BOLETIN DE MATEMATICAS.
VOLUMEN IV No. 2
Páginas 31 a 35

SOBRE UN LIMITE EN $L^2(-\infty, +\infty)$

josé m. muñoz quevedo

En esta nota queremos dar otra demostración del siguiente

TEOREMA: Si f es una función contínua de L^2, derivable en casi toda parte de $\mathbb{R}$ y con derivada en L^2, entonces

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$$

Observamos que basta demostrar que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, pues las consideraciones para $x \to -\infty$ son exactamente iguales. Si separamos f en sus partes real e imaginaria, $f = f_1 + i f_2$, se tiene que

$$f' = f_1'(x) + i f_2'(x) \ ; \ \int f\,dx = \int f_1\,dx + i \int f_2\,dx,$$

y además,
$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} |f_1|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}} |f_2|^2\,dx,$$

estando dadas las condiciones de derivabilidad e integrabilidad de f, por las de f_1 y f_2 ([1], Th.9-55, Pg. 231).

Por este motivo, sin perder generalidad, podemos reducirnos al caso en el cual f tiene valores reales; supondremos en adelante que esto sucede.

Sean los conjuntos

$$S_1 = \{ x : |f'(x)| > 1 \}, \qquad S_2 = \{ x : | f'(x) < 1 \}$$

Definimos las siguientes funciones:

$$g_1(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \in S_1 \\ 0 & \text{si } x \in S_2 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in S_1 \\ f'(x) & \text{si } x \in S_2 \end{cases}$$

Es evidente que

$$f'(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

para cualquier x real. En L^2,

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt + k' = \int_0^x g_1(t)\,dt + \int_0^x g_2(t)\,dt + k'$$

como $\int_0^x |g_1(t)|\,dt \leqslant \int_0^x |g_1|^2\,dt \leqslant \int_0^\infty |f'|^2\,dt < +\infty$ (1)

se sigue que $\int_0^\infty |g_1(t)|\,dt$ existe y es finita, luego ([1], Th.14-5 Pg. 432). $\int_0^\infty g_1(t)\,dt$ converge.

En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $a, b > M$ implica $\left|\int_a^b g_1(t)\,dt\right| < \varepsilon$ (2)

Además podemos escribir $f(x)$ en la forma:

$$f(x) = k' + \int_0^\infty g_1(t)\,dt - \int_x^{+\infty} g_1(t)\,dt + \int_0^x g_2(t)\,dt$$

y llamando $-k$ al valor constante

$$k' + \int_0^\infty g_1(t)\,dt,$$

$$f(x) = -k + \int_0^x g_2(t)\,dt - \int_x^{+\infty} g_1(t)\,dt \qquad (3)$$

De las condiciones que cumple f se deduce que

$c = \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\, f(x)$ y $-d = \underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\, f(x)$ son finitos.

Si $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\, f(x) = \inf\limits_{a>0} \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} f(x) = c < 0$, dado $\varepsilon > 0$

existe $a > 0$ tal que

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} f(x) \leqslant c + \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = -\frac{c}{5}$, existirá $a > 0$ tal que para todo x de $[a, +\infty[$, $f(x) \leqslant \frac{4}{5}c > 0$, lo cual implica que en $[a, +\infty[$,

$|f(x)| = -f(x) \geqslant -\frac{4}{5}c > 0$ y en consecuencia,

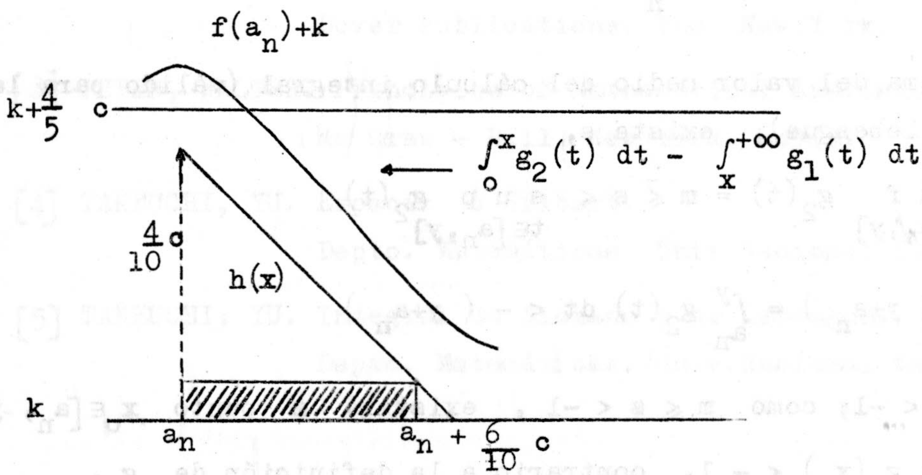
$$\int_a^{+\infty} |f|^2\, dx \geqslant \int_a^{+\infty} \left(\frac{4}{5}c\right) dx,$$ contrario a la hipótesis

de que $f \in L^2$, luego $c \geqslant 0$. Análogamente se concluye que $-d < 0$.

Si $c = 0 = -d$, la demostración queda completa. Probaremos que es imposible tener $c > 0$, pues las mismas consideraciones se deben hacer para demostrar que no es posible tener $d > 0$.

Si $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\, f(x) = c > 0$, se prueba fácilmente que existe una sucesión creciente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que diverge hacia $+\infty$, con $a_{n+1} - a_n > 4c$, todos los a_n mayores que M (el M del cual se deriva (2)) y tales que para todo $n\in\mathbb{N}$, $f(a_n) > \frac{4}{5}c$.

Tomemos en (2) $\varepsilon = \frac{c}{10}$



En el intervalo $[a_n, a_n + \frac{6c}{10}]$ definimos la función

$$h(x) = k + \frac{7}{10}c - (x - a_n)$$

que es un segmento de recta que pasa por el punto de coordenadas $(a_n, k + \frac{7c}{10})$ y tiene pendiente -1.

Como $f(a_n) > \frac{4}{5}c$, por (3) se tiene

$$-\int_{a_n}^{+\infty} g_1(t)\, dt + \int_o^{a_n} g_2(t)\, dt > k + \frac{4}{5}c \qquad (4)$$

Esto significa (vease figura) que <u>h (x) se debe conservar por debajo de</u> $-\int_x^{+\infty} g_1(t)\,dt + \int_0^x g_2(t)\,dt$ en todo el intervalo $[a_n, a_n + \frac{6c}{10}]$, porque existiera un punto $y \in (a_n, a_n + \frac{6c}{10}]$ tal que

$$-\int_y^{+\infty} g_1(t)\,dt + \int_0^y g_2(t)\,dt < k + \frac{7c}{10} - (y - a_n),$$

restando de ésta la desigualdad (4) anterior, **tendríamos :**

$$\int_{a_n}^y g_1(t)\,dt + \int_{a_n}^y g_2(t)\,dt < - \frac{c}{10} - (y - a_n) \qquad (5)$$

Pero según (2) y lo dicho antes,

$$\left| \int_{a_n}^y g_1(t)\,dt \right| < \frac{c}{10}, \text{ luego } - \int_{a_n}^y g_1(t)\,dt < \frac{c}{10} \text{ y sumando}$$

esta desigualdad a (5),

$$\int_{a_n}^y g_2(t)\,dt < - (y - a_n)$$

Por el teorema del valor medio del **cálculo integral (válido para la** integral de Lebesgue), existe s,

$$\inf_{t\in[a_n,y]} g_2(t) = m \leqslant s \leqslant \sup_{t\in[a_n,y]} g_2(t)$$

tal que $s (y+a_n) = \int_{a_n}^y g_2(t)\,dt < - (y+a_n)$

de donde $s < -1$; como $m \leqslant s < -1$, **existirá m punto** $x_o \in [a_n, y]$ tal que $m \leqslant g_2(x_o) < - 1$, **contrario** a la definición de g_2.

En $[a_n, a_n + \frac{6c}{10}]$,

$$f(x) = - \int_x^{+\infty} g_1(t)\,dt + \int_0^x g_2(t)\,dt - k$$

$$\geqslant h(x) - k = \frac{7c}{10} - (x-a_n) \geqslant \frac{c}{10} > 0,$$

.-.

luego $\int_0^{\infty} |f|^2\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_n+\frac{6c}{10}} [f(x)]^2\,dx > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_n+\frac{6c}{10}} \left(\frac{c}{10}\right)^2 dx$

Debido a que la última serie diverge ya que sus sumandos son constantes (valen $\frac{3c^3}{500}$), la integral $\int_0^{\infty} |f|^2\,dx$ diverge, siendo esto una contradicción (pues $f \in L^2$), con lo cual terminamos la demostración.

.-.-.-.

BIBLIOGRAFIA.

[1] APOSTOL, TOM. Mathematical Analysis.
Addison Wesley. Reading, Mass. 1.967.

[2] KESTELMAN, H. Modern Theories of Integration.
Dover Publications. Inc. New York. 1.960.

[3] RUDIN, WALTER. Principles of Mathematical Analisis.
Mc Graw - Hill. New York. L;963.

[4] TAKEUCHI, YU. Espacio de Hilbert.
Depto. Matemáticas. Univ.Nacional de Col. 1.967.

[5] TAKEUCHI, YU. Integral de Riemann y de Lebesgue.
Depto. Matemáticas. Univ.Nacional de Col. 1.966.

.-.