Boletín de Matemáticas
Vol. VI, Nº 1, pp. 23 - 42

LAS NOCIONES MATEMATICAS , I

ALONSO TAKAHASHI

INTRODUCCION

> *La Matemática es una ciencia inútil. Entiendo por ello que no puede servir directamente para la explotación de nuestros semejantes, ni para su exterminación.*
>
> G. H. Hardy

Empezando en la segunda mitad del siglo pasado ha ido delineándose en forma cada vez más acentuada un enfoque muy especial de la Matemática.

La atención empieza a desviarse progresivamente del estudio de elementos (números, puntos, etc.) definidos o construidos aisladamente y en su lugar, y empleando procedimientos que evocan inmediatamente los métodos de investigación experimental, trátase de disociar los principales ingredientes presentes en varias teorías importantes, clasificándolos y analizándolos desde puntos de vista más o menos globales buscando siempre leyes generales aplicables a grandes familias de entes. Una vez que los diversos constituyentes han sido aislados y analizados, se recombinan en forma metódica para producir sistemas más complejos cuya "estructura" es entonces más accesible al estudio organizado.

Para tener una idea aproximada de éste nuevo enfoque de la antes llamada "Ciencia de la Magnitud y la Cantidad" es necesario precisar ciertas nociones como las de "Sistema axiomático", "Teoría formal", "Estructura (matemática)", alrededor de las cuales giran las actuales técnicas de fundamentación, exposición e investigación matemática.

Lo que podríamos llamar la "Matemática activa", es decir, la matemática en vías de desarrollo, de investigación, tiene un esqueleto constituído por ciertas "estructuras madres" entre las cuales las más individualizadas son :

a) Las *estructuras algebraicas*, cuya noción básica es la de *operación* o *ley de composición* (ejemplos : adición, multiplicación). En cierto sentido, las estructuras algebraicas tienen un carácter *finito* : se suman o se multiplican dos (o a lo más un número finito de) números.

b) Las *estructuras ordinales* que estudian sistemas en los cuales la noción esencial es la de *precedencia* (antes y después, menor y mayor). Estas relaciones, a pesar de su aparente trivialidad, han demostrado ser esenciales en el edificio matemático.

c) Las *estructuras topológicas* en las cuales se analiza la noción de *proximidad* (en grado "infinitesimal") lográndose así precisar los importantes conceptos de *límite* y de función (o transformación) *continua*.

La noción de *estructura*, cuyo sentido riguroso aclararemos posteriormente, se formula en términos de *conjuntos* o *clases*. Estos no son otra cosa que los *objetos matemáticos*, es decir, las cosas que los matemáticos estudian. Entre estos objetos se destacan las llamadas *relaciones* y en especial las *funciones* y las *equivalencias*. En términos generales puede afirmarse que la investigación matemática consiste en buscar (demostrar) propiedades de estos objetos matemáticos.

Durante el último cuarto de siglo, y teniendo su origen en la aplicación de técnicas algebraicas en topología, se empezaron a considerar no solamente transformaciones entre sistemas individuales análogos sino también entre amplias colecciones de dichos sistemas a la vez que se analizaba la estructura algebraica de estos nuevos superobjetos. Surgen así las llamadas *categorías* cuyo lenguaje y método proporciona unidad en campos antes considerados esencialmente disímiles.

Por último, y con el objeto de fundamentar las teorías matemáticas y en particular la Teoría de Conjuntos, se introduce la noción de *teoría (o sistema) formal* en cuyo seno puede precisarse la idea de *objeto*, de *condición* y de afirmación *verdadera*. Estos estudios, que combinan la lógica con métodos de tipo algebraico, constituyen la *metamatemática*.

En esta serie de artículos, de carácter primordialmente divulgativo, intentatemos presentar en forma sencilla algunas ideas sobre los temas antes mencionados. Específicamente, incluiremos las secciones siguientes : (1) George Cantor (la Teoría de Conjuntos) (2) Paradojas (la crisis de los Fundamentos) ; (3) La Tesis Logicista; (4) La Tesis Intuicionista; (5) Giusseppe

Peano (la Axiomática); (6) David Hilbert (el Formalismo); (7) Nicolás Bourbaki (las Estructuras); (8) La Lógica Formal; (9) La Metamatemática; (10) Clases y conjuntos; (11) La función lógica τ; (12) Las Estructuras Fundamentales; (13) Categorías; (14) Naturaleza de las nociones; (15) El Infinito.

