$ la cual resulta naturalmente válida, como mostramos a continuación. Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ las variables libres de φ que no están libres en ψ y $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ las variables libres comunes de φ y ψ y sean $x_{n+m+1}, x_{n+m+2}, \cdots, x_{n+m+k}$ las variables libres de ψ distintas de las anteriores. Sean $\bar{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_k)$; en adelante abusaremos del lenguaje notando por $h^{-1}(\bar{a})$ a la n-tupla $(h^{-1}(a_1), h^{-1}(a_2), \cdots, h^{-1}(a_n))$ y por $h^{-1}(\bar{b})$ a $(h^{-1}(b_1), h^{-1}(b_2), \cdots, h^{-1}(b_n))$.

Supongamos $\mathcal{A} \Vdash_t (P\varphi \wedge P\psi)[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$; entonces $\mathcal{A} \Vdash_t (P\varphi)[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$ y $\mathcal{A} \Vdash_t (P\psi)[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$, luego $(\exists s)(s < t \wedge h_{st}^{-1}(\bar{a}) \in |\mathfrak{A}(s)|^n, h_{st}^{-1}(\bar{b}) \in |\mathfrak{A}(s)|^m \wedge \mathcal{A} \Vdash_s \varphi[h_{st}^{-1}(\bar{a}), h_{st}^{-1}(\bar{b})])$ y $(\exists r)(r < t \wedge h_{rt}^{-1}(\bar{b}) \in |\mathfrak{A}(r)|^n, h_{rt}^{-1}(\bar{c}) \in |\mathfrak{A}(r)|^k \wedge \mathcal{A} \Vdash_r \varphi[h_{rt}^{-1}(\bar{b}), h_{rt}^{-1}(\bar{c})])$. Por la linealidad del orden hacia el pasado se tendrá uno de los tres casos siguientes: (1)$s = r$ o (2) $s < r$ o (3) $r < s$. En el caso (1), $h_{rt}^{-1}(\bar{a})$, $h_{rt}^{-1}(\bar{b})$, $h_{rt}^{-1}(\bar{c})$ son tuplas de elementos de $|\mathfrak{A}(r)|$ y $\mathcal{A} \Vdash_r \varphi[h_{rt}^{-1}(\bar{a}), h_{rt}^{-1}(\bar{b})]$ y $\mathcal{A} \Vdash_r \psi[h_{rt}^{-1}(\bar{b}), h_{rt}^{-1}(\bar{c})]$, luego $\mathcal{A} \Vdash_r (\varphi \wedge \psi)[h_{rt}^{-1}(\bar{a}), h_{rt}^{-1}(\bar{b}), h_{rt}^{-1}(\bar{c})])$, de manera que $\mathcal{A} \Vdash_t P(\varphi \wedge \psi)[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$. En el caso (2), $s < r$, luego $h_{st} = h_{rt} \circ h_{sr}$ y por su inyectividad, $h_{st}^{-1} = h_{sr}^{-1} \circ h_{rt}^{-1}$ de modo que $h_{st}^{-1}(\bar{a}) = h_{sr}^{-1}(h_{rt}^{-1}(\bar{a}))$ e igual con $\bar{b}$; así necesariamente $h_{rt}^{-1}(\bar{a}) \in |\mathfrak{A}(r)|^n$, luego $\mathcal{A} \Vdash_s \varphi[h_{sr}^{-1}(h_{rt}^{-1}(\bar{a}), h_{sr}^{-1}(h_{rt}^{-1}(\bar{b})])$ o sea $\mathcal{A} \Vdash_r P\varphi[h_{rt}^{-1}(\bar{a}), h_{rt}^{-1}(\bar{b})]$ y como $\mathcal{A} \Vdash_r \psi[h_{rt}^{-1}(\bar{b}), h_{rt}^{-1}(\bar{c})])$, entonces $\mathcal{A} \Vdash_r (P\varphi \wedge \psi)[h_{rt}^{-1}(\bar{a}), h_{rt}^{-1}(\bar{b}), h_{rt}^{-1}(\bar{c}))$; siendo $r < t$, se infiere que $\mathcal{A} \Vdash_t P((P\varphi \wedge \psi))[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$. Análogamente se procede en el tercer caso, obteniéndose finalmente la validez del axioma de linealidad hacia el pasado.

Continuemos demostrando la validez de los axiomas cuntificacionales usuales: $\Vdash \forall x \varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(q, \bar{y})$ cuando q es libre para x en φ.

Si en $\varphi(x, \bar{y})$ no ocurren H ni P, el resultado es evidente ya que dicha fórmula se verifica en toda estructura de tipo $Pred(H)$, y la veracidad en un nodo no depende de la veracidad en ningún otro. Probemos que el axioma se cumple para $P\varphi$, o sea que cuando q es libre para x en φ, $\Vdash \forall x P\varphi(x, \bar{y}) \to P\varphi(q, \bar{y})$. Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ las variables libres de $\varphi(x, \bar{y})$ distintas de x y sean $z_1, z_2, \cdots, z_k$ las variables libres de $\varphi(q, \bar{y})$ distintas de $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Supongamos que $\mathcal{A} \nVdash_t P\varphi(q, \bar{y})[a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_k]$; entonces $(\forall s)(s < t \wedge h_{st}^{-1}(\bar{a}) \in |\mathfrak{A}(s)|^n \wedge h_{st}^{-1}(\bar{b}) \in |\mathfrak{A}(s)| \to \mathcal{A} \nVdash_t \varphi[q^{\mathfrak{A}(s)}[h_{st}^{-1}(\bar{a}), h_{st}^{-1}(\bar{b})]$. Si $d = q^{\mathfrak{A}(s)}[h_{st}^{-1}(\bar{a}), h_{st}^{-1}(\bar{b})]$, d está en $|\mathfrak{A}(s)|$ y si $h_{st}(d) = c$ (elemento de $|\mathfrak{A}(t)|$), entonces $(\forall s)(s < t \wedge h_{st}^{-1}(c) \in |\mathfrak{A}(s)| \wedge h_{st}^{-1}(\bar{a}) \in |\mathfrak{A}(s)|^n \wedge h_{st}^{-1}(\bar{b}) \in |\mathfrak{A}(s)|^k \to \mathcal{A} \nVdash_s \varphi[h_{st}^{-1}(c), h_{st}^{-1}(\bar{a}), h_{st}^{-1}(\bar{b})])$. Así $\mathcal{A} \nVdash_t P\varphi[c, \bar{a}, \bar{b}]$ y en consecuencia $\mathcal{A} \nVdash_t P\varphi(x, \bar{y})[c, \bar{a}, \bar{b}]$ luego $\mathcal{A} \nVdash_t \forall x P\varphi(x, \bar{y})[\bar{a}, \bar{b}]$, quedando valido el axioma para $P\varphi$. Por el corolario 4 anterior, $\Vdash H\forall x\varphi(x, \bar{y}) \to H\varphi(q, \bar{y})$; pero por (FB), $\Vdash \forall x H\varphi(x, \bar{y}) \to H\forall x\varphi(x, \bar{y})$, de manera que por trasitividad, $\Vdash \forall x H\varphi(x, \bar{y}) \to H\varphi(q, \bar{y})$, o sea que también vale el axioma para $H\varphi$.

