Boletín de Matemáticas
Vol. VI Nº 4 pp. 21-32

ALGUNOS TEMAS DE INVESTIGACION A NIVEL ELEMENTAL

YU TAKEUCHI

Introducción.

En algunas ramas de la Ciencia como la Biología, la Geología, etc., no es difícil encontrar temas originales de investigación, por ejemplo ; " una investigación sobre cierta clase de ranas de tres patas que vive exclusivamente en la Sabana de Bogotá". Sinembargo, en Matemáticas es difícil hallar temas de investigación adecuados a nuestro nivel académico en Colombia puesto que no existe "matemática local de la Sabana de Bogotá", sino que la Matemática es única en todo el mundo. (¡ Más aún, la Matemática Marciana debería ser igual a la nuestra!) Entonces, ¿ Sería muy justo que nuestros matemáticos[1] no desarrollen trabajos propios debido a esta situación? La matemática es algo como un arte moderno : los pintores producen sus obras aunque es muy difícil exponerlas en la galería de Nueva York y muy poco público pueda apreciarlas. Los que no pintan, aunque sepan muy bien apreciar las obras exhibidas, no son pintores sino críticos de arte. Las personas que no desarrollan sus propios trabajos, limitándose solamente a leer libros de matemáticas, no son matemáticos sino *críticos del arte matemático.* ¿ Podrán los críticos ser buenos profesores ?

---

(1) En esta nota uso la palabra "matemático" en el sentido de "profesor de matemáticas a nivel universitario".

Veamos otro ejemplo : las personas que nunca han subido a ninguna montaña no son alpinistas aunque hayan leído miles de libros sobre alpinismo. ¿ Son ellos buenos maestros para enseñar cómo se puede escalar el Monte Everest ? No hay Everest en Colombia, entonces ¿ podrá dedicarse un alpinista a la lectura de libros sin conceder el mínimo interés a la práctica ? Si no hay Everest, ¿ porqué no buscar alguna otra montaña para su entrenamiento ? Aún Monserrate podría servir para algo. Los matemáticos no deben dedicarse solamente a la lectura ; tienen que buscar sus propias montañas, adecuadas a su nivel académico y abrir su propio camino y así evitar el peligro de convertirse en un dictáfono sin alma. Entonces, ¿ cómo podemos buscar temas de trabajo en matemáticas en nuestro medio ambiente ? Hay que cuidarse de la palabra mágica "originalidad" : hay cantidades de temas originales que no tienen ningún interés para nadie, por ejemplo "elaborar una tabla de la función $x^{x^{x^{x^{x}}}}$ sería muy original; ¿ para qué serviría este tipo de trabajo sin motivación alguna ?

A continuación presentamos una serie de los temas surgidos por cierta motivación, los cuales no son del nivel del Monte Blanco ni del Everest pero aspiro a que sean del nivel de las montañas que asoman detrás de Monserrate y que sean útiles para algunas personas.

I. Baricentros naturales de un conjunto.

1. Motivación.

Un día, leyendo un libro sobre operadores simétricos en un espacio de Hilbert, encontré esta frase :

consideremos todos los elementos g, *tales que* $\liminf_{n \to \infty} \| H^n g \| \neq +\infty$ (1)

Inmediatamente me pregunté ¿ porqué se usa el "límite inferior" en lugar de tomar "límite superior" ó sencillamente "límite" ?

Sean $a_n = \| H^n g \|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces por la simetría del operador H se tiene :

$$(a_n)^2 = \langle H^n g , H^n g \rangle = \langle H^{k+n-k} g , H^n g \rangle = \langle H^k H^{n-k} g , H^n g \rangle$$

$$= \langle H^{n-k} g , H^{n+k} g \rangle \leq \| H^{n-k} g \| \cdot \| H^{n+k} g \| = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$$

y por lo tanto mi pregunta era simplemente acerca de algunas propiedades de una sucesión de términos positivos, $\{ a_n \}$, tal que

$$a_n \leq \sqrt{a_{n+k} \cdot a_{n-k}} \quad , \text{ para todo } n, k, \; n > k. \qquad (2)$$

Si $\liminf_{n \to \infty} a_n \neq +\infty$ existe una subsucesión acotada de $\{ a_n \}$, digamos $\{ a_{s(n)} \}$ tal que

$$a_{s(n)} \leq M \; , \quad \text{para todo } k \text{ (para algún } M > 0) . \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta que una sucesión es una función definida en N (el conjunto de todos los números naturales), es posible encontrar una extensión de la sucesión o sea, una función f de valores positivos definida para todos los reales positivos y tal que

i) $f(n) = a_n$, para todo n de $\mathbb{N}$,

ii) $f(x) \leq \sqrt{f(x-y) \cdot f(x+y)}$ para todo $x > y > 0$ (4)

(Esta es la generalización de la desigualdad (2)) ,

iii) f es contínua en $(0 , \infty)$.