1. GEORGE CANTOR

(*La Teoría de Conjuntos*)

Conjuntos.

En el desarrollo de la Matemática se han distinguido tradicionalmente dos tendencias que aunque a veces parecen oponerse siempre se complementan. La primera, apoyándose simultáneamente en el aparato teórico y en la intuición constructiva, trata audazmente de descubrir (¿ o crear ?) nuevos campos de investigación y de lograr en los antiguos cada vez más resultados sin preocuparse demasiado por los fundamentos, por los cimientos podríamos decir, de su edificio. La segunda, por el contrario, se ocupa esencialmente de sentar bases firmes para las construcciones y de justificar los procedimientos empleados por la primera.

Con el objeto de lograr la ansiada *consistencia* de la Matemática se ha tratado siempre de edificarla sobre sistemas lo suficientemente simples para que su legitimidad ofrezca el mínimo de dudas. Es así como para fundamentar el *Análisis* (cálculo infinitesimal, teoría de funciones) se ha recurrido tradicionalmente a los números *naturales* 0, 1, 2, ... ó a los enteros ..., -2, 1, 0, 1, 2, ... (de los cuales decía Kronecker que eran obra de Dios mientras que todas las otras entidades matemáticas eran obra de los hombres); análogamente, la Geometría se ha construido con base en sus nociones más simples, *punto* y *recta* .

A principios de éste siglo se creyó haber hallado la base más adecuada para toda la Matemática en la llamada Teoría (" intuitiva" decimos hoy) de Conjuntos introducida por G. Cantor, matemático judío nacido en San Petesburgo (1845 - 1918) .

Los orígenes de ésta teoría pueden precisamente localizarse en los esfuerzos llevados a cabo para aclarar los fundamentos del Análisis : clasificación de los conceptos de *número racional, número real, límite y continuidad* (conceptos " infinitesimales") cuyos extraordinarios resultados se conocen globalmente como " la aritmetización del Análisis" . En ésta labor se destacaron especialmente Weierstrass (1815 - 1892), Dedekind (1831 - 1916) y el mismo Cantor. Se logró entonces formular una definición adecuada del conjunto de los números reales *(la recta real)* en términos de números racionales , los cuales a su vez se redujeron al concepto de número entero, de tal manera que hacia el año de 1900 Poincaré podía decir con justa razón : *Hoy quedan en el Análisis solamente enteros o sistemas finitos o infinitos de enteros interconectados por una red de relaciones de igualdad y desigualdad* .

En efecto, para definir un *número real* se consideraba un cierto conjunto de números racionales, es decir, la colección de todos los racionales que satisfacían ciertas relaciones de desigualdad y dicho conjunto era entonces mirado como un nuevo objeto (*cortadura*), pasando luego a considerar la colección formada por todos los entes así definidos como un nuevo objeto, a saber, la recta real. El paso hacia la consideración de colecciones de objetos cualesquiera era entonces inminente. Y así llega Cantor a enunciar su "definición" (sería mejor decir *descripción*) de "conjunto": *Por un "conjunto" entendemos cualquier colección M de objetos bien determinados m de nuestra percepción o de nuestro pensamiento (los cuales son los "elementos" de M), considerada como un todo.*

De acuerdo con esta descripción, una manera natural de formar conjuntos consiste en pasar de una *propiedad* o *condición* P a su *extensión*, es decir, a la colección formada por todos aquellos entes que satisfacen la condición P. Así, por ejemplo, si P es la condición en n: "n es un número natural menor que 15 y divisible por 4", su extensión es el conjunto A cuyos elementos son 0, 4, 8 y 12 el cual acostumbra denotarse en la forma $\{0, 4, 8, 12\}$, es decir, $A = \{0, 4, 8, 12\}$. Para indicar que, por ejemplo, 4 *es* un elemento de A se escribe $4 \varepsilon A$. En la actualidad la letra griega ε se ha deformado produciendo el sigo $\in$ cuyo uso se limita exclusivamente a esta situación. $a \in A$ (a es un elemento de A). Para indicar que a *no* es un elemento de A se escribe $a \notin A$.

Si P es un a condición cualquiera y a es un objeto, se escribe $P(a)$ en lugar de "a satisface la condición P". Si A es la extensión de P entonces A es precisamente el conjunto formado por todos los objetos a tales que $P(a)$, el cual se denota $\{a: P(a)\}$. Es decir $A = \{a: P(a)\}$.