Es claro que cuando ni H ni P ocurren en φ ni en ψ,

$$(C2) \qquad \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$$

vale en todo instante de toda estructura de tipo $Pred(H)$. La prueba de su validez general es completamente rutinaria. Por ejemplo, si x es la única variable que ocurre en φ y en ψ, mostremos que para cualquier estructura $\mathcal{A}$ y para cualquier instante s,

$$(C2^*) \qquad \mathcal{A} \Vdash_s \forall x(H\varphi \to H\psi) \to (\forall x H\varphi \to \forall x H\psi).$$

Para ello supongamos que $\mathcal{A} \Vdash_s \forall x(H\varphi(x) \to H\psi(x))$ y que $\mathcal{A} \Vdash_s \forall x(H\varphi(x))$ y demostremos que $\mathcal{A} \Vdash_s \forall x(H\psi(x))$. Sea a un elemento cualquiera de $|\mathfrak{A}(s)|$ y mostremos que $\mathcal{A} \Vdash_s \forall x(H\psi(x))[a]$, o sea que para todo $r < s$, si $h_{rs}^{-1}(a) \in |\mathfrak{A}(r)|$, entonces $\mathfrak{A}(r) \vDash \psi(h_{rs}^{-1}(a))$. Supongamos que efectivamente $h_{rs}^{-1}(a) \in$

$|\mathfrak{A}(r)|$. Como $\mathcal{A} \Vdash_s \forall x(H\varphi(x))$, entonces $\mathcal{A} \Vdash_s (H\varphi(x)[a])$ y para dicho r, $h_{rs}^{-1}(a) \in |\mathfrak{A}(r)|$, luego $\mathfrak{A}(r) \vDash \varphi(h_{rs}^{-1}(a))$. Pero $\mathcal{A} \Vdash_s \forall x(H\varphi(x) \rightarrow H\psi(x))$, de modo que $\mathcal{A} \Vdash_s \forall x(H\varphi(x) \rightarrow H\psi(x)[a]$ o sea que si $\mathcal{A} \Vdash_s (H\varphi(x)[a])$ entonces $\mathcal{A} \Vdash_s (H\psi(x)[a])$; de aquí, del hecho $h_{rs}^{-1}(a) \in |\mathfrak{A}(r)|$ y de $\mathfrak{A}(r) \vDash \varphi(h_{rs}^{-1}(a))$, se sigue que $\mathfrak{A}(r) \vDash \psi(h_{rs}^{-1}(a))$, quedando demostrado C2 para este caso.

Antes se estableció que $\Vdash P(t_1 = t_2) \rightarrow (t_1 = t_2)$ y también que $\Vdash P(t_1 \neq t_2) \rightarrow (t_1 \neq t_2)$. ¿ Será válida para cualquier φ la fórmula $P\varphi \rightarrow \varphi$? Es decir, ¿ permanecería a través del tiempo la propiedad descrita por φ? Si la respuesta fuese afirmativa, se debería verificar

$$P\exists x\forall y(x = y) \rightarrow \exists x\forall y(x = y),$$

o sea que si en algún instante del pasado el dominio tuvo un único elemento, entonces de dicho instante en adelante también debería poseer un solo elemento, frenándose así su expansión. En consecuencia, para nuestra semántica no pueden ser válidas $P\varphi \rightarrow \varphi$ ni $P\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$ para toda x, ya que si lo fuesen, no solo se estarían perpetuando a través del tiempo propiedades de los individuos sino de los universos mismos (como se acaba de ver), lo cual es muy restrictivo.

¿Valdrá alguna versión restringida de dicha fórmula? Debido a que las funciones h_{st} de paso de un dominio a otro son monomorfismos, se puede demostrar que la fórmula debe valer cuando φ es atómica o negación de atómica, o más aún, cuando φ es una fórmula obtenida combinando fórmulas atómicas o negaciones de atómicas mediante conectivos proposicionales. A una fórmula obtenida de esta manera la llamaremos ***puramente proposicional***.

Permanencia temporal 1. Si φ es una fórmula puramente proposicional, entonces

$$(PT1) \qquad \Vdash P\varphi \rightarrow \varphi.$$

Haremos su demostración por inducción en fórmulas.

1.a) Como se puso de puso de presente antes, $(PT1)$ vale cuando φ es $t_1 = t_2$ o $t_1 \neq t_2$. b) Sea φ atómica de la forma $R(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ con $x_1, x_2, \cdots, x_n$ como variables libres. $\mathcal{A} \Vdash_r PR(t_1, t_2, \cdots, t_k)[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ si y sólo si $(\exists s < r)(\forall i, h_{sr}^{-1})(a_i) \in |\mathfrak{A}(s)| \wedge \mathfrak{A}(s) \vDash R^{\mathfrak{A}(s)}(t_1^{\mathfrak{A}(s)}[h_{sr}^{-1}(\bar{a})], \cdots, t_k^{\mathfrak{A}(s)}[h_{sr}^{-1}(\bar{a})]))$ si y sólo si $(t_1^{\mathfrak{A}(s)}[h_{sr}^{-1}(\bar{a})], \cdots, t_k^{\mathfrak{A}(s)}[h_{sr}^{-1}(\bar{a})]) \in R^{\mathfrak{A}(s)}$. Como h_{rs} es un monomorfismo, entonces $(h_{rs}(t_1^{\mathfrak{A}(s)}[h_{sr}^{-1}(\bar{a})]), \cdots, h_{rs}(t_k^{\mathfrak{A}(s)}[h_{sr}^{-1}(\bar{a})])) \in R^{\mathfrak{A}(r)}$, es decir, $(t_1^{\mathfrak{A}(r)}[\bar{a}], \cdots, t_k^{\mathfrak{A}(r)}[\bar{a}]) \in R^{(r)}$, o sea que $\mathcal{A} \Vdash_r R(t_1, t_2, \cdots, t_k)[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

