Boletín de Matemáticas
Volumen III (1969), págs. 72-76

EL ACORDEÓN DE LOS NÚMEROS REALES

por
Rafael MARIÑO SARMIENTO

1. El siguiente es un ejercicio para un curso introductorio de álgebra (álgebra abstracta). Es mi opinión que este ejercicio fuera de ilustrar varios conceptos algebraicos, da una oportunidad al estudiante para explorar un poco y para que use su imaginación. Este ejercicio es una modificación de uno que se encuentra en el libro de Allendoerfer y Oakley, <<Principles of Mathematics>> (2a. ed., pág. 59, prob. 41) y otro en el libro de Herstein, <<Topics in Algebra>> (1a; ed., pág. 97, prob.11). Herstein lo presenta de un modo muy general y completo; sin embargo lo presentaré como lo hago en mi libro: <<Fundamentos de Matemática>> (pág. 3-19, ejercicio 10), aclarando que lo que allí se pide es relativamente fácil (se le puede asignar como tarea a estudiantes de primer año) y en este artículo haremos la ampliación que idealmente haría un estudiante de álgebra. Dice el ejercicio:

2. Sea <<adiplicación>> una operación $\odot$ definida de la siguiente manera: $x \odot y = x + y + xy$, para reales x, y. ¿Se podrá decir que $\mathbb{R}$ es un grupo adiplicativo conmutativo ?

Fácilmente se ve que la respuesta es NO. La adiplicación es conmutativa, asociativa, tiene elemento identidad (el número 0), pero no todo real tiene inverso adiplicativo (-1 no lo tiene).

3. Idealmente un estudiante queda preocupado por esta situación. El real que nos puso problemas fue -1. Se le podría ocurrir a uno que posiblemente $\mathbb{R}_{-1} = \mathbb{R} - \{-1\}$ es un grupo adiplicativo. Efectivamente sí lo es, lo cual es fácil de verificar.

Lo anterior junto con otras propiedades, como la que para todo a, $a \odot (-1) = -1$, nos trae a la mente inmediatamente la semejanza entre $\mathbb{R}_{-1}$ con repecto a la adiplicación y $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\}$ con respecto de la multiplicación. La proposición inmediata es : Existe una operación $\oplus$ tal que $\mathbb{R}$ con respecto de $\oplus$ es un grupo conmutativo con elemento identidad -1, o aún mejor : $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ es un cuerpo con cero igual a -1 y unidad igual a 0. ¿Cómo haremos para encontrar $\oplus$? ¿Si las dos proposiciones anteriores son correctas, quiere decir que hemos encontrado otra estructura de cuerpo en $\mathbb{R}$? Suponiendo que $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ resulta un cuerpo (mejor dicho, si existe $\oplus$), entonces éste debe ser isomorfo a $(\mathbb{R}, +, .)$ y podemos trabajar con tal isomorfismo

$$f:(\mathbb{R}, +, .) \to (\mathbb{R}, \oplus, \odot)$$

de modo que $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, lo cual nos hace pensar que f está definido por

$$f(x) = x - 1.$$

Veamos ahora si éste es verdaderamente un isomorfismo para las multiplicaciones. Efectivamente:

$$\begin{aligned} f(xy) &= xy - 1 \\ &= x - 1 + y - 1 + xy - x - y + 1 \\ &= (x - 1) + (y - 1) + (x - 1)(y - 1) \\ &= f(x) + f(y) + f(x)f(y) \\ &= f(x) \odot f(y). \end{aligned}$$

Para que todo nos quede completo, tendríamos entonces que

$$\begin{aligned} f(x + y) &= x + y - 1 \\ &= f(x) \oplus f(y) \\ &= (x-1) \oplus (y-1), \end{aligned}$$

o mejor que

$$\begin{aligned} f((x+1) + (y+1)) &= x + y + 1 \\ &= f(x+1) \oplus f(y+1) \\ &= x \oplus y ; \end{aligned}$$

y hemos encontrado $\oplus$:

$$x \oplus y = x + y + 1.$$

Fácilmente, verificamos que efectivamente $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ así definido es un cuerpo con cero igual a -1 y unidad igual a 0.

4. Lo que puede acurrírsenos en seguida es definir funciones de la forma

$$f_b(x) = x + b \quad \text{(para cada real } b),$$

y encontrar una adición $\oplus$ y una multiplicación $\odot$ tal que f_b sea un isomorfismo entre los cuerpos $(\mathbb{R}, +, .)$ y $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$. Esto no es difícil:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) \\ &= f(x - b + y - b) \\ &= x + y - b ; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x \odot y &= f(f^{-1}(x)f^{-1}(y)) \\
&= f((x-b)(y-b)) \\
&= f(xy - bx - by + b^2) \\
&= xy - bx - by + b^2 + b.
\end{aligned}
$$

El cero de cada uno de estos cuerpos es $f_b(0) = b$ y la unidad es $f_b(1) = 1 + b$. El inverso aditivo de $x = f(x-b)$ es $f(-(x-b)) = -x + 2b$ y el inverso multiplicativo de $x = f(x-b)$ es $f(1/(x-b)) = (1+bx-b^2)/(x-b)$.