Es claro que en lugar de a puede usarse x, u, $\square$, etc.:
$A = \{ a : P(a) \} = \{ x : P(x) \} = \ldots$ Tenemos entonces que $a \subset A$ si y solo si $P(a)$. Puede decirse que A es la *realización objetiva* de la *propiedad* P; naturalmente esta propiedad o condición P puede referirse a objetos que *no* son números y por lo tanto los elementos de A pueden ser de naturaleza diversa. Por ejemplo, si a representa un objeto cualquiera (pero bien determinado) entonces $\{ x : x = a \}$ es un conjunto con un solo elemento, a saber a; este conjunto se dice *unitario* y se denota $\{a\}$. Análogamente $\{ x : x = a : x = b \} = \{ a, b \}$. Nótese que si $a = b$ entonces $\{ a, b \} = \{ a \}$. Mencionemos por último que si P es una condición contradictoria, por ejemplo "el objeto a no es el objeto a" entonces la extensión de P no puede contener objeto alguno, luego, *si* deseamos que la extensión de una condición sea siempre un *conjunto*, debemos admitir la existencia de un conjunto *sin* elementos (!). Este conjunto se designa ϕ. Por ejemplo, $\{ x : x \neq x \} = \phi$.

Era entonces muy natural admitir el siguiente principio general : " Para cada condición P *existe* un único conjunto A cuyos elementos son precisamente aquellos objetos que satisfacen la condición P". Sinembargo, este principio de apariencia tan inocente encubría al *Monstruo de la Contradicción*, según lo demostró más tarde y en forma contundente el filósofo y matemático inglés Bertrand Russell, entre otros.

Equipotencia.

Con base en la noción de *conjunto* puede iniciarse un análisis del concepto de *número* (natural) y al mismo tiempo generalizarlo. Consideremos una situación intuitiva : Supongamos que un pastor llega a un bosque y decide atar sus ovejas a los árboles logrando que cada oveja quede atada a un árbol (y a uno solo) y que recíprocamente a cada árbol quede atada una oveja (y sólo una), sin que sobren árboles ni ovejas. Decimos entonces que entre el rebaño y el bosque se ha establecido una *correspondencia biunívoca*. En ésta situación el pastor, aún suponiendo que no supiese *contar*, podría afirmar que *hay tantas ovejas como árboles* o, en forma más sofisticada (?), que el *número* de ovejas es igual al *número* de *árboles*. En otras palabras, el *número* (de elementos) de un conjunto A no es otra cosa que aquella *propiedad* que A tiene en común con todos los conjuntos X que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con A.

Precisemos un poco : Una correspondencia como la anterior, y que técnicamente recibe el nombre de *función* o *aplicación*, es una regla (llamémosla f) que determina para cada oveja a el árbol b al cual debe "aplicarse" (atarse). Si a éste árbol b, al cual se aplica o se ata a, le colocamos la etiqueta $f(a)$ tenemos que f le asigna a cada elemento a de A un elemento $f(a)$ de B, y uno sólo. Esta correspondencia tiene dos propiedades adicionales: (1) a cada árbol no se ata más de una oveja, es decir, si $a \neq a'$ entonces $f(a) \neq f(a')$ y (2) todo árbol tiene una oveja atada a él, es decir, para todo b de B existe una a de A tal que $f(a) = b$. La primera propiedad la expresamos diciendo que f es *uno-a-uno* (o *inyectiva*) y la segunda diciendo que f aplica A sobre B (o que f es *sobreyectiva*). Cuando f establece una correspondencia biunívoca entre A y B, es decir, cuando f es a la vez inyectiva y sobreyectiva, decimos que es *biyectiva* (o que es una *biyección*).