Como la desigualdad (4) es equivalente a

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right) \leq \sqrt{f(p) \cdot f(q)} \qquad \text{para todo} \quad p, q > 0 , \tag{5}$$

De (5), si $f(p) \leq M$, $f(q) \leq M$ se tiene que $f(\frac{p+q}{2}) \leq M$, y en general

$$f\left(p + \frac{k}{2n}(q-p)\right) \leq M \qquad \text{para todo } n, \text{ para todo } k \leq 2^n, \text{ (Ver Fig.1)}$$

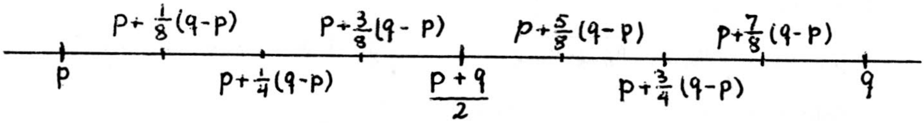

Figura 1

Por la continuidad de f obtenemos

$$f(x) \leq M , \qquad \text{si} \quad x \in (p , q) .$$

De (3) se tiene que $f(s(k)) \leq M$ para todo k ; como $s(k) \to +\infty$ cuando

$k \to \infty$ obtenemos

$$f(x) \leq M \quad \text{para todo} \quad x \in (0\,,\infty)\,,$$

por lo tanto la sucesión $\{a_n\} = f(n)$ es acotada y M es una cota de ella. Entonces $\limsup_{n\to\infty} a_n \neq \infty$.

¿ Cómo podemos encontrar una función f que satisface las tres condiciones i), ii) y iii) ?

Sea $g(x) = \log f(x)$: por la condición ii) tenemos

$$g(x) \leq \tfrac{1}{2}\,[\,g(x-y) + g(x+y)\,]\,, \quad \text{para todo} \quad x > y > 0 \qquad (6)\,,$$

luego basta hallar una función g *contínua* y *convexa* (Nota 1) tal que

$$g(n) = \log f(n) = \log a_n$$

Tomando $k = 1$ en (2) tenemos

$$(a_n)^2 \leq a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

o sea

$$2 \log a_n \leq \log a_{n-1} + \log a_{n+1}\,.$$

Esto es (Fig. 2) :

$$g(n) - g(n-1) \leq g(n+1) - g(n) \qquad (7)$$

Si definimos la función g en el in-

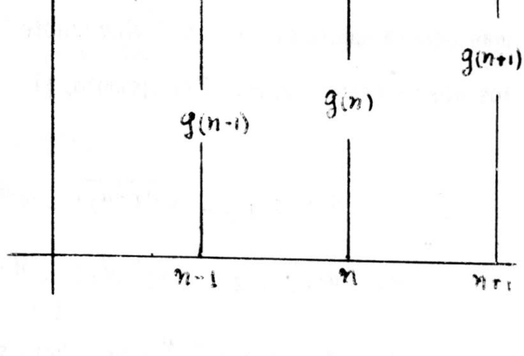

Fig. 2

tervalo $[n, n+1]$ en forma lineal, como sigue :

$$g(x) = g(n) + (x-n)\{g(n+1) - g(n)\}\ ; \ x \in [n, n+1] \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

entonces, por la desigualdad (7) se observa que la pendiente de la función g es creciente, o sea que la función g es convexa, así que g, definida por (8), satisface las condiciones exigidas (Nota 2).

En la desigualdad (2), tomando $n+k = p$, $n-k = q$, tenemos :

$$a_{(q+p)/2} \leq \sqrt{a_q \cdot a_p} \tag{6'}$$

siempre y cuando $(q+p)/2$ sea un número natural. Dados q, p naturales, el número $(q+p)/2$ no es siempre natural, razón por la cual fue necesario "sumergir" la sucesión $\{a_n\}$ en la función f para la cual la desigualdad (6) es válida cualesquiera sean p, q.

Sin utilizar el método de inmersión de la sucesión $\{a_n\}$ y a partir de las desigualdades $a_q \leq M$, $a_p \leq M$ $(q < p)$ podemos concluir inmediatamente que $a_r \leq M$ $(q < r < p)$, si el número natural r es el "centro" entre q y p, o más generalmente si r es "*alcanzable*" por los centros sucesivos a partir de los dos números q, p. Por ejemplo, si $a_3 \leq M$, $a_{11} \leq M$ tenemos :

$$a_7 = a_{(3+11)/2} \leq \sqrt{a_3 \cdot a_{11}} \leq \sqrt{M \cdot M} = M\ ,$$

$$a_5 = a_{(3+7)/2} \leq \sqrt{a_3 \cdot a_7} \leq \sqrt{M \cdot M} = M\ ,$$

$$a_9 = a_{(7+11)/2} \leq M\ , \ a_4 = a_{(3+5)/2} \leq M$$

$$a_6 = a_{(5+7)/2} \leq M \text{ , } a_8 = a_{(7+9)/2} \leq M \text{ , } \quad a_{10} = a_{(9+11)/2} \leq M \text{ ,}$$

y se puede concluir que

$$a_r \leq M \quad \text{para todo} \quad r = 3, 4, 5, \ldots, 10, 11 \quad \text{(Ver Fig. 3) .}$$

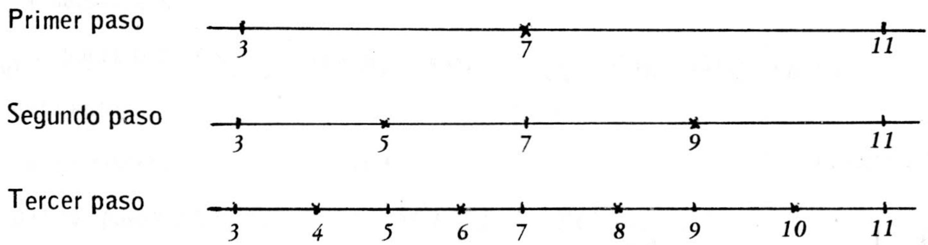

Figura 3

2. *Baricentros naturales.*

Sea A un conjunto de números naturales, decimos que el número $\frac{1}{2}(x+y)$ $(x, y \in A)$ es un *baricentro natural* de A si $\frac{1}{2}(x+y)$ es un número natural . Agregando al conjunto A todos los baricentros naturales de A se obtiene un conjunto que contiene a A el cual se llama *el conjunto derivado de* A y se denota A'. El conjunto derivado de A' se denota $A^{(2)}$, y así sucesivamente : el n-ésimo derivado de A , $A^{(n)}$, es el conjunto derivado de $A^{(n-1)}$:

$$\{ A^{(n)} \} = \{ A^{(n-1)} \}' \text{ .}$$

Por ejemplo, si

$$A = \{ 3, 15 , 24 \}$$

entonces

$$A' = \{3, 9, 15, 24\} \qquad A^{(2)} = \{3, 6, 9, 12, 15, 24\}$$

$$A^{(3)} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 24\} \quad A^{(4)} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\} = A^{(5)}.$$

De esta manera tenemos una *sucesión creciente de conjuntos derivados* :

$$A \subset A' \subset A^{(2)} \subset A^{(3)} \subset \ldots \subset A^{(n)} \subset A^{(n+1)} \subset \ldots \tag{9}$$

El conjunto A^* :

$$A^* = \lim_{n \to \infty} A^{(n)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$$

se llama *el conjunto final de* A, evidentemente se tiene :

$$(A^*)' = A^* .$$

Si A es un conjunto finito, la cadena en (9) debe terminar en algún n, o sea que

$$A^{(n)} = A^{(n+1)} = A^{(n+2)} = \ldots ,$$

en este caso obtenemos que

$$A^* = A^{(n)} \quad \text{(el conjunto final).}$$

En el ejemplo anterior, $A^{(4)}$ es el conjunto final de A.

Teorema.

Sea B *un conjunto de números naturales, si* $B' = B$ *entonces* B *es una progresión aritmética.*

Demostración. Sea $B = \{ a_1 , a_2 , a_3 , \ldots, a_k, \ldots \}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{k-1} < a_k < \ldots$$

(puesto que siempre se puede ordenar cualquier conjunto de números naturales según la magnitud). Consideremos dos números consecutivos a_{k-1} y a_k ; si ambos son pares o ambos son impares entonces $\frac{1}{2}(a_{k-1} + a_k)$ es un número natural que está entre a_{k-1} y a_k lo cual es imposible ya que $B' = B$. Por lo tanto uno de los números a_{k-1} , a_k es par y el otro impar. Luego, a_{k-1} y a_{k+1} son ambos pares o son ambos impares, y entonces $\frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1}) = a_k$, o sea

$$a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k \quad ,$$

esto es, $B = \{ a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_k , \ldots \}$ es una progresión aritmética. ∎

Corolario 1. *Sea A un conjunto de números naturales, entonces el conjunto final de A es una progresión aritmética.*

Demostración. Si A^* es el conjunto final de A se tiene que $(A^*)' = A^*$ y basta entonces aplicar el teorema al conjunto A^*.

Corolario 2. *Sea A un conjunto de números naturales, si 1 y 2 pertenecen a A entonces el conjunto final de A es igual a $\mathbb{N}$.*

Demostración. Sea A^* el conjunto final de A entonces

$$A^* = \{ \alpha + (k-1)\beta \}_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{para algún} \quad \alpha, \beta > 0 \, ,$$

Pero como $1, 2 \in A \subset A^*$ se tiene que $\alpha = \beta = 1$, o sea que $A^* = N$. ∎

Dada una sucesión $\{a_n\}$ supongamos que una propiedad de los elementos a_q y a_p $(q < p)$ se transmite siempre al elemento central $a_{(q+p)/2}$ cuando $\frac{1}{2}(q+p)$ es natural. Si todo elemento de una subsucesión $\{a_k\}_{k \in A}$ $(A$ es un subconjunto de $N)$ posee esta propiedad entonces es evidente que cualquier elemento a_k $(k \in A^*)$ también tiene la misma propiedad ya que cualquier número del conjunto final A^* de A puede ser alcanzado en un número finito de pasos a partir de los números de A.

Ejemplo. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos que satisface la condición (6'). Si $\liminf_{n \to \infty} a_n \neq +\infty$ entonces existe una subsucesión acotada, digamos $\{a_{s(n)}\}$: para algún M, $a_{s(n)} \leq M$ cualquiera sea n.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_{s(1)} = a_1$, $a_{s(2)} = a_2$, entonces, por el Corolario 2, se tiene que $a_n \leq M$ para todo n, puesto que la propiedad $a_q \leq M$, $a_p \leq M$ se transmite al elemento central $a_{\frac{1}{2}(q+p)}$ cuando $\frac{1}{2}(q+p)$ es un número natural. ∎

3. *Una técnica de sucesiones.*

El problema planteado en el parágrafo 1 nos condujo a introducir dos métodos para resolver ciertos problemas matemáticos, a saber, "el método de inmersión" y "el método del conjunto final". Sinembargo, el problema en sí mismo puede ser resuelto simplemente por una "técnica de sucesiones", como sigue :

De (2), tomando $k = 1$ se tiene :

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad , \tag{10}$$

luego la sucesión $\{a_n / a_{n-1}\}$ es creciente. Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n / a_{n-1}$ (L puede ser infinito). Si $L > 1$, para $\varepsilon > 0$ tal que $1 + \varepsilon < L$ existe un N_o tal que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n > N_o \qquad ,$$

o sea

$$a_n > (1 + \varepsilon)\, a_{n-1} \quad \text{para todo} \quad n > N_o \, .$$

Tomando $n = N_o + 1 , N_o + 2 , \ldots , m$ y multiplicando miembro a miembro las desigualdades así obtenidas se obtiene

$$a_m > (1 + \varepsilon)^{m-N_o} a_{N_o} \qquad ,$$

luego :

$$\lim_{m\to\infty} a_m = + \infty$$

Si $\liminf_{n\to\infty} a_n \neq + \infty$, esto es imposible, por lo tanto se tiene que $L \leq 1$.

Luego

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq L \leq 1 \, ,$$

o sea

$$a_n \leq a_{n-1} \quad .$$

Esto es, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y entonces es convergente. ■ ▲

Nota 1. Se dice que una función f es *convexa* si la cuerda AB está por encima de la curva $y = f(x)$ (ver Fig. 4), o sea que para todo $q < p : t f(q) + (1-t) f(p) \geq f(q + (1-t)p)$ para todo $t \in [0, 1]$.

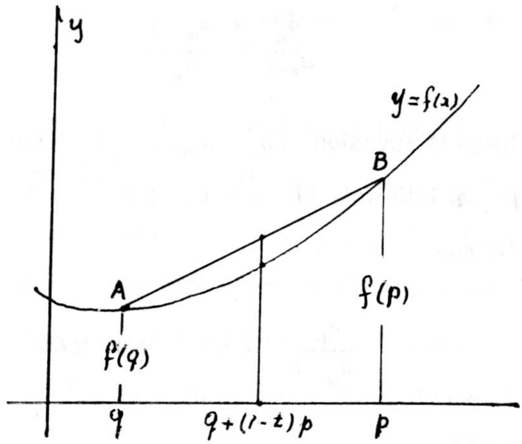

Figura 4

i) Si una función es **convexa**, es contínua.

ii) Por otra parte, una función **contínua** que satisface la condición (7) es **convexa.**

La demostración la dejamos al lector (si así lo desea, el lector puede consultar este tipo de cuestiones a la redacción de este Boletín).

Nota 2. La función f no es derivable en $x = n$ (natural) pero sí es posible construir una función ***derivable*** y **convexa** que satisface la condición : $f(n) = a_n$. La demostración la dejamos al lector. ¿ Qué se puede decir de la inmersión de la sucesión $\{a_n\}$ en una función convexa y de clase C^∞ ?

* * *