CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPAS

por

Nelo S. ALLAN

§1 Introducción.

La razón por la cual he escogido este tema es porque es un buen ejemplo de formulación analítica de un problema geométrico y de una solución relativamente fácil de este problema. Desde los griegos problemas como la duplicación del cubo de volumen uno y la trisección del ángulo de 60° con ayuda de la regla y el compás han preocupado a los matemáticos; pruebas de la imposibilidad de construcción con regla y compás parecían muy difíciles, indicando esto que los métodos usados hasta una determinada época no eran buenos. La solución de estos problemas tuvo que esperar el desarrollo de métodos analíticos, los cuales sólo aparecieron alrededor del año de 1.500. Nuestra primera observación es que si sabemos construir los números reales α y β entonces sabemos construir

$\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta^{\pm}$, $\beta \neq 0$, i.e., el conjunto $\underline{\underline{C}}$ de los números <u>constructibles</u> (con regla y compás) tiene una buena estructura algebraica: contiene a los números racionales $\mathbb{Q}$, y en $\underline{\underline{C}}$ substracciones y divisiones son siempre posibles. Un tal conjunto de números reales se llama un <u>cuerpo de números</u>.

§2 Algunos cuerpos de números

Antes de tocar nuestro problema veamos algunos ejemplos de cuerpos de números. Nuestro primer ejemplo es el conjunto de todos los números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, donde $a, b \in \mathbb{Q}$. Es fácil ver que la suma y el producto de números de esta forma es nuevamente de esta forma y que en este conjunto la substracción y la división (por números diferentes de cero) es siempre posible. Este ejemplo es un caso particular de los <u>cuerpos cuadráticos</u>, i.e., de cuerpos del tipo $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d entero positivo sin factores cuadráticos. Otro ejemplo es el cuerpo $\mathbb{Q}(3\sqrt{5})$ que consiste de todos los números de la forma

$$a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}, \quad a,b,c \in \mathbb{Q} .$$

De manera un poco más general consideremos un polinomio irreductible $p(X) = a_o + a_1 X + \dots + a_n X^n$, $a_n \neq 0$, con coeficientes enteros (irreductible quiere decir aquí que $p(X)$ no es producto de otros dos polinomios no constantes con coeficientes enteros), y sea Θ una raíz real de la ecuación $p(\Theta) = 0$. El conjunto $K = \mathbb{Q}(\Theta)$ de todos los números de ls forma

$$(1) \qquad c_o + c_1\Theta + \dots + c_{n-1}\Theta^{n-1},$$

donde $c_o, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{Q}$, es un cuerpo de números. En efecto: la suma o diferencia de dos números de la forma (1) es nuevamente de esa forma. Para ver que el producto de dos de ellos es de esa forma, observemos que Θ^n se escribe como un número de esta forma, puesto que $p(\Theta) = 0$:

$$\Theta^n = -\frac{a_o}{a_n} - \frac{a_1}{a_n}\Theta - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}\Theta^{n-1} .$$

De aquí se deduce que Θ^{n+k}, $k \geq 0$, se escribe bajo la forma (1), y por tanto, que el producto de dos números de la forma (1) se escribe nuevamente bajo esta forma. La verificación de la existencia de los inversos sigue del algoritmo de división de polinomios, y será omitida.

Un tal cuerpo se llama un cuerpo de números algebraicos de dimensión finita sobre los racionales. El término dimensión finita, o mejor, dimensión n, ó grado $[K:\mathbb{Q}] = n$, se define intuitivamente como el número de grados de libertad (racional) que K tiene sobre $\mathbb{Q}$, i.e., un elemento genérico de K depende de n constantes de $\mathbb{Q}$. Usando técnicas de la teoría de espacios vectoriales, podemos precisar la noción de dimensión y definirla para cualquier cuerpo K sobre un subcuerpo L de K, como la dimensión de K sobre L, considerando a K como un L-espacio vectorial. Dicho esto, si $[K:\mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}} K$ es finita, y si K es un cuerpo de números reales, entonces se puede demostrar que $K = \mathbb{Q}(\theta)$ para algún real θ, y que θ es una raíz de un polinomio irreductible de grado $[K:\mathbb{Q}]$ con coeficientes enteros.

Una propiedad básica de la dimensión es la siguiente: si se tienen tres cuerpos encajados $F \subset L \subset K$ entonces $[K:F] = [K:L][L:F]$.

En nuestros ejemplos tenemos

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{d}):\mathbb{Q}] = 2 \quad \text{y} \quad [\mathbb{Q}(\sqrt{5}):\mathbb{Q}] = 3,$$

porque los correspondientes polinomios son $X^2 - 2$, $X^2 - d$, $X^3 - 5$, los cuales son irreductibles, como bien puede comprobarlo el lector.

