Boletín de Matemáticas
Vol. VI, No. 4 pp. 33-47

LAS NOCIONES MATEMATICAS, III

ALONSO TAKAHASHI

3. LA TESIS LOGICISTA

Fue Leibniz, llamado "el omniciente" por algunos de sus contemporáneos, poseedor de una mentalidad universal si alguna ha existido, quien por el año de 1666 concibió por primera vez, con claridad y precisión, la posibilidad de usar la Lógica como fundamento de todas las ciencias surgiendo de esta manera una Ciencia Universal la cual, en última instancia, se reduciría a un Cálculo Lógico regido por leyes formales determinadas de una vez para siempre. Hasta entonces, y a pesar de que la Edad Media dedicó sus mejores talentos a la Lógica Formal creada por Aristóteles, los avances logrados fueron escasos. Más tarde, y especialmente a partir de 1854, año en el cual G. Boole publicó su libro *Laws of Thought* (Leyes del pensamiento) el cual, según Russell, marca el nacimiento de las Matemáticas Puras, esa disciplina se desarrolló en forma impresionante surgiendo practicamente una "Nueva Lógica" que involucraba la formulación de un verdadero *cálculo lógico* el cual, en principio, algebriza y hasta podemos decir que mecaniza los procesos deductivos. Por la misma época se introdujo también la lógica de relaciones (C.S. Pierce) y se consideraron otros criterios deductivos además del *silogismo* de la antigua lógica.

Entre 1880 y 1900 Frege y Dedekind se esforzaron por definir, en el seno de la Lógica, aquellas nociones matemáticas consideradas como primarias : la noción de *número natural* y por su conducto la de *número real* . En 1884 aparece la primera obra que explícitamente se propone reducir la Matemática a la Lógica : se trata de *Die Grundlagen der Arithmetik* escrito por Frege. Más tarde, entre 1910 y 1914 fueron publicados los tres primeros volúmenes de la obra monumental de Russell y A. N. Whitehead *Principia Mathematica* de la cual alcanzó a proyectarse un cuarto volumen, a cargo de Whitehead, dedicado a la Geometría. En estas obras se introducían complejos sistemas simbólicos por lo cual no alcanzaron una difusión muy grande especialmente en el caso de Frege cuyas ideas sólo se conocieron posteriormente. Los tres volúmenes de Russell y Whitehead llenan cerca de 2.000 páginas escritas en gran parte con signos lógicos y no ha faltado quien afirme que nadie los ha leído en su totalidad, ni siquiera los autores, cada uno de los cuales se habría limitado a la parte por él escrita.

De acuerdo con la "tesis logicista" originada por Frege (reducción de la Matemática a la Lógica) se trató en primer lugar de reducir la noción de *número* a la de *conjunto*, la cual a su vez puede analizarse en términos lógicos como *condición o noción* : a cada condición se asocia su extensión, es decir, el conjunto de entes que la satisfacen. El primer paso en este programa consiste en definir con precisión lo que debe entenderse por el *número de elementos* de un conjunto o, usando un lenguaje más técnico, el *cardinal* de un conjunto A. Ahora bien, sea lo que sea, "el cardinal de A" debe representar de alguna manera "aquello que tienen en común todos los conjuntos equipotentes con A". En forma por demás trivial podemos decir : lo que dichos conjuntos tienen en común es precisamente que satisfacen la condición (en X) :

« X *es equipotente con* A »

Por lo tanto "el cardinal de A" debe estar íntimamente asociado a esta condición, lo cual nos conduce naturalmente a su extensión, es decir, a la colección de todos los conjuntos X que son equipotentes con A. Se llegó así (Frege 1879, Russell 1901) a la siguiente definición

$$Card\ A = \{ X : X\ E_p\ A \},$$

esto es : el *cardinal* de un conjunto A, denotado $Card\