Boletín de Matemáticas
Vol. VI No. 4 pp. 14-20

π y e

BOB PRIELIPP(*)

Dos de los números más famosos son π y e, donde π es la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro y e es la base (del sistema) de los logaritmos naturales. Como desde la secundaria los estudiantes están familiarizados con estos números, podría suponerse que desde hace muchos años los matemáticos han dicho sobre ellos todo lo que tenían que decir. Este, sin embargo, no es el caso.

Es quizá interesante anotar que Euler es en gran parte responsable del uso corriente de los símbolos π y e. La primera vez que aparece la letra griega π para designar la razón circular parece ser 1706, en la ***Synopsis Palmariorum Matheseos***, o ***Una nueva introducción a la Matemática***, de William Jones. Pero fue la adopción que de ella hizo Euler en 1737 y su uso en sus populares libros de enseñanza lo que la hicieron ampliamente conocida y empleada. En un manuscrito titulado ***Meditaciones acerca de experiencias realizadas recientemente sobre el disparo de un cañón (Meditatio in experimenta explosione tormentorum***

(*) Tomado del "Pi Mu Epsilon Journal", 5(1971), pp.161-164. La versión española hecha por V.S. Albis G., ha sido autorizada por el anterior periódico y el autor. N. del E.

nuper instituta), probablemente escrito en 1727 o 1728, Euler usó la letra e dieciseis veces para representar el $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Volviola a usar para denotar el *número cuyo logaritmo hiperbólico* $=1$, esto en una carta para Goldbach, escrita en 1731. Esta notación aparece impresa por primera vez en la *Mecánica* de Euler, publicada en 1736 ("Meditatio in experimentan explosive tormentorum nuper instituta" fue impresa en 1862 en la *Opera postuma mathematica et physica*, editada por P.H. Fuss y N. Fuss. Se ha sugerido que e deriva de la letra inicial de la palabra "exponencial". Incidentalmente, el símbolo i para $\sqrt{-1}$ es otra notación introducida por Euler aunque en este caso la adopción la hizo al final de su vida, en 1777.

Antes de presentar algunos problemas no resueltos relacionados con π y e, repasemos brevemente algunos aspectos históricos de estos números. Empezamos recordando que un *número algebraico* es un número complejo que satisface una ecuación de la forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

donde los a_i, $i=0, 1, \ldots, n-1$, son números racionales y n es un entero positivo. Ejemplos de números algebraicos son $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ é i ($\frac{1}{2}$ es una raíz de la ecuación $x-\frac{1}{2}=0$, $\sqrt{2}$ es una raíz de $x^2=2=0$, é i es una raíz de $x^2+1=0$). Un polinomio cuyo coeficiente director es 1 tal como el indicado en la definición de número algebraico, se dice *unitario*. Todo número algebraico α satisface una única ecuación polinómica unitaria de grado mínimo. Este único polinomio unitario de grado mínimo, se llama el *polinomio minimal* de α. El grado del polinomio minimal de α es también el *grado de* α. El concepto de número algebraico es una generalización natural del de número racional. En efecto, los números racionales coinciden con los números algebraicos de grado 1. Un número complejo que no es un número algebraico se dice un *número trascendente.*

Ningún número trascendente es racional. Lo anterior se expresa generalmente en la forma : " Todo número trascendente es irracional". Esto sugiere que todo número trascendente debe ser real, lo cual es inexacto, de manera que evitaremos (siguiendo a Niven) usar la anterior expresión. Algunos números algebraicos son racionales (por ejemplo, 2/3 y 5/8) y otros no son racionales (como $\sqrt{2}$ e i). Luego saber que un número no es racional es insuficiente para decir si éste es trascendente o algebraico.

No siempre es fácil determinar si un número real particular es racional o irracional. Sin embargo, usando el desarrollo canónico de e en serie infinita

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots,$$

donde $n! = n(n-1),,,2\ 1$, podemos dar una demostración sencilla de la irracionalidad de e. En efecto, supongamos que e es racional, $e = m/n$, m un entero y n un entero positivo. Entonces

$$n!\,(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \ldots - \frac{1}{n!})$$

es un entero. Reemplazando e por su desarrollo en serie y simplificando, tenemos que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

es un entero. Pero

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\ldots <$$

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1 ,$$

usando la fórmula que suma una serie geométrica infinita. Luego

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots .$$

es una serie de términos positivos que converge a un valor positivo menor que 1, y, por lo tanto, no es un entero. De esta contradición concluímos que e no es un número racional. De hecho se puede establecer que si r es racional y $r \neq 0$, entonces e^r no es racional.

La irracionalidad de π fue demostrada inicialmente por Lambert en 1761 usando fracciones contínuas. Más tarde se demostró también que π^2 es irracional. Este conocimiento no era suficiente para resolver el problema de la *cuadratura del círculo*, el cual discutiremos con mayor detalle un poco más tarde.

En 1783 Hermite probó que e es trascendente. Se ha dicho que ese mismo año él declaró lo siguiente : " No me arriesgaré en ningún intento por demostrar la trascendencia del número π. Si otros emprenden esta tarea, nadie estará más contento que yo de sus éxitos, pero creedme, caro amigo, que les costará no pocos esfuerzos". Nueve años mas tarde (1882) Lindemann logró demostrar que π es trascendente. Para producir su prueba, Lindemann desarrolló una extensión de la técnica empleada anteriormente por Hermite. Antes de seguir adelante cabría anotar que hoy sabemos que e^{α} es trascendente para todo número algebraico $\alpha \neq 0$.