Si A y B representan conjuntos o colecciones de objetos cualesquiera y existe una biyección de A sobre B diremos que A y B son *equipotentes* ($A \varepsilon_p B$) o que *tienen el mismo cardinal* ($Card\ A = Card\ B$) nótese que *no* hemos dado significado alguno a los símbolos $Card\ A$, $Card\ B$ sino a la expresión $Card\ A = Card\ B$. Sin embargo en el caso concreto antes considerado, la relación $A \varepsilon_p B$ (ó lo que es equivalente $Card\ A = Card\ B$) indica que A y B tienen el mismo número de elementos, luego, *en este caso* podríamos interpretar $Card\ A$ como el *número* de elementos de A y similarmente para B. En consecuencia la relación *tener el mismo cardinal* generaliza a *tener el mismo número de elementos* y el concepto de *cardinal* generaliza al de *número (natural)* : cuando X es un conjunto "finito" (vale decir *concreto*) el símbolo $Card\ X$ puede interpretarse como el número de elementos de X. Cuando X no es finito $Card\ X$ es un número generalizado : decimos que es un *número transfinito*. Llegamos así a plantearnos la posibilidad de desarrollar una *Aritmética Transfinita* que estudie éstos nuevos "números". Esta teoría fue uno de los mayores éxitos logrados por Cantor y según Hilbert *la más maravillosa floración del espíritu matemático y, sin duda, una de las más altas aportaciones de la serena y pura actividad de la inteligencia humana*. Es necesario declarar explícitamente que al considerar conjuntos no finitos ("infinitos") se está aceptando la existencia de entes de naturaleza esencialmente diferente a las colecciones de objetos presentes en el universo físico y sobre las cuales se ha modelado nuestra intuición. De allí la grandiosidad de una teoría que provee reglas precisas para manipular estos nuevos objetos supra naturales.

La aplicación de éstos conceptos a conjuntos no finitos está plagada de hechos sorprendentes. Por ejemplo si $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y C el conjunto de sus cuadrados :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\mathbb{N} & : & 0 & , & 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 & , & 7 & , & \ldots \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
C & : & 0 & , & 1 & , & 4 & , & 9 & , & 16 & , & 25 & , & 36 & , & 49 & , & \ldots
\end{array}$$

entonces puede definirse una aplicación $f : \mathbb{N} \to C$ como sigue : $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ y en general $f(n) = n^2$. Esta aplicación es claramente biyectiva, luego $Card\ \mathbb{N} = Card\ C$, intuitivamente : $\mathbb{N}$ y C tienen el mismo " número" de elementos, lo cual contradice frontalmente el "axioma" : *el todo es mayor que cada una de sus partes.* En efecto, al conjunto $\mathbb{N}$ le hemos quitado una infinidad de elementos, a saber, aquellos que no son cuadrados, y sin embargo el resultado C tiene aún el mismo "número de elementos " del conjunto original $\mathbb{N}$. Este hecho, ya conocido por Galileo ("paradoja" de Galileo, 1638), ha sido presentado en forma más familiar por Russell :"Tristram Shandy invirtió dos años para hacer la crónica de los dos primeros días de su vida, y se lamentaba de que a ése ritmo el material se acumularía más rápidamente de lo que él era capaz de elaborarlo, de suerte que con el paso de los años cada vez estaría más lejos del final de su relato. Ahora bien, yo sostengo que si él hubiese vivido eternamente sin sentirse cansado de su trabajo, entonces, aún en el caso de que su vida hubiese estado tan repleta de acontecimientos como cuando comenzó, ninguna parte de su biografía habría quedado sin escribirse. En efecto :el día centésimo será escrito en el año centésimo, el día milésimo en el año milésimo, y así sucesivamente. Cualquier día que elijamos, tan lejano que se pierdan las esperanzas de llegar a él, ese día será escrito en el año correspondiente,Así,, cualquier día que pueda mencionarse será escrito más tarde o más temprano, y, por ende, ninguna parte de la biografía quedará · permanentemente por escribir. Esta proposición paradójica, pero perfectamente verdadera, depende del hecho de que el número de días de todo el tiempo no es mayor que el número de años".

Además de la noción de igualdad puede también introducirse la de *orden*: Decimos que el cardinal de A es *menor o igual* que el cardinal de B ($Card\ A \leq Card\ B$) si A es equipotente con una parte de B. Además, si $Card\ A \leq Card\ B$ pero $Card\ A \neq Card\ B$ decimos que $Card\ A$ es *estrictamente menor* que $Card\ B$ ($Card\ A < Card\ B$).

Conjuntos numerables.

Si un conjunto es equipotente con $\mathbb{N}$ ($=\{0, 1, 2, \ldots\}$) se dice que es ***numerable*** o, con más precisión, ***infinito numerable***. Así, por ejemplo, el conjunto $C = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$ de los cuadrados de los números naturales y el conjunto $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ de todos los *enteros* son numerables. En general, un conjunto A es numerable si sus elementos pueden disponerse en una *lista* (infinita):

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

en la cual cada elemento va seguido de otro bien determinado (y además en la lista aparecen *todos* los elementos de A).