5. En realidad las funciones de la forma $f_b(x) = x + b$ no son las únicas con las cuales podemos obtener cuerpos isomorfos al de los números reales. De un modo más general podemos considerar todas las transformaciones lineales de la forma

$$f_{a,b}(x) = ax + b,$$

en donde a y b son reales y $a \neq 0$. La adición sería

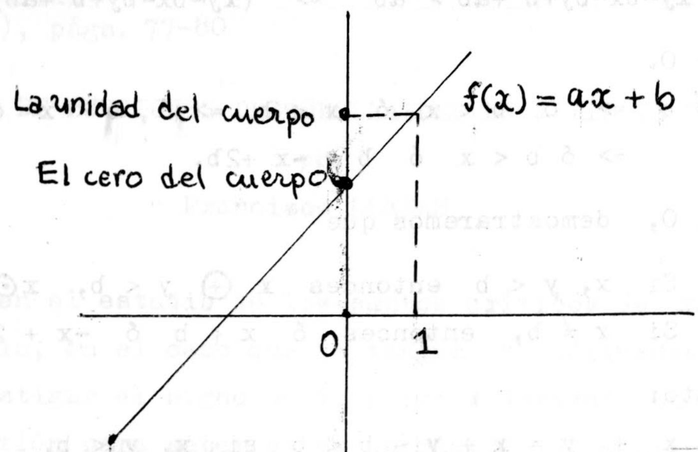
$$
\begin{aligned}
x \oplus y &= f_{a,b}(f^{-1}_{a,b}(x) + f^{-1}_{a,b}(y)) \\
&= f_{a,b}((x+y-2b)/a) \\
&= x + y - b,
\end{aligned}
$$

y la multiplicación

$$
\begin{aligned}
x \odot y &= f_{a,b}(f^{-1}_{a,b}(x) f^{-1}_{a,b}(y)) \\
&= f_{a,b}((x-b)(y-b)/a^2) \\
&= f_{a,b}((xy-bx-by+b^2)/a^2) \\
&= \frac{xy - bx - by + b^2}{a} + b \\
&= \frac{xy - bx - by + b^2 + ab}{a}.
\end{aligned}
$$

El cero de cada uno de estos cuerpos que resultan es $f_{a,b}(0) = b$ y la unidad es $f_{a,b}(1) = a + b$. El inverso aditivo de $x = f_{a,b}((x-b)/a)$ es $f_{a,b}(-(x-b)/a) = -x + 2b$; el inverso multiplicativo de x es $f_{a,b}(a/(x-b)) = (bx + a^2 - b^2)/(x-b)$.

Los casos considerados en 4. son casos particulares de éstos con $a = 1$, y el caso aún más particular considerado en 3. es el que corresponde a $a = 1$ y $b = -1$. Cuando $a = 1$ y $b = 0$, la transformación es la función idéntica, y se tiene la adición y la multiplicación comunes y corrientes.



6. Dando un paso más general, podemos comenzar con un cuerpo cualquiera $(K, +, .)$ y considerar las transformaciones de la forma

$$f_{a,b}(x) = ax + b \ , \quad \text{con} \quad a, b \in K \quad y \quad a \neq 0,$$

obteniendo de esta manera cuerpos isomorfos con K.

7. El siguiente paso, regresando al cuerpo de los números reales, sería ver la posibilidad de establecer un orden en $\mathbb{R}$ para cada uno de los cuerpos isomorfos que hemos obtenido (mejor dicho, para cada una de las parejas (a,b), con $a \neq 0$) de modo que estos cuerpos resulten ordenados.

Después de pensar un poco este problema llegaremos probablemente a la siguiente conclusión:

<u>Cada uno de estos cuerpos es un cuerpo ordenado con el orden regular si</u> $a > 0$ <u>y con el orden inverso de</u> $<$ <u>si</u> $a < 0$.

Demostremos esto. Si $a > 0$ demostraremos que

i) Si $b < x,y$ entonces $b < x \oplus y$, $b < x \odot y$,

ii) Si $x \neq b$ entonces ó $b < x$ ó $b < -x + 2b$.

En efecto:

i) $x \oplus y = x+y-b > b$ si $x,y > b$;

$x \odot y = (xy-bx-by+ab+b^2)/a > b$ si $x,y > b$, ya que

$$\left.\begin{array}{l} x > b \\ y > b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - b > 0 \\ y - b > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-b)(y-b) > 0$$

$$\Rightarrow \quad xy-bx-by+b^2+ab > ab \quad \Rightarrow \quad (xy-bx-by+b^2+ab)/a > b$$

ya que $a > 0$.

ii) $x \neq b \Rightarrow$ ó $b < x$ ó $x < b \Rightarrow$ ó $b < x$ ó $x+b < 2b$

$\Rightarrow$ ó $b < x$ ó $b < -x+2b$.

Si $a < 0$, demostraremos que

i) Si $x, y < b$ entonces $x \oplus y < b$, $x \odot y < b$.

ii) Si $x \neq b$, entonces ó $x < b$ ó $-x + 2b < b$.

En efecto:

i) $x + y = x + y - b < b$ si $x, y < b$.

$x \; y = (xy - bx-by+b^2+ab)/a < b$ si $x,y < b$,

ya que podemos seguir la cadena de desigualdades del caso $a > 0$ excepto que en el último paso se invierte la desigualdad, pues $a < 0$.

ii) Semejante al caso $a > 0$.

8. No es difícil verificar, por último, que cada uno de estos cuerpos es un cuerpo ordenado <u>completo</u>.

9. Después de todo esto es posible que nos quede la sensación de no haber encontrado nada nuevo. Sin embargo, posiblemente, comprenderemos mejor ahora lo que queremos decir con «cuerpo», «isomorfismo» ó aún números reales. Los números reales, sin que pierdan sus características esenciales, los podemos trasladar y alargar ó contaer como un acordeón.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia, S.A.

(Recibido en marzo de 1969)