§3 Números constructibles

Nuestro objetivo ahora es determinar el conjunto $\underline{\underline{C}}$ de todos los números constructibles, i.e., encontrar una condición necesaria y suficiente para que un número real pueda construirse con ayuda de la regla y el compás. Para facilitar el planteamiento del problema, trabajaremos en el plano real π en vez de la recta, pues las construcciones con regla y compás se hacen siempre en el plano, y si sabemos construir el punto (α, β), sabemos, por proyección, construir los números α y β. Si K es un cuerpo de números reales denotaremos por π_K los puntos de π que tienen coordenadas en K. Empecemos con $\pi_{\mathbb{Q}}$;

queremos saber dónde se encuentran los puntos constructibles. Con ayuda de la regla y el compás, podemos trazar rectas con ecuaciones de coeficientes racionales y circunferencias con centros en $\pi_{\mathbb{Q}}$ y radio racional. No es difícil verificar que las intersecciones de dos de tales rectas, dos de tales circunferencias o de una tal recta y una tal circunferencia están en π_K, donde K es una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$, pues el cáluclo de estas intersecciones depende de la solución de un sistema de ecuaciones de grados a lo más dos. Del mismo modo, si un punto puede construirse con regla y compás a partir del plano π_K de K, entonces este punto está en el plano π_K o en el plano $\pi_{K'}$ donde K' es una extensión cuadrática de K. Recíprocamente, todos los puntos de $\pi_{K'}$ pueden construirse con la ayuda de la regla y el compás a partir de los puntos de π_K. Repitiendo el anterior razonamiento, tenemos:

TEOREMA A Un número real θ es constructible si y sólo si $\mathbb{Q}(\theta)$ está contenido en un cuerpo K para el cual existe una cadena $K_0 = \mathbb{Q} \subset K_1 \subset \ldots \subset K_{n-1} \subset K = K_n$, tal que $K_i = K_{i-1}(\sqrt{r_{i-1}})$, $i = 1,\ldots,n$, $r_{i-1} > 0$, $r_{i-1} \in K_{i-1}$.

COROLARIO Si θ es constructible entonces $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}] = 2^t$, t entero positivo.

Este corolario nos suministra una regla para determinar si un número no es constructible:

TEOREMA B Si existe un número primo $p \neq 2$ tal que p divide a $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}]$ entonces θ no es constructible.

O de otra manera,

TEOREMA B´ Si θ es solución de $p(\theta) = 0$, donde $p(X)$ es un polinomio irreducible de grado n, y si n no es de la forma 2^r, r entero positivo, entonces θ no es constructible.

§4. Aplicaciones

a) Duplicación del cubo de volumen uno. Se trata de encontrar un número constructible Θ tal que $\Theta^3 = 2$, pero como $[\mathbb{Q}(\Theta):\mathbb{Q}] = 3$, el teorema B' nos dice que es imposible construir con ayuda de la regla y el compás un tal Θ. Luego es imposible duplicar el cubo con ayuda de la regla y el compás.

b) Trisección del ángulo de 60 grados. Si pudiésemos trisectar el ángulo de 60 grados, podríamos entonces construir $\cos 20^\circ$ y $\operatorname{sen} 20^\circ$. De la fórmula de De Moivre síguese que $\cos 60^\circ = 4(\cos 20^\circ)^3 - 3\cos 20^\circ$, i.e., si $x = \cos 20^\circ$, entonces $8x^3 - 6x - 1 = 0$. No es difícil verificar que esta ecuación es irreductible, luego $[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}] = 3$, y $\cos 20^\circ$ no es constructible; por consiguiente, el ángulo de 60° no puede trisectarse con la regla y el compás; síguese también que el eneágono regular no es constructible con la regla y el compás.

c) El pentágono regular es constructible. Mostrar que un número es constructible es más dificil, pues debemos exibir la cadena de cuerpos K_i del teorema A. En el caso del pentágono regular, podemos usar la fórmula de De Moivre con $x = \operatorname{sen} 18^\circ$, obteniendo una ecuación bicuadrática del tipo $x^4 + ax^2 + b = 0$ la cual nos provee una cadena como sigue: se pone $y = x^2$, entonces $y^2 + ay + b = 0$, y si y_o es una solución real de esta ecuación, $y_o \in \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}) = K_1$, donde Δ es el discriminante de esta ecuación; luego $x = \sqrt{y_o}$ y $x \in K = K_1(\sqrt{y_o})$.

A las personas interesadas en mayor información sobre este problema, recomendamos la lectura de uno cualquiera de los siguientes libros

1. B.Van der WAERDEN, *Modern Algebra*, Ungar, New York.
2. I. HERSTEIN, *Topics in Algebra*, Ginn-Blaisdell, New York.
3. I.KAPLANSKY, *Introdução a teoría de Galois*, Notas Matemáticas,IMPA,Rio.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

(Recibido en octubre de 1968)