Uno de los más famosos problemas de la antiguedad era "la cuadratura del círculo", esto es, la construcción de un cuadrado igual en área a un círculo dado, usando únicamente los métodos de la regla y el compás. La imposibilidad de esta construcción se estableció cuando Lindemann demostró que π es trascendente. Porque, por una parte, las longitudes de todos los segmentos rectilíneos que pueden construirse a partir de una unidad de longitud dada usando un número finito de construcciones con regla y compás, son números algebraicos. Por otra parte, dado cualquier círculo, podemos considerar su radio como la unidad de longitud, de modo que el círculo tiene un área de π unidades cuadradas. Luego el problema de "cuadrar el círculo" es equivalente al problema de construir un segmento rectilíneo de longitud $\sqrt{\pi}$ a partir de una unidad de longitud dada. Supóngase que esto es posible. Entonces $\sqrt{\pi}$ sería un número algebraico y de aquí se seguiría que $\pi = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}$ sería algebraico, ya que los números algebraicos son cerrados para la multiplicación (en efecto, el conjunto de todos los números que son algebraicos sobre cualquier cuerpo numérico F es un cuerpo). Por consiguiente, es imposible "cuadrar el círculo".

Otra contribución notable a la teoría de los números trascendentes fue la demostración del teorema de Hilbert-Gelfond Schneider. Este teorema proporcionó una solución al séptimo de la famosa lista de Hilbert que contenía 23 notables problemas aún no resueltos. Aunque la lista fue anunciada en 1900, no fue sino hasta 1929 que Gelfondrealizó la primera contribución real a la solución del séptimo problema. Resultados parciales adicionales fueron obtenidos por Kosmin, Siegel y Boehle, y en 1934 Gelfond dió una prueba completa.

Poco después e independientemente Schneider suministró otra demostración. El teorema de Hilbert-Gelfond-Schneider establece que *si* α *y* β *son números algebraicos,* β *no es racional y* α *no es ni 0 ni 1, entonces cualquier valor de* α^{β} *es trascendente.* La hipótesis de que "β no es un número racional" se acostumbra escribir en la forma "β es irracional". Una vez más nuestra manera de expresarla es un intento para no sugerir que β deba ser un número real. En general, $\alpha^{\beta} = e^{\beta \log_e \alpha}$ es una función multívoca. Esta es la razón de la frase " cualquier valor de " en el enunciado del teorema. Un valor de $i^{-2i} = 2^{-2i} 2^{-2i \log_e i}$ es e^{π}. Luego e^{π} es trascendente. El teorema establece también la trascendencia de números como 5^{i} y el llamado *número de Hilbert*, $2^{\sqrt{2}}$.

Algunas veces el teorema de Hilbert-Gelfond-Schneider se expresa en la siguiente forma equivalente: *Si* α *y* β *son números algebraicos diferentes de 0 y* $\beta \neq 1$, *entonces*

$$\log_e \alpha / \log_e \beta$$

es o racional o trascendente. De esta forma del teorema se sigue que *el logaritmo de un número racional positivo* r *referido a una base racional positiva* $b \neq 1$ *es o racional o trascendente.* Esto puede verse rápidamente si recordamos que

$$\log_b r = \log_e r \,/\, \log_e b \, .$$

Luego si r y $b \neq 1$ son números racionales positivos, $\log_b r$ es trascendente a menos que existan enteros m y n tales que $r^m = b^n$.

A pesar de que a través de los años se ha recogido mucha información concerniente a π y e, aún no se sabe si $\pi+e$, πe, e^e, π^π o π^e son números trascendentes. Más aún, no sabemos siquiera si alguno de ellos es irracional. Métodos de ataque que nos permitan decidir sobre el carácter de los mencionados cinco números no parecen existir ahora. El mundo está esperando a un astuto matemático que abra otra brecha.

REFERENCIAS

1. Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, New York : John Wiley and Sons, Inc., 1968, pp. 483-484, 602-603 and 656-657.
2. Brown, W. S., " Rational Exponential Expressions and a Conjecture concerning π and e ", The American Mathematical Monthly, LXXVI (January 1969), pp. 28-34.
3. Courant, Richard and Robbins, Herbert, *What is Mathematics?*, New York : Oxford University Press, 1949. *¿Qué es la matemática ?*, Madrid : Aguilar.
4. Leveque, W.J., *Topics in Number Theory*, Vol. II, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Pub. Co., Inc., 1956.
5. Niven, Ivan. *Irrational Numbers* (The Carus Mathematical Monographs, Number 11), The Mathematical Association of America, 1956.
6. Pollard, Harry, *The Theory of Algebraic Numbers* (The Carus Mathematical Monographs, Number 9). The Mathematical Association of America, 1950.
7. Siegel, C.L., *Trascendental Numbers*, Princeton, Princeton University Press 1949.
8. Smith, David E., *A Source Book in Mathematics*, volumes One and Two, New York : Dover Publications, Inc., 1959, pp. 95-106 y 346-347