También los elementos de un conjunto finito pueden disponerse en una lista (finita, en este caso) y así los conjuntos finitos y los infinitos numerables tienen esta propiedad en común y los llamaremos genéricamente conjuntos *contables*, advirtiendo que esta terminología no es estándar. Así pues, cuando afirmamos que A es contable queremos decir que o bien A es finito o bien A es (infinito) numerable. Luego, si un conjunto es contable pero no es finito, entonces debe ser (infinito) numerable. Es claro que una parte (subconjunto) de un conjunto contable es contable.

Sin embargo, en muchos casos no es fácil decidir inmediatamente si un conjunto dado es contable o no, de tal manera que es conveniente tener algunos criterios a este respecto. Describiremos el más útil: supongamos dada una colección contable $A_1, A_2, \ldots$ de conjuntos contables

$$A_1 = \{ a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, \ldots \}$$

$$A_2 = \{ a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, \ldots \}$$

$$A_3 = \{ a_1^3, a_2^3, a_3^3, a_4^3, \ldots \}, \text{ etc.}$$

y sea A la *unión* de los A_i, es decir, el conjunto obtenido al reunir los elementos de todos estos conjuntos en una sola colección de tal manera que A queda formado por aquellos objetos que están en *alguno* de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ ¿Es A todavía contable? La respuesta es afirmativa y para demostrarlo usaremos uno de los llamados "métodos diagonales": Es claro que en el siguiente "cuadrado infinito" aparecen todos los elementos de A (eventualmente repetidos):

$$\begin{array}{cccc}
a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\
a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\
a_1^3 & a_3^3 & a_3^3 & a_4^3 \\
a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4
\end{array}$$

Ahora bien siguiendo el camino diagonal señalado por las flechas todos estos elementos pueden disponerse en una sola lista a saber

$$a_1^1 \quad a_1^2 \quad a_2^1 \quad a_3^1 \quad a_2^2 \quad a_1^3 \quad a_1^4$$

probándose así que A es contable

Veamos una aplicación de éste principio Sea A_1 el conjunto de todos los números racionales positivos cuyo numerador es 1 A_2 el de aquellos cuyo numerador es 2 etc Es decir

$$A_1 = \{ \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \qquad \}$$

$$A_2 = \{ \frac{2}{1} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{4} \qquad \} \quad etc$$

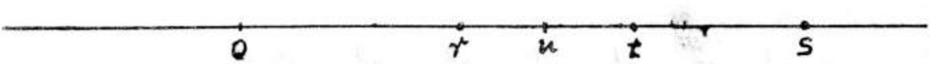
Es claro que la unión de los conjuntos A_1 A_2 es precisamente el conjunto Q de todos los racionales positivos el cual es en consecuencia numerable

$$Q^{+} = \{ r_1 , r_2 , r_3 , r_4 , \ldots \}$$

En consecuencia, la totalidad de los números racionales aparece en la lista

$$0 , r_1 , r_1 , r_2 , r_2 , r_3 , \ldots$$

luego el conjunto Q de todos los números racionales es enumerable. Este hecho, no es en modo alguno evidente; por el contrario, si disponemos los números sobre una recta en la forma usual :



observamos que los naturales son "muy escasos" en relación con los racionales. Aún más, dados dos racionales r y s (por ejemplo $r < s$), el racional $t = \frac{1}{2}(r + s)$ está entre r y s : $r < t < s$. Similarmente, hay otro racional u entre r y s, otro entre t y u, etc. En otras palabras, entre r y s hay infinitos racionales. ¡ Y sin embargo no hay más números racionales que naturales !

Supongamos ahora que A es un alfabeto contable, es decir, una colección contable de signos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, y veamos que entonces el conjunto P de todas las "palabras" (finitas) que pueden escribirse con este alfabeto es numerable. Llamemos P_n el conjunto de todas las palabras de n letras, de tal manera que P es justamente la unión de las P_n. Basta entonces, de acuerdo con nuestro principio, demostrar que cada P_n es numerable. Esto es evidente para P_1 pues éste es prácticamente el mismo A. En cuanto a A_2, sus elementos pueden disponerse en la forma

$$
\begin{array}{cccc}
\alpha_1\alpha_1 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 & \cdots \\
\alpha_2\alpha_1 & \alpha_2\alpha_2 & \alpha_2\alpha_3 & \cdots \\
\alpha_3\alpha_1 & \alpha_3\alpha_2 & \alpha_3\alpha_3 & \cdots \\
\hdashline
\end{array}
$$

luego A_2 es numerable y en consecuencia sus elementos pueden disponerse en una lista $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ (β_1 es $\alpha_1\alpha_1$, β_2 es $\alpha_2\alpha_1$, β_3 es $\alpha_1\alpha_2$, etc.). Para ver que A_3 es también numerable basta observar que cada palabra de tres letras se obtiene agregando una letra a una palabra de dos letras; luego los elementos de A_3 pueden disponerse en la forma

$$
\begin{array}{cccc}
\beta_1\alpha_1 & \beta_1\alpha_2 & \beta_1\alpha_3 & \cdots \\
\beta_2\alpha_1 & \beta_2\alpha_2 & \beta_2\alpha_3 & \cdots \\
\beta_3\alpha_1 & \beta_3\alpha_2 & \beta_3\alpha_3 & \cdots \\
\hdashline
\end{array}
$$

Es claro que el mismo procedimiento puede aplicarse reiteradamente para probar que cada P_n es numerable. En consecuencia P es numerable.

Ahora bien, este sencillo razonamiento puede usarse para demostrar que el conjunto A de todos los números reales *algebraicos* es numerable. Recordemos que un número real a es algebraico si es raíz de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros, es decir, si existe un polinomio $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ con $c_0, c_1, \ldots, c_n$ enteros y tal que $p(a) = c_0 + c_1 a + \ldots + c_n a^n = 0$. Según esto, todo racional es algebraico: por ejemplo, $\frac{17}{29}$ es raíz de $17 - 29x$; pero no todo algebraico es racional: $\sqrt{2}$ no es racional pero satisface la ecuación $2 - x^2 = 0$.

Observemos ahora que cada polinomio p está completamente determinado por sus coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ (en éste orden), es decir, por una "palabra" basada en el alfabeto Z $(= \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, \})$. Si, por ejemplo $p(x) = 2x - 3x^2 + x^5$, la "palabra" correspondiente es $0, 2, -3, 0, 0, 1$. Podemos entonces afirmar que el conjunto P de todos los polinomios con coeficientes enteros es numerable:

$$P = \{ p_1, p_2, p_3, \ldots \}.$$

Sea ahora R_1 el conjunto de las raíces de p_1; R_2 el conjunto de las raíces de p_2, etc. Entonces A es exactamente la unión de los R_i y como cada uno de estos conjuntos es finito (el número de raíces de un polinomio no supera su grado) concluimos que A es numerable.

Habiendo visto que los números algebraicos son más abundantes que los racionales, podemos preguntarnos si no agotan todos los reales. Si éste fuera el caso, es decir, si $\mathbb{R} = A$ entonces $\mathbb{R}$ sería numerable y en particular el conjunto de los números reales entre 0 y 1 (números con expresión decimal de la forma $0, a_1 a_2 a_3 \dots$) sería también numerable. La aplicación de otro "método diagonal" nos permitirá desechar esta posibilidad. En efecto, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ es una lista de números reales entre 0 y 1 :

$$\alpha_1 = 0, a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; a_{14} \dots$$

$$\alpha_2 = 0, a_{21} \; a_{22} \; a_{23} \; a_{24} \dots$$

$$\alpha_3 = 0, a_{31} \; a_{32} \; a_{33} \; a_{34} \dots$$

$$\dots\dots$$

y si definimos $\beta = 0, b_1 \; b_2 \; b_3 \dots,$ donde

$$b_n = \begin{cases} 1 \text{ si } a_{nn} \neq 1 \\ 2 \text{ si } a_{nn} = 1 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

entonces $0 < \beta < 1$ y además $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$, etc., es decir, β se diferencia de α_1 en la primera cifra decimal, de α_2 en la segunda, etc.. Como la representación decimal es única (salvo casos como $0, 1999 \dots = 0, 2000 \dots$ excluidos aquí por la manera de elegir las b's) se tiene que $\beta \neq \alpha_i$, es decir, β no figura en la lista $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Esto prueba que no puede haber una lista $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ en la cual aparezcan *todos* los reales entre 0 y 1. Luego este conjunto no es numerable y entonces tampoco $\mathbb{R}$ puede ser numerable. Luego A no puede ser igual a $\mathbb{R}$, es decir, existen reales no algebraicos; tales números se dicen *trascendentes*. Acabamos de demostrar la *existencia* de números trascendentes *¡ sin haber exhibido en ningún momento un ejemplar de tales objetos !*

El Teorema de Cantor

Como último ejemplo de las técnicas elementales usadas en la teoría de Cantor demostraremos uno de sus resultados referente al cardinal de un conjunto cualquiera. Recordemos que A es una *parte* o un *subconjunto* de U (escrito $A \subset U$) si todo elemento de A es un elemento de U; se admite que $\phi \subset U$ para cualquier U (trate de hallar un elemento de ϕ que no esté en U). También $U \subset U$. El conjunto de todas las parte de U se denota $P(U)$. Así, por ejemplo, si $U = \{1, 2, 3\}$ entonces los elementos de $P(U)$ son

$$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

Sea ahora U un conjunto cualquiera y sea Q la colección de todos los subconjuntos unitarios de U es decir, los elementos de Q son los conjuntos $\{x\}$ con $x \in U$. Entonces Q es un subconjunto de $P(U)$ y la regla que a cada x de U le asigna el elemento $\{x\}$ de Q es claramente una biyección de U sobre Q, concluimos que $Card\ U \leq Card\ P(U)$. Cantor demostró que en realidad $Card\ U < Card\ P(U)$

Teorema . Sea U un conjunto cualquiera y sea A una parte de U . Entonces

$$Card\ P\ (U)\ \neq\ Card\ A \qquad (1)$$

En particular $Card\ P(U) \neq Card\ U$.

Demostración . *Supongamos que existe una biyección de* $P(U)$ *sobre* A que a cada elemento X de $P(U)$ le asigna un elemento a de A . Diremos que a es la *imagen* de X o que X es el *generador* de a. Todo elemento de A es la imagen de algún X de $P(U)$ el cual es su generador.

Sea entonces A_o el conjunto de todos aquellos elementos de A que *no* pertenecen a su generador. Es claro que A_o es un subconjunto de U, es decir, un elemento de $P(U)$. Sea a_o su imagen (luego A_o es el generador de a_o). Ahora bien, si $a_o \in A_o$, por la misma definición de A_o tendríamos que a_o no pertenece a su generador, es decir, $a_o \notin A_o$. Y si $a_o \notin A_o$, es decir, si a_o no pertenece a su generador, entonces $a_o \in A_o$, por la definición de A_o . Esta contradicción indica que no puede suponerse que exista una biyección de $P(U)$ sobre A. Luego $Card\ P(U) \neq Card\ A$, como quería demostrarse .

Obsérvese que si U es finito y tiene, por ejemplo, n elementos, entonces $P(U)$ tiene 2^n elementos (= número total de combinaciones con n objetos) y la desigualdad demostrada se convierte en

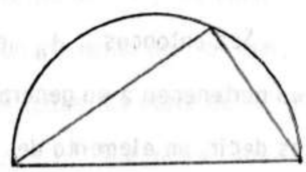
$$n < 2^n .$$

Anotemos, por último, que la demostración del Teorema de Cantor recurre explícitamente al llamado Principio del Tercero excluído (*tertium non datur)* : Dada una proposición P se tiene que o bien P es cierta o bien P es falsa (no hay lugar a una tercera posibilidad).

* * *

Tales

Siendo un poderoso capitalista, traficante en aceite de olivas, Tales de Mileto tuvo oportunidad de relacionarse con los más eminentes matemáticos y astrónomos de su época en sus frecuentes viajes a lo largo de las costas del Asia Menor entre los años 600 y 550 antes de Cristo. Una vez retirado de sus negocios pudo dedicarse a las Matemáticas como pasatiempo absorbente prestando especial atención a los fundamentos de la geometría. Se cuenta que su alborozo al descubrir que todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto fue tan grande, que ordenó el sacrificio de un toro como justo medio para celebrar tal acontecimiento.



Según parece Pitágoras, bajo la influencia de Tales, decidió viajar durante varios años buscando relacionarse con otros estudiosos y así ampliar sus conocimientos.