2. Supongamos que la afirmación vale para φ $(\Vdash P\varphi \rightarrow \varphi)$ y demostrémosla para $\neg\varphi$; supongamos que $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son las variables libres de φ. $\mathcal{A} \Vdash_r P\neg\varphi[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ si y sólo si $(\exists s < r)(\forall i, h_{sr}^{-1}(a_i) \in |\mathfrak{A}(s)| \wedge \mathfrak{A}(s) \vDash \neg\varphi$

$[h_{sr}^{-1}(\bar{a})]$ y puesto que h_{sr} es un monomorfismo y en $\neg\varphi$ no ocurren cuantificadores [3, p.91], entonces $\mathfrak{A}(r) \models \neg\varphi[h_{sr}(h_{sr}^{-1}(\bar{a}))]$, es decir, $\mathfrak{A}(r) \models \neg\varphi[\bar{a}]$, quedando demostrado.

3. Veamos que si $(PT1)$ vale para φ y ψ, también vale para $\varphi \vee \psi$ y para $\varphi \wedge \psi$. Por hipótesis $\Vdash P\varphi \rightarrow \varphi$ y $\Vdash P\psi \rightarrow \psi$; como $\Vdash \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ y $\Vdash \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$, por transitividad $\Vdash P\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ y $\Vdash P\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$, y se obtiene $\Vdash (P\varphi \vee P\psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ $(PROP)$.

Por el corolario 3, $\Vdash P(\varphi \vee \psi) \rightarrow (P\varphi \vee P\psi)$, y por transitividad se sigue que $\Vdash P(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)$. De manera análoga se obtiene $\Vdash P\varphi \wedge P\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ y por el corolario 4, $\Vdash P(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (P\varphi \wedge P\psi)$; por transitividad se logra el resultado deseado para el conectivo $\wedge$.

4. Para los otros dos conectivos, basta expresarlos en su forma normal disyuntiva y utilizar los tres casos ya demostrados.

Se concluye que si en un instante dos objetos están en una relación puramente proposicional, entonces siempre que ellos existan simultámeamente (antes o después) deben estar en dicha relación.

Con respecto a los cuantificadores, tenemos la propiedad siguiente:

$(PT2)$ Si φ es puramente proposicional, $\Vdash P\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$.

Demostración. Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ las variables libres de φ distintas de x y sea $\bar{a} \in |\mathfrak{A}(r)|^n$; entonces $\mathcal{A} \Vdash_r P\exists x\varphi(x, x_1, x_2, \cdots, x_k)[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ si y sólo si $(\exists s < r)(\forall i, h_{sr}^{-1}(a_i) \in |\mathfrak{A}(s)| \wedge \mathfrak{A}(s) \models \exists x\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)[h_{sr}^{-1}(\bar{a})]$ si y sólo si $(\exists s < r)(\forall i, h_{sr}^{-1}(a_i) \in |\mathfrak{A}(s)| \wedge (\exists b \in |\mathfrak{A}(s)|)(\mathfrak{A}(s) \models \varphi[b, h_{sr}^{-1}(a_1), h_{sr}^{-1}(a_2), \cdots, h_{sr}^{-1}(a_n)]$. Entonces $h_{rs}(b) \in |\mathfrak{A}(r)|$, y siendo h_{rs} un monomorfismo y φ puramente proposicional, se tiene que $\mathfrak{A}(r) \models \varphi[h_{rs}(b), a_1, a_2, \cdots, a_n]$, luego $\mathfrak{A}(r) \models \exists x\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

Corolario 5. $\Vdash P\exists x_1\exists x_2 \cdots \exists x_n\varphi \rightarrow \exists x_1\exists x_2 \cdots \exists x_n\varphi$ *cuando* φ *es puramente proposicional.*

Su demostración viene a ser la misma que hemos dado para el caso de un cuantificador. Es interesante probar la siguiente proposición

Proposición. $\Vdash P\exists xP\varphi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists xP\varphi(x, \bar{y})$ *es válida en general, sin ninguna restricción sobre* φ.

Demostración. Si aplicamos la fórmula Barcan a $P\varphi$, obtenemos $\Vdash P\exists xP\varphi(x) \leftrightarrow \exists xPP\varphi(x)$; como $\Vdash PP\varphi(x) \rightarrow P\varphi(x)$, entonces $\Vdash \neg P\varphi(x) \rightarrow \neg PP\varphi(x)$ $(PROP)$ y cuantificando universalmente y distribuyendo el cuantificador, $\Vdash \forall x\neg P\varphi(x) \rightarrow \forall x\neg PP\varphi(x)$ y $\Vdash \neg\forall x\neg PP\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\neg P\varphi(x)$, o sea, $\Vdash \exists xPP\varphi(x) \rightarrow \exists xP\varphi(x)$; de ésta y de la primera fórmula se obtiene por transitividad $\Vdash P\exists xP\varphi(x) \rightarrow \exists xP\varphi(x)$.

Resumiendo los casos anteriores obtenemos:

Corolario 6. *$\Vdash P\varphi \to \varphi$ cuando: a) φ es puramente proposicional, o b) φ es de la forma $\exists x\psi(x)$ con ψ puramente proposicional, o c) φ es de la forma $\exists x P\psi(x)$ para cualquier ψ.*

Sin embargo la permanencia temporal no vale cuando φ es de la forma $H\psi$, ni siquiera para ψ atómica, como lo ponen de presente los contraejemplos siguientes. Si el tiempo ha tenido un comienzo, sea 0 el instante inicial y supongamos que en ese momento el universo posee solamente dos elementos a, y b, con $a \neq b$; entonces es claro que $\mathcal{A} \Vdash_0 H(x = y)[a,b]$ vacíamente, mientras que $\mathcal{A} \nVdash_0 (x = y)[a,b]$, luego $\mathcal{A} \nVdash_0 (H(x = y) \to (x = y))[a,b]$.

De otra parte, sea $T = \{0,1\}$ con $0 < 1$. Supongamos además $|\mathfrak{A}(0)| = \{a\} = |\mathfrak{A}(1)|$, con $h_{01}(a) = a$ y sea R un símbolo relacional unario tal que $R^{\mathfrak{A}(0)} = \varnothing = R^{\mathfrak{A}(1)}$. Claramente $\mathcal{A} \Vdash_0 HR(x)[a]$ vacíamente, ya que 0 es el instante inicial, pero $\mathcal{A} \nVdash_0 R(x)[a]$, de modo que $\mathcal{A} \nVdash_0 (HR(x) \to R(x))[a]$.

Sea R un símbolo de relación k-aria; si en $R(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ ocurren libres *exactamente* las variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$, y $p \geq i_n$, entonces $\mathcal{A} \Vdash_s HR(t_1, t_2, \cdots, t_k)[a_1, a_2, \cdots, a_p]$ si y sólo si para todo $r < s$, cuando $(h_{rs}^{-1}(a_{i_1}) \in |\mathfrak{A}(r)| \wedge h_{rs}^{-1}(a_{i_2}) \in |\mathfrak{A}(r)| \wedge \cdots \wedge h_{rs}^{-1}(a_{i_n}) \in |\mathfrak{A}(r)|)$, entonces $\mathcal{A} \Vdash_r R^{\mathfrak{A}(r)}(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ $[h_{rs}^{-1}(a_{i_1}), h_{rs}^{-1}(a_{i_2}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{i_n})]$. Sea r un instante menor que s para el cual todas las $h_{rs}^{-1}(a_{i_j})$ existan simultáneamente; entonces $\mathcal{A} \Vdash_r R^{\mathfrak{A}(r)}(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ $[h_{rs}^{-1}(a_{i_1}), h_{rs}^{-1}(a_{i_2}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{i_n})]$ y aplicando el monomorfismo h_{rs} se obtiene $\mathcal{A} \Vdash_s R^{\mathfrak{A}(s)}(t_1, t_2, \cdots, t_k)[a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}]$. Se concluye que $\mathcal{A} \Vdash_s (HR \to R)[a_1, a_2, \cdots, a_p]$ si existe un instante r anterior a s en el cual todas las $h_{rs}^{-1}(a_{ij})$ hayan existido simultáneamente.

Para finalizar el estudio semántico de $Pred(H)$, probemos que también es válido el axioma del cálculo de predicados clásico

$$(CS) \qquad (t_1 = t_2) \to (\varphi(\cdots t_1 \cdots) \to \varphi(\cdots t_2 \cdots)),$$

donde $\varphi(\cdots t_2 \cdots)$ es la fórmula obtenida al reemplazar en $\varphi(\cdots t_1 \cdots)$ todas, algunas o ninguna de las ocurrencias de t_1 por t_2, y t_1 es libre para t_2 en φ.

Claramente si en φ no ocurren ni H ni P, $(C5)$ es válido en todo nodo de toda estructura de tipo $Pred(H)$. Mostremos que para dicha φ, también es válido

$$(t_1 = t_2) \to (H\varphi(\cdots t_1 \cdots) \to H\varphi(\cdots t_2 \cdots).$$

Es suficiente demostrar $(PROP)$ que

$$((t_1 = t_2) \wedge H\varphi(\cdots t_1 \cdots)) \to H\varphi(\cdots t_2 \cdots).$$

Supongamos que las variables libres que ocurren en t_1 y en t_2 están entre $x_1, x_2, \cdots, x_n$; sea $\mathcal{A}$ una estructura de tipo $Pred(H)$ cualquiera y sea s un instante cualquiera. Debemos probar que para cualquier $\bar{a} \in |\mathfrak{A}(s)|$, $\mathcal{A} \Vdash_s (((t_1 = t_2) \wedge H\varphi(\cdots t_1 \cdots)) \to H\varphi(\cdots t_2 \cdots))[\bar{a}]$. Supongamos que $\mathcal{A} \Vdash_s ((t_1 =$

$t_2) \wedge H\varphi(\cdots t_1 \cdots))[\bar{a}]$ y probemos que efectivamente $\mathcal{A} \Vdash_s H\varphi(\cdots t_2 \cdots)[\bar{a}]$. La hipótesis equivale a $t_1^{\mathfrak{A}(s)}[\bar{a}] = t_2^{\mathfrak{A}(s)}[\bar{a}]$ y para todo $r < s$, $(h_{rs}^{-1}(a_{i1}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{ik}) \in |\mathfrak{A}(r)| \to \mathfrak{A}(r) \vDash \varphi(\cdots t_1^{\mathfrak{A}(r)}[h_{rs}^{-1}(a_{i1}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{ik})] \cdots)$ siendo $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ik}$ las variables libres que ocurren en t_1.

Supongamos que $h_{rs}^{-1}(a_{i1}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{ik}) \in |\mathfrak{A}(r)|$; como $t_1^{\mathfrak{A}(s)}[\bar{a}] = t_2^{\mathfrak{A}(s)}[\bar{a}]$, entonces de los resultados obtenidos de la definición de igualdad se sigue que también $h_{rs}^{-1}(a_{j1}), h_{rs}^{-1}(a_{j2}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{jm})$ existen (aquí estamos llamando $x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm}$ a las variables que ocurren en t_2), y que $t_1^{\mathfrak{A}(r)}[h_{rs}^{-1}(a_{i1}), h_{rs}^{-1}(a_{i2}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{ik})] = t_2^{\mathfrak{A}(r)}[h_{rs}^{-1}(a_{j1}), h_{rs}^{-1}(a_{j2}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{jm})]$. Como para $\mathfrak{A}(r)$ vale $(C5)$ del cálculo de predicados usual, entonces $\mathfrak{A}(r) \Vdash \varphi(\cdots t_1^{\mathfrak{A}(r)}[h_{rs}^{-1}(a_{i1}), h_{rs}^{-1}(a_{i2}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{ik})] \cdots) \to \varphi(\cdots t_2^{\mathfrak{A}(r)}[h_{rs}^{-1}(a_{j1}), h_{rs}^{-1}(a_{j2}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{jm})] \cdots)$ y, por modus ponens, $\mathfrak{A}(r) \Vdash \varphi(\cdots t_2^{\mathfrak{A}(r)}[h_{rs}^{-1}(a_{j1}), h_{rs}^{-1}(a_{j2}), \cdots, h_{rs}^{-1}(a_{jm})] \cdots)$, o sea que $\mathfrak{A}(s) \vDash H\varphi(\cdots t_2 \cdots)[\bar{a}]$, quedando así validado el axioma para $H\varphi$. De manera enteramente análoga se prueba $(t_1 = t_2) \to (P\varphi(\cdots t_1 \cdots) \to P\varphi(\cdots t_2 \cdots))$ obteniéndose la validez de $(C5)$ para fórmulas cualesquiera de $Pred(H)$.

Una forma ligeramente diferente de mostrar $(C5)$ es la siguiente. Si $\Vdash (t_1 = t_2) \to (\varphi(\cdots t_1 \cdots) \to \varphi(\cdots t_2 \cdots))$, por $(PROP)$ $\Vdash ((t_1 = t_2) \wedge \varphi(\cdots t_1 \cdots)) \to \varphi(\cdots t_2 \cdots))$, y por $(RK+)$, $\Vdash H(t_1 = t_2) \wedge H\varphi(\cdots t_1 \cdots) \to H_{x_{i1}x_{i2}\cdots x_{ik}}\varphi(\cdots t_2 \cdots))$ donde $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ik}$ son las variables que ocurren en t_1 y no en t_2. Como $\Vdash (t_1 = t_2) \to H(t_1 = t_2)$, por $(PROP)$ $\Vdash (t_1 = t_2) \wedge H\varphi(\cdots t_1 \cdots) \to H(t_1 = t_2) \wedge \varphi(\cdots t_1 \cdots)$, luego por transitividad $\Vdash (t_1 = t_2) \wedge H\varphi(\cdots t_1 \cdots) \to H_{x_{i1}x_{i2}\cdots x_{ik}}\varphi(\cdots t_2 \cdots)$. Pero debido a que $t_1 = t_2$, siempre se tiene la simultaneidad de la existencia de las preimágenes (por cualquier h_{rs}) de los elementos utilizados para evaluar tanto a t_1 como a t_2, de manera que en este caso no es necesario colocar los subíndices a H, obteniéndose así el resultado deseado.

Los resultados establecidos hasta este momento ameritan ser organizados en un cuerpo deductivo, como indicamos a continuación.

3. Organización Axiomático-Deductiva de *Pred*(*H*)

En lo que resta del presente artículo, trataremos de sistematizar los conocimientos que poseemos de $Pred(H)$, procurando que las cadenas deductivas que formemos incluyan la mayoría de los resultados obtenidos. Como axiomas lógicos parece natural tomar, del cálculo proposicional temporal desarrollado en [6], aquellos que siguen siendo válidos en toda su generalidad para nuestra semántica, junto con los cuantificacionales usuales, y con los que caracterizan la linealidad hacia el pasado (LP) o la existencia de un momento inicial (MI).

Axiomas del sistema $PRED(H)$:
Todos los teoremas de un cálculo proposicional clásico, con sus letras proposicionales posiblemente reemplazadas por fórmulas de $Pred(H)$.
(DEF). $P\varphi \leftrightarrow \neg H \neg \varphi$.
(TR). $H\varphi \rightarrow HH\varphi$.
(LP). $(P\varphi \wedge P\psi) \rightarrow (P(\varphi \wedge \psi) \vee P(P\psi \wedge \psi) \vee P(\varphi \wedge P\psi))$.
$(C1)$. $\forall x\varphi(x,\tilde{y}) \rightarrow \varphi(t,\tilde{y})$ siendo t un término libre para x en $\varphi(x,\tilde{y})$.
$(C2)$. $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$.
$(C3)$. $\varphi \rightarrow \forall x\varphi$ si x no ocurre libre en φ.
$(C4)$. $t = t$ siendo t un término cualquiera.
$(C5)$. $(t_1 = t_2) \rightarrow [\varphi(\cdots t_1 \cdots) \rightarrow \varphi(\cdots t_2 \cdots)]$ siendo $\varphi(\cdots t_2 \cdots)$ la fórmula obtenida al reemplazar en $\varphi(\cdots t_1 \cdots)$ todas, algunas o ninguna de las ocurrencias de t_1, por t_2.
Como axiomas cuantificacionales específicamente temporales, tenemos los siguientes:
(FB). $P\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \exists xP\varphi(x)$
(PT). $P\varphi \rightarrow \varphi$ cuando: a) φ es puramente proposicional, o b) φ es de la forma $\exists x\delta(x)$ con δ puramente proposicional, o c) φ es de la forma $\exists xP\psi(x)$ para cualquier fórmula $\psi(x)$.
(GH). Si φ es cualquiera de los axiomas anteriores, entonces $H\varphi$ también es un axioma. Con esto se pretende que los axiomas y teoremas del sistema valgan tanto en el presente como en todos los momentos del pasado.
$(G\forall)$. Si φ es un axioma, entonces $\forall x_1\forall x_2 \cdots \forall x_n\varphi$ también es un axioma. Aquí n es un número natural cualquiera. En particular las clausuras universales de los axiomas son también axiomas.
Como únicas reglas deductivas primitivas tomamos (MP) y $(RK+)$.

El axioma (PT) (de permanencia temporal) tiene como finalidad garantizar que los objetos definibles sean "eternos hacia el futuro", en el sentido de que si en un instante pasado hubo, en el dominio del universo existente en ese instante, un objeto que verificó la condición φ, entonces en el dominio actual también existe un elemento verificador de φ. Por ejemplo y de manera informal, si b es un elemento existente en un instante s ($b \in |\mathfrak{A}(s)|$) y si t es cualquier momento posterior, entonces en el instante t se verifica la proposición $\mathcal{A} \Vdash_t P\exists x(x = b) \rightarrow \exists x(x = b)$ y como $\mathcal{A} \Vdash_t P\exists x(x = b)$ por existir b en el instante s anterior a t, entonces $\mathcal{A} \Vdash_t \exists x(x = b)$, es decir $\mathfrak{A}(t) \models \exists x(x = b)$ o sea que (una copia de) b existe en todo instante t posterior a s. Por consiguiente puede decirse de manera informal que si $s < t$, entonces para los dominios de los universos existentes en los respectivos instantes, se cumple que $|\mathfrak{A}(s)| \subseteq |\mathfrak{A}(t)|$.

Como $PRED(H)$ no es una extensión conservadora del cálculo proposicional temporal subyacente, los teoremas de éste ya no lo serán necesariamente de aquel, por lo cual debemos redemostrar muchos resultados ya establecidos en [6].

Si definimos las deducciones con premisas en la forma usual, entonces también vale el teorema de generalización universal ($G\forall^*$): si $\Gamma \vdash \varphi(x, \tilde{y})$ y x no ocurre libre en ninguna fórmula de Γ, entonces $\Gamma \vdash \forall x\varphi(x, \tilde{y})$. Su demostración viene a ser la misma dada por ejemplo en [1, p.133], o en [5] para el teorema de generalización universal usual y también lo denotaremos simplemente ($G\forall$).

Es claro que también vale la regla de demostración por reducción al absurdo usual: si $\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta$ y en la deducción no se aplicó ($G\forall^*$) usando variables libres en α, entonces $\Gamma \vdash \alpha$.

Establezcamos a continuación algunos resultados del sistema:

Teorema 1. *Si* $\vdash \varphi$, *entonces* $\vdash H\varphi$.

Demostración. Si $\vdash \varphi$, entonces $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \to \varphi$ ($PROP$) y aquí ($RK+$) es aplicable sin subíndices en H, luego $\vdash H(\varphi \vee \neg\varphi) \to H\varphi$; como $\varphi \vee \neg\varphi$ es una tautología, entonces es uno de nuestros axiomas, y por (GH), $\vdash H(\varphi \vee \neg\varphi)$ de manera que por (MP) se obtiene el resultado. A este teorema le seguiremos llamando simplemente (GH).

Teorema 2. $\vdash PP\varphi \to P\varphi$.

Su demostración es la misma dada para el caso proposicional.

Teorema 3. $\vdash H\varphi \vee H\psi \to H(\varphi \vee \psi)$.

Demostración. Por ($PROP$), $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$ y $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$; entonces por ($RK+$) (sin subíndices en H), $\vdash H\varphi \to H(\varphi \vee \psi)$ y $\vdash H\psi \to H(\varphi \vee \psi)$, luego por ($PROP$), $\vdash H\varphi \vee H\psi \to H(\varphi \vee \psi)$.

Teorema 4. $\vdash H\varphi \wedge H\psi \to H(\varphi \wedge \psi)$.

Su prueba es la misma dada antes para el corolario 3 de la parte semántica.

Teorema 5. *Si* $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ *y en* φ *y* ψ *ocurren las mismas constantes (distintas a las del léxico) y las mismas variables libres, entonces* $\vdash H\varphi \leftrightarrow H\psi$.

Demostración. Si $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, entonces $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \varphi$ y debido a las hipótesis, es aplicable ($RK+$) sin subíndices en H, luego $\vdash H\varphi \to H\psi$ y $\vdash H\psi \to H\varphi$, de modo que $\vdash H\varphi \leftrightarrow H\psi$, quedando demostrado.

Teorema 6 ($RE+$). *Si* $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ *y* α *es una sub-fórmula de* φ *y en* α *y* β *ocurren las mismas constantes (distintas a las del léxico) y las mismas variables libres, entonces* $\vdash \varphi \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \varphi$.

Demostración. 1) Si en φ no ocurren los operadores P ni H, la afirmación es precisamente la regla (RE) del cálculo de predicados básico. 2) Mostremos que si la propiedad vale en una fórmula ψ, entonces también vale para $H\psi$. En efecto, si α es una subfórmula de $H\psi$, a) α es $H\psi$ o b) α es una subfórmula de ψ. En el primer caso, $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} H\psi = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \alpha = \beta \leftrightarrow \alpha = H\psi$. En el segundo caso, por hipótesis $\vdash \psi \leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \psi$; como α es una subfórmula de ψ y en β ocurren las mismas constantes y variables libres que en α, entonces en $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \psi$ ocurren la mismas constantes y variables libres que en ψ, luego el teorema 4 es aplicable, y en consecuencia, $H\psi \leftrightarrow H \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \psi$ o sea $\vdash H\psi \leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} H\psi$, con lo cual queda demostrado. 3) Mostremos que si la propiedad vale para una fórmula ψ, entonces también vale para $P\psi$: como por (DEF) la fórmula $P\psi$ es $\neg H \neg \psi$, se sigue que si α es una subfórmula de $\neg H \neg \psi$, entonces a) α es toda la fórmula, caso en el cual procedemos como en a) de la parte 2), o b) α es una subfórmula de $H\neg\psi$, caso en el cual por la parte 2) se tendría $\vdash H\neg\psi \leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} H\neg\psi$ y por $(PROP)$, $\vdash \neg H\neg\psi \leftrightarrow \neg \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} H\neg\psi$ o sea $\vdash \neg H\neg\psi \leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \neg H\neg\psi$, lo que termina la prueba.

Corolario. $\vdash P\varphi \leftrightarrow P\neg\neg\varphi$.

Es una clara aplicación de la regla anterior.

Teorema 7. *Si* $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ *y en* φ *y* ψ *ocurren la mismas constantes (distintas a las del léxico) y las mismas variables libres, entonces* $\vdash P\varphi \leftrightarrow P\psi$.

Demostración. Si $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, entonces por $(PROP)$, $\vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$, por el teorema 5, $\vdash H\neg\varphi \leftrightarrow H\neg\psi$, por (DEF), $\vdash \neg P\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg P\neg\neg\psi$, y por el corolario anterior aplicado a φ y a ψ, se tiene que $\vdash \neg P\varphi \leftrightarrow \neg P\psi$, concluyéndose por $(PROP)$, $\vdash P\varphi \leftrightarrow P\psi$.

Teorema 8. $\vdash P(\varphi \vee \psi) \rightarrow (P\varphi \vee P\psi)$.

Demostración. Reemplazando en el teorema 2 a φ y ψ por $\neg\varphi$ y $\neg\psi$ respectivamente, obtenemos $(H\neg\varphi) \wedge (H\neg\psi) \rightarrow H(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ y usando (DEF), $(\neg P\neg\neg\varphi) \wedge (\neg P\neg\neg\psi) \rightarrow \neg P\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$; por (RE), $(\neg P\varphi) \wedge (\neg P\psi) \rightarrow \neg P(\varphi \vee \psi)$ y usando $(RE+)$, $\neg(P\varphi \vee P\psi) \rightarrow \neg P(\varphi \vee \psi)$, concluyéndose por $(PROP)$, $P(\varphi \vee \psi) \rightarrow (P\varphi \vee P\psi)$.

Teorema 9. $\vdash P(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (P\varphi \wedge P\psi)$.

Su prueba es enteramente análoga a la anterior a partir del teorema 3.

Teorema 10 (FB^*). $\vdash \forall x H\varphi(x) \leftrightarrow H\forall x\varphi(x)$.

Basta reemplazar en $F\psi$ a $\varphi(x)$ por $\neg\varphi(x)$, a P por $\neg H\neg$ y a $\exists x$ por $\neg\forall x\neg$ y eliminar negaciones aplicando $(RE+)$. Como en esta prueba todos los pasos deductivos son también válidos en sentido inverso, se sigue la equivalencia de (FB) y (FB^*).

Teorema 11 (HI). $\vdash (t_1 = t_2) \rightarrow H(t_1 = t_2)$.

Es la generalización hacia el pasado de la igualdad.

Demostración. 1. $t_1 = t_1$ $(C4)$. 2. $H(t_1 = t_1)$ (GH). 3. $t_1 = t_2 \rightarrow [H(t_1 = t_1) \rightarrow H(t_1 = t_2)$ $(C5)$. 4. $H(t_1 = t_1) \rightarrow [t_1 = t_2 \rightarrow H(t_1 = t_2)]$ $(PROP)$. 5. $t_1 = t_2 \rightarrow H(t_1 = t_2)$ $(MP2,4)$. Se demuestra así la idea de que si dos objetos son iguales en un cierto momento, es porque siempre que han existido han sido iguales.

Usando contrarecíprocas y el axioma (DEF), se llega a que (HI) es equivalente a

(HI^*) $$P(t_1 \neq t_2) \rightarrow t_1 \neq t_2.$$

Este resultado también se habría podido obtener como una caso particular del axioma (PT) ya que $t_1 \neq t_2$ es puramente proposicional.

Intuitivamente esta expresión afirma que si dos objetos son distintos en el pasado, también deberán ser distintos en cualquier momento posterior a aquel en el cual fueron diferentes. Esto trae como consecuencia que en todo modelo para nuestro sistema $PRED(H)$, si existen morfismos de un mundo en otro posterior entonces, como se puso de presente en la parte semántica, dichos morfismos deberán ser inyectivos, confirmándose de nuevo que el dominio deberá ser creciente con el tiempo.

Teorema 12. $\vdash t_1 \neq t_2 \rightarrow H(t_1 \neq t_2)$.

Como $t_1 = t_2$ es puramente proposicional, por (PT) se tiene $\vdash P(t_1 = t_2) \rightarrow t_1 = t_2$ y usando $(PROP)$ y (DEF) se obtiene el resultado.

Una generalización de los teoremas 11 y 12 anteriores, es la siguiente:

Teorema 13. a) $\vdash \varphi \rightarrow H\varphi$ *si* φ *es puramente proposicional.*
b) $\vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow H\forall x\varphi(x)$ *si* $\varphi(x)$ *es puramente proposicional.*
c) $\vdash \forall xH\psi(x) \rightarrow H\forall xH\psi(x)$ *para cualquier fórmula* ψ.

Estos resultados se obtienen de manera inmediata a partir de (PT), reemplazando φ por $\neg\varphi$, (ψ por $\neg\psi$, etc.), $\exists$ por $\neg\forall\neg$, P por $\neg H\neg$ y usando $(PROP)$.

La validez de b) es clara, ya que si todos los elementos del dominio actual verifican φ entonces, debido a que cualquier dominio anterior es un sub-dominio del actual, también deberán satisfacer φ todos los elementos del dominio de cualquier universo anterior.

Entre las relaciones P y H con los conectivos, merecen destacarse las siguientes:

Teorema 14. $\vdash P\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (P\exists x\varphi(x) \vee P\exists x\psi(x))$.

Por distributividad, $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x))$, por el teorema 6, $P\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow P(\exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x))$, y por el teorema 7, $P(\exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)) \rightarrow (P\exists x\varphi(x) \vee P\exists x\psi(x))$, de manera que por transitividad en la deducción se obtiene el resultado.

Teorema 15. *$\vdash P\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow (P\exists x\varphi(x) \wedge P\exists x\psi(x))$, pero la implicación recíproca no se tiene.*

Demostración. $P\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \exists xP(\varphi(x) \wedge \psi(x))$ por (FB). Pero $\exists xP(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow \exists x(P\varphi(x) \wedge P\psi(x))$ por Teorema 7 y $(RE+)$; entonces $\exists x(P\varphi(x) \wedge P\psi(x)) \rightarrow (\exists xP\varphi(x) \wedge \exists xP\psi(x))$ por $(PRED)$; el consecuente de esta última implicación equivale, por (FB), a $P\exists x\varphi(x) \wedge P\exists x\psi(x)$. El resultado se sigue entonces por $(RE+)$ y por la transitividad de la deducción.

Teorema 16. $\neg P\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \neg\neg H\neg\exists x\varphi(x) \leftrightarrow H\forall x\neg\varphi(x)$.

La primera equivalencia se tiene por (DEF) y $(RE+)$ y la segunda por $(RE+)$, $(PROP)$ y $(PRED)$. De manera enteramente análoga e inmediata se obtienen los resultados siguientes

Teorema 17. $\neg H\exists\varphi(x) \leftrightarrow P\forall x\neg\varphi(x)$.

Teorema 18. $\neg H\forall x\varphi(x) \leftrightarrow P\exists x\neg\varphi(x)$.

Teorema 19. $\neg P\forall x\varphi(x) \leftrightarrow H\exists x\neg\varphi(x)$.

Equivalentes a los teoremas 14 y 15, son los siguientes:

Teorema 20. $(H\forall x\varphi(x) \wedge H\forall x\psi(x)) \rightarrow H\forall x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x))$.

Consecuencia inmediata del teorema 14, reemplazando $\varphi(x)$, $\psi(x)$ y P por $\neg\varphi(x)$, $\neg\psi(x)$ y $\neg H\neg$ respectivamente, y usando luego (RE), $(PROP)$ y $(PRED)$.

Teorema 21. $(H\forall x\varphi(x) \wedge H\forall x\psi(x)) \rightarrow H\forall x\,(\varphi(x) \vee \psi(x))$.

Basta aplicar al teorema 15 el mismo procedimiento recién descrito.

Enunciemos la propiedad de distributividad restringida de H con respecto a la implicación:

Teorema 22 $(Ax1+)$. $\vdash H(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (H\varphi \rightarrow H_{x_1x_2\cdots x_mb_1\cdots b_k}\psi)$,

donde $x_1, x_2, \cdots, x_m$ son las variables libres de φ que no ocurren libres en ψ, y $b_1, b_2, \cdots, b_k$ son las constantes de φ diferentes a las del léxico que no ocurren en ψ. Su prueba es la misma dada antes en la parte semántica.

Teorema 23. $\vdash H\forall x\varphi(x,\bar{y}) \rightarrow H\varphi(x,\bar{y})$.

Demostración. Como $\vdash \forall x\varphi(x,\bar{y}) \rightarrow \varphi(x,\bar{y})$, entonces por $(RK+)$, $\vdash H\forall x\varphi(x,\bar{y}) \rightarrow H\varphi(x,\bar{y})$, ya que todas las variables que aparecen libres en $\forall x\varphi(x,\bar{y})$, también lo están en $\varphi(x,\bar{y})$ e igual sucede con las constantes.

Teorema 24. $\vdash H\forall x(\varphi \to \psi) \to (H\forall x\varphi \to \forall x H_{x_1x_2\cdots x_m b_1\cdots b_k}\forall x\psi)$.

Demostración. Por $(C2)$, $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$, o sea $(\forall x(\varphi \to \psi) \wedge \forall x\varphi) \to \forall x\psi$, luego por $(RK+)$, $(H\forall x(\varphi \to \psi) \wedge H\forall x\varphi) \to H_{x_1x_2\cdots x_m b_1\cdots b_k}\forall x\psi$, de donde por $(PROP)$ se obtiene el teorema.

Si al teorema 22 lo generalizamos universalmente y le aplicamos el axioma $(C2)$ dos veces, obtenemos un resultado similar al teorema 24:

Teorema 25. $\vdash \forall x H(\varphi \to \psi) \to (\forall x H\varphi \to \forall x H_{x_1x_2\cdots x_m b_1\cdots b_k}\psi)$.

Los resultados anteriores sugieren el siguiente teorema:

Teorema 26. $(\forall x H_{x_1x_2\cdots x_m b_1\cdots b_k}\psi) \leftrightarrow H_{x_1x_2\cdots x_m b_1\cdots b_k}\forall\psi$ *cuando* x *es una variable distinta de las* x_i.

Demostración. Por definición, $\forall H_{x_1x_2\cdots x_m b_1\cdots b_k}\psi \leftrightarrow \forall x H((x_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge x_m = x_m \wedge \cdots \wedge b_k = b_k) \to \psi)$ y, por (FB^*), esto es equivalente a $H\forall x((x_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge x_m = x_m \wedge \cdots \wedge b_k = b_k) \to \psi)$; como x no ocurre libre en el antecedente, esta última fórmula es equivalente a $H((x_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge x_m = x_m \wedge \cdots \wedge b_k = b_k) \to \forall x\psi)$ y por definición ésta es precisamente $H_{x_1x_2\cdots x_m b_1\cdots b_k}\forall x\psi$.

Es claro que si en φ y en ψ ocurren las mismas constantes (distintas a las del léxico) y las mismas variables libres, los resultados de los teoremas 24 y 25 anteriores valen sin subíndices en H.

Teorema 27. *Si en* φ *y en* ψ *ocurren las mismas constantes (distintas a las del léxico) y las mismas variables libres, entonces*

$$\vdash \forall x H(\varphi \to \psi) \to (\forall x H\varphi \to \forall x H\psi).$$

$$\vdash H\forall x(\varphi \to \psi) \to (H\forall x\varphi \to H\forall x\psi).$$

Aplicando (FB^*) *y* $(RE+)$ *se comprueba que estos dos resultados son equivalentes. Lo mismo sucede con los teoremas 24 y 25.*

A pesar de que no hemos intentado probar que el sistema acabado de desarrollar es completo para la semántica definida antes (no sabemos si lo sea o no), sí queremos recalcar su validez: como todos los axiomas que hemos dado son válidos y es claro que las reglas de inferencia dadas producen conclusiones válidas a partir de premisas válidas, se concluye que el sistema propuesto es válido para la semántica considerada.

Referencias

1. X. Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad*, Bogotá: Universidad de los Andes, 1990.
2. B. Chellas, *Modal logic*, Cambridge/New York: Cambridge University Press, 1980.
3. H. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, New York: Academic Press, 1972.
4. E. Hugues, M. J. Creswell, *Introducción a la Lógica Modal*, Madrid: Tecnos, 1973.
5. E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, New York: van Nostrand, 1979.
6. J. M. Muñoz, "Consistencia, validez y completitud de un sistema proposicional de lógica temporal", Boletín de Matemáticas XXIII (1992).
7. J. M. Muñoz, "Lógica modal y cálculo temporal", Lecturas Matemáticas XIV (1993).
8. J. M. Muñoz, "Reglas deductivas y esquemas modales en universos crecientes", Matemática Enseñanza Universitaria.