

LOGICA Y MATEMATICA

JEAN DIEUDONNÉ *

El descubrimiento de la Lógica es sin duda uno de los más notables de los que se deben a los Griegos; que sea posible, por un encadenamiento apropiado de proposiciones, poner en evidencia verdades no inmediatamente perceptibles, es un hecho que parece haber escapado a las civilizaciones anteriores a la griega, y, por otra parte, se sabe en qué maravilloso instrumento de análisis debía convertirse la Lógica en manos de estos últimos. La Matemática griega, en sus comienzos, no es más que uno, entre muchos otros, de los dominios en que se aplica con éxito la Lógica; pero ella debía mostrarse pronto como un campo particularmente privilegiado. En efecto, el razonamiento lógico no tiene fuerza sino cuando se aplica a nociones desprovistas de toda ambigüedad; desde el momento en que el sentido de una palabra está sujeto a controversia, la construcción silogística se derrumba por falta de base, y los mismos griegos no tardaron en advertir ese peligro y en inventar una impresionante colección de sofismas que muestran hasta qué punto el uso correcto de la Lógica debe rodearse de precauciones. Ahora bien, la Matemática aparece

* Conferencia dada en la Universidad de los Andes, el día 15 de octubre de 1952. Traducida por Luis Ignacio Soriano y Henri Yerly y publicado originalmente en la "Revista de Matemáticas Elementales" Vol. II, Fasc. 1 pp. 1-7.

como uno de los pocos dominios donde la aplicación de la Lógica escapa a esos peligros; la causa reside visiblemente en el hecho de que las nociones primitivas son en ella muy poco numerosas y que es posible enunciar con precisión las premisas que intervienen. No quiere decir, por otra parte, que esas nociones (por lo menos a partir de Euclides) no sean ya muy abstractas: "puntos sin extensión" o "líneas sin espesor" son bastante difíciles de concebir claramente; pero como allí se trata, evidentemente, de una idealización, de una especie de "paso al límite" a partir de objetos de la experiencia corriente, no es extraño que, durante un tiempo muy largo, ninguna duda se haya presentado en cuanto a ellas.

Las verdades matemáticas han sido colocadas durante muchos siglos (y lo son aún por el común de las gentes) entre las verdades absolutas; las premisas ("axiomas" o "postulados" en Euclides) son consideradas como verdaderas de manera "evidente", es decir que parecen inseparables del concepto que uno tiene de los objetos que en ellas figuran; sentado esto, la Lógica puede aplicarse sin trabas, y las articulaciones del razonamiento son tan perfectas que ya no parece posible negarse a aceptar los innumerables teoremas que el matemático logra deducir de sus datos iniciales.

Las primeras dificultades surgieron con la invención de la geometría no-euclídea al comienzo del siglo XIX. Se sabe que los repetidos fracasos en las tentativas de demostración del postulado de las paralelas llevaron finalmente a reconocer que este postulado no podía ser consecuencia lógica de los otros, y que, negándolo desde un principio, se llegaba sin embargo a una

geometría tan coherente como la clásica geometría "euclídea", si bien totalmente diferente de ésta. Como no podía tratarse de escoger entre las dos geometrías apelando a la experiencia, en vista del carácter "ideal" de las nociones básicas, era forzoso admitir que ellas deben colocarse en pie de igualdad, y ser consideradas como valederas ambas. Pero eso equivalía de hecho a admitir que no tenemos ninguna idea clara de los "objetos ideales" del geometra: puntos, rectas y planos; pues si se tratara verdaderamente de "nociones primitivas", sin ambigüedad alguna, e inmediatamente accesibles a la intuición, debería ser posible decidir en seguida si el postulado de las paralelas se verifica o no. Es necesario considerar por el contrario (aún cuando la "intuición" espacial no pueda informarnos sobre este hecho) que hay dos clases de objetos geométricos: los puntos, rectas y planos euclídeos, y los puntos, rectas y planos noeuclídeos. Además esta "multiplicación de las nociones primitivas" no se limita a este caso, pues pronto se vió que era posible negar o modificar los otros axiomas de Euclides de muchas maneras, y que ninguna razón permitía tampoco excluir esas nuevas "geometrías"; un examen crítico análogo de las otras teorías matemáticas conducía también a las mismas conclusiones, y desde el fin del siglo XIX empezó a dominar la concepción de las Matemáticas llamada "axiomática". Esta concepción difiere de las ideas clásicas en que los "objetos" de los cuales se ocupa una teoría no tienen conexión con "intuición" alguna; su "existencia" no se afirma sino para poderles atribuir las propiedades que constituyen las premisas de la teoría, y que conservan el nombre de "axiomas" de ésta; pero éstos no tienen tampoco vínculo con la experiencia sensible, y pueden escogerse casi arbitrariamente*. Esto implica, claro está, que no podría ser cuestión de calificar de

* Eso no quiere decir que todas las teorías elaboradas de ese modo sean igualmente "interesantes". No trataremos de analizar aquí lo que un matemático denomina así; basta decir que se trata, claro está, de una noción enteramente subjetiva, muy cercana a la de "gusto" en estética, pero sobre la cual los mejores espíritus de una misma época están raramente en desacuerdo.

“verdades absolutas” los axiomas de una teoría, ni las consecuencias lógicas que de ellos se deducen; lo que permanece fuera de duda y continúa forzando el asentimiento del lector*, es el encadenamiento de las demostraciones según las reglas de la Lógica. Casi puede decirse que las matemáticas así concebidas son Lógica en el estado puro, puesto que esta última (al contrario de las otras aplicaciones que de ella pueden hacerse) no se aplica aquí sino a nociones que han perdido todo contacto con la “realidad”.

Así parece a plena luz el hecho fundamental ya entrevisto por Pascal en su célebre fórmula: “substituir siempre a lo definido su definición”, poco importa la “naturaleza” de los objetos de que se ocupa el matemático; únicamente intervienen en una teoría aquellas de sus propiedades que están formuladas en los axiomas de la teoría, con exclusión de cualquiera otra información que pudiera tenerse sobre estos objetos; es en este sentido como Poincaré podía decir que los axiomas de una teoría no son más que una “definición disfrazada” de los objetos de que se ocupa. Otros desarrollos de la Matemática del siglo XIX venían por su lado a apoyar esta concepción. Se conoce por ejemplo el largo trabajo de unificación de las Matemáticas clásicas que, “conectando” unas a otras las diversas teorías que en ella figuran, permite finalmente considerarlas todas como capítulos de la teoría de los enteros, o aún de la teoría de los conjuntos. Así por ejemplo los números reales pueden “definirse” partiendo de los números racionales. Pero se sabe que esta “reducción” puede efectuarse de diferentes maneras: en el método de Dedekind, los números reales se asimilan a cortaduras en el conjunto

* Al menos la mayoría de los matemáticos; ver infra, pág. 3

de los racionales, mientras que en el método de Cantor-Weierstrass-Méray, son asimilados a clases de sucesiones de Cauchy equivalentes en el conjunto de los racionales; se podría también, como lo indicó Hilbert, conectar los números reales a la Geometría (definida de manera autónoma por sus axiomas), asimilando ahora los números reales a los puntos de una recta (lo que es, por otra parte, la concepción que se acerca más a la noción clásica del número real). Los objetos que así se definen son completamente diferentes en los tres casos; si se pueden, sin embargo, "asimilar" todos a números reales, es por lo que verifican en cada caso los axiomas fundamentales de la teoría de los números reales* cuando se hace esta "asimilación", se desprecian sistemáticamente las otras propiedades que puedan poseer los objetos así considerados (por ejemplo, para una clase de sucesiones de Cauchy de números racionales, la propiedad de ser un conjunto que tiene la potencia del continuo).

Al lado de los objetos matemáticos tradicionales -figuras geométricas, números o funciones- surgía pues una multitud de "objetos" de tipo nuevo siendo en algún sentido cada tipo de objetos el soporte de un haz característico de propiedades (a menudo muy "patológicas" en comparación con las propiedades de los objetos matemáticos clásicos). Se concibe que espíritus tradicionalistas hayan mostrado alguna reticencia frente a esa posibilidad de "creación" mental sin freno, ni límite, y hayan emitido dudas sobre la posibilidad de aplicar a tales objetos "abstractos" (por oposición a los objetos matemáticos clásicos, calificados de "concretos" para el caso) los modos usuales de razonamiento lógico, y sobre todo las afirmaciones de "existencia"; aún en nuestros días, subsiste una pequeña minoría de matemáticos que rehusan

* Con esto entendemos las propiedades de estos números que bastan para desarrollar todo el Análisis clásico, y que se pueden resumir así: los números reales forman un cuerpo ordenado, arquimediano y completo.

admitir toda noción matemática que no repose sobre la "intuición"*.

Por otra parte sucedió que las controversias sobre este punto coincidieron con una crisis que amenazó herir la Lógica misma y su aplicación a las matemáticas. Como conclusión de estudios profundos llevados a cabo durante todo el siglo XIX sobre la Lógica matemática, esta crisis provino de comprobar que en muchos aspectos el lenguaje de los matemáticos, considerado hasta entonces como un paradigma de claridad y precisión, no estaba, sin embargo, lo mismo que no lo está el lenguaje ordinario, al abrigo de los sofismas, y eso, aún en los casos en que se trate de objetos del tipo más clásico, como los enteros naturales. Tomemos como ejemplo el silogismo siguiente: 216 se compone de tres cifras; es así que $216 = 6^3$; luego 6^3 se compone de tres cifras; se ve inmediatamente que el sofisma proviene de que las palabras "se compone de" no están definidas de manera precisa en las frases anteriores. Pero he aquí un raciocinio mucho más inquietante (la "paradoja de Richard"): el número entero definido por la propiedad de ser "el menor número entero que no pueda ser definido por medio de una frase de menos de cien palabras castellanas" tiene propiedades contradictorias, ya que la frase entre comillas, que lo define, consta de menos de cien palabras. Todo matemático que tenga alguna experiencia objetará inmediatamente que este género de definición "no predicativa", en la que entra en juego la estructura gramatical de las frases que se utilizan, no se encuentra nunca en los problemas que tratan efectivamente los matemáticos. Esta objeción es cierta-

* Los mismos "intuicionistas" rehusan también admitir ciertas reglas de la Lógica tradicional, como el principio del tercero excluido o la regla de la doble negación; lo que los lleva a rechazar, no sólo todas las matemáticas "axiomáticas", sino también una gran parte del Análisis clásico.

mente válida en cuanto al fondo; pero la existencia de paradojas como la anterior muestra que, para hacer inatacable una definición, es menester determinar con más precisión los problemas que el matemático puede estudiar legítimamente, y los modos de razonamiento que tiene el derecho de emplear para resolverlos.

Si uno emprende esa labor, rápidamente se da cuenta de que el empleo del lenguaje común, con sus sinónimos, sus dobles sentidos, sus ambigüedades y sus matices, es muy incómodo y abre la puerta a todos los sofismas. Esto ha conducido a crear en su totalidad una lengua artificial, destinada únicamente a transcribir los raciocinios matemáticos, y concebida de manera tal que 1º todos los textos matemáticos actualmente considerados como válidos puedan transcribirse en este lenguaje; 2º, no parezca posible transcribir en él raciocinios "paradójicos" y sin relación con la experiencia común de los matemáticos. Hecho esto, se puede sentar como criterio que los únicos razonamientos matemáticos que se reconocerán como valederos serán los que se pueden transcribir en la lengua elegida. Se objetará que hay una buena parte de arbitrariedad en tal criterio; pero si se quiere salvar la matemática actual sin dar cabida a sofismas, no parece posible proceder de otro modo. Además, si los matemáticos reconocieren algún día la necesidad de introducir nuevos modos de razonamiento que no parezcan susceptibles de conducir a paradojas, sería siempre posible modificar la lengua en cuestión de tal manera que en ella puedan transcribirse estos nuevos raciocinios, con seguridad sin cambiar seriamente los principios de ese lenguaje.

Esos principios son comunes a todos los idiomas artificiales -llamados también "lenguas formalizadas"- que se han propuesto para las matemáticas.

Nada, en su descripción o en su empleo, debe dejar subsistir la menor ambigüedad. Se principia con la enumeración de los signos de que está formado el lenguaje : algunos (en general letras de un alfabeto dado, acaso afectadas de acentos o de índices) se destinan a representar los objetos matemáticos de las teorías que en ellas se quieren transcribir; otros (por ejemplo: $=$, ϵ) representan las relaciones entre estos objetos; finalmente otros representan los vínculos lógicos entre las diversas proposiciones (por ejemplo: \neg para la negación, $\&$ para la conjunción, \vee para la disyunción, etc.). Luego se determinan qué fórmulas formadas con esos signos serán considerados como válidas, o "bien formadas"; esto se hace por medio de "reglas de formación" tales que pueda verificarse, por un examen metódico y casi mecánico, si una fórmula dada fue formada conforme a esas reglas. Vienen para terminar las "reglas de deducción" que esencialmente corresponden a las reglas de la Lógica y que permiten decir que ciertos conjuntos corresponden a proposiciones verdaderas en la teoría matemática de que se trata; una demostración es pues una sucesión de fórmulas "bien formadas", que representan proposiciones verdaderas, en la cual el paso de una de éstas fórmulas a la siguiente debe siempre efectuarse conforme a las reglas de deducción; comprobar que en cada paso estas reglas han sido bien observadas, es en principio una operación puramente experimental, lo mismo que verificar por ejemplo que una partida de ajedrez se ha desarrollado conforme a las reglas del juego.

Desgraciadamente la comparación con un juego como el ajedrez es bastante falaz, porque no hay medida común entre las combinaciones de las piezas de ese juego y las estructuras infinitamente más variadas y más complejas que transcriben las relaciones matemáticas. Todas las lenguas formaliza-

das que han sido propuestas son de hecho impracticables por una u otra de las siguientes razones : o bien contienen un gran número de signos, y las reglas que rigen el empleo de esos signos son tan complejas y numerosas que es prácticamente imposible comprobar que son bien respetadas; o bien no hay más que un pequeño número de signos y de reglas, pero cada una de las estructuras que transcribe una relación matemática consta de tal cantidad de signos que sólo es posible escribir algunos. En la práctica, los matemáticos están pues obligados a utilizar lenguajes incompletamente formalizados, en los que signos de abreviación bien escogidos hacen las fórmulas suficientemente legibles y cortas para ser manejables; el uso de esos signos no se rige por una sintaxis completa y explícitamente formulada, sino que se aprende más bien por experiencia y se acompaña de numerosos "abusos de lenguaje" voluntariamente cometidos con el objeto de hacer la exposición más sencilla y más comprensible. Sólo el matemático es el juez de la mayor o menor libertad que puede tomarse en el manejo de estos lenguajes, y por consiguiente hay "estilos" matemáticos que varían de un autor a otro; pero debe cuidarse de no pasar el punto a partir del cual la posibilidad de transcribir sus raciocinios en un lenguaje estrictamente formalizado se haría dudoso. Grosso modo, puede decirse que cada vez que surge una controversia sobre la validez de un raciocinio o el rigor de una demostración, es porque su autor se ha dejado llevar a una escritura demasiado vaga para que los otros matemáticos puedan reconocer en ella, sin ambigüedad, tipos de proposiciones de los cuales por experiencia saben que son susceptibles de traducción en un lenguaje formalizado; cuando esto ocurre, la discusión que se origina acaba siempre, después de un tiempo más o menos largo (cuando no se cometió ningún error), en una nueva redacción en un estilo suficientemente ajustado para que todo matemático experimentado no tenga ninguna duda sobre la equivalencia de esta demos-

tración con otra escrita enteramente en un lenguaje formalizado (aunque esta última sea siempre prácticamente irrealizable).

Se podrá presentar que ese estado de cosas es todavía muy imperfecto, sin duda es susceptible de mejora, pero, a no ser que se quiera eliminar de la matemática la mayor parte de los inmensos progresos que ha realizado desde hace un siglo, nada de lo propuesto hasta ahora es satisfactorio. Hay que resignarse a admitir que las nociones de absoluto y de perfección son y permanecerán sin duda para siempre en el estado de sueños irrealizables para los cerebros humanos; ciertamente es mejor reconocerlo con honradez y trabajar con éxito en los límites impuestos por nuestra naturaleza, que perseguir quimeras eternamente. Por más que el resultado final parezca traer una desilusión, por lo menos el gran trabajo de esclarecimiento de la Matemática que se prosigue sin flaquear desde hace más de un siglo nos habrá enseñado, sobre el mecanismo del pensamiento lógico y su aplicación a las nociones matemáticas, muchas cosas que ignoraban nuestros antecesores; y, a pesar de las apariencias, de su aspecto abstracto y más alejado que nunca de la realidad sensible, se puede decir sin vacilación que jamás la Matemática ha merecido mejor que hoy su nombre de ciencia exacta.