NOTA SOBRE EL M.C.D. Y EL m.c.m.

por

Rolando PEINADO

Sea A un conjunto no vacío de números enteros. Supongamos que A contiene por lo menos un elemento diferente de cero. El <u>máximo común divisor de</u> A, escrito M.C.D. de A, es un entero positivo d, el cual satisface las siguientes dos propiedades:

(i) d divide x_i, para todo $x_i \in A$, $i \in I$ (I un conjunto índice)

(ii) si c divide a x_i, para todo $x_i \in A$, entonces c divide a d.

Es fácil demostrar que cada sub-conjunto finito de A posee un M.C.D., y que el hecho de tener M.C.D. es una propiedad de caracter finito; por consiguiente, A mismo posee M.C.D.. Se puede demostrar que el M.C.D. es único.

El <u>mínimo común múltiplo</u>, escrito m.c.m., de A, es un entero positivo m con las siguientes dos propiedades:

(i) x_i divide a m, para cada $x_i \in A$, $i \in I$.

(ii) si x_i divide a c para cada $x_i \in A$, $i \in I$, entonces m didvide a c.

Cuando quiera que el m.c.m. de un conjunto A, existe éste es único.

No se sabe si los conceptos de M.C.D. y m.c.m. pueden generalizarse a los números racionales en tal forma que al restringirse a los números enteros resulten ser los conceptos arriba definidos. La siguiente relación entre números racionales puede dar la impresión, tal vez incorrecta, de que se puede hacer tal generalización.

Sea $\{k_i\}$, $i \in I$, un número, posiblemente infinito, de enteros positivos. Sea m un número entero fijo. Defínase los siguientes números enteros positivos.

$$k = \text{m.c.m.}\{k_i\} \qquad g_i = \text{M.C.D.}\ (k_i, m)$$

$$k' = \text{M.C.D.}\{k_i\} \qquad g = \text{M.C.D.}(k, m)$$

$$g' = \text{M.C.D.}(k', m).$$

Entonces las siguientes relaciones son válidas, cuando éstos existen.

$$(1) \qquad \frac{k}{g} = \text{m.c.m.}\left\{\frac{k_i}{g_i}\right\},$$

es decir,

$$\frac{\text{m.c.m.}\{k_i\}}{\text{M.C.D.}\ (\text{m.c.m.}\{k_i\}), m} = \text{m.c.m.}\left\{\frac{k_i}{\text{M.C.D.}\,(k_i, m)}\right\}.$$

$$(2) \qquad \frac{k'}{g'} = \text{M.C.D.}\left\{\frac{k_i}{g_i}\right\}$$

es decir,

$$\frac{\text{M.C.D.}\{k_i\}}{\text{M.C.D.}\left[(\text{M.C.D.}\{k_i\}), m\right]} = \text{M.C.D.}\left\{\frac{k_i}{\text{M.C.D.}\ (k_i, m)}\right\}.$$

La demostración se basará en el teorema fundamental de la aritmética. Sean a_{ij}, b_{ij}, números enteros, y

P_j números enteros primos.

$$k_i = \prod P_j^{a_{ij}}, \quad a_{ij} \geq 0,$$

$$m = \prod P_j^{b_j}, \quad b_j \geq 0;$$

entonces

$$k = \prod P_j^{\text{máx}(a_{ij})}, \quad \text{máx}(a_{ij}) \geq 0;$$

$$g_i = \prod P_j^{\text{mín}(a_{ij}, b_j)}, \quad \text{mín}\,(a_{ij}, b_j) \geq 0;$$

$$\frac{k_i}{g_i} = \prod P_j^{a_{ij} - \text{mín}(a_{ij}, b_j)}, \quad a_{ij} - \text{mín}\,(a_{ij}, b_j) \geq 0;$$

$$g = \prod P_j^{\text{mín}(\text{máx}(a_{ij}, b_j))}, \quad \text{mín}(\text{máx}(a_{ij}, b_j) \geq 0;$$

$$\frac{k}{g} = \prod P_j^{\text{máx}(a_{ij}) - \text{mín}(\text{máx}(a_{ij}, b_j))},$$

$$\text{máx}(a_{ij}) - \text{min}(\text{máx}(a_{ij}, b_j)) \geq 0.$$

Para demostrar (1) basta demostrar que para cada primo P_j

$$(*) \quad \text{máx}(a_{ij}) - \text{mín}(\text{máx}(a_{ij}), b_j) = \text{máx}(a_{ij} - \text{mín}(a_{ij}, b_j))$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$a_{1j} \geq a_{2j} \geq \dots \geq a_{nj} \geq 0.$$

Entonces, si $a_{ij} \geq b_j$ para algún i en I, siendo I un conjunto índice, la parte izquierda y la derecha de la ecuación $(*)$ son ambas iguales a $a_{ij} - b_j$. Si $b_j \geq a_{ij}$ para todas las i de I, ambos lados de la ecuación $(*)$ son iguales a cero.

(2) se demuestra en forma similar usando el teorema fundamental de la aritmética.

Universidad de Puerto Rico
Mayagüez, Puerto Rico
Recibido abril de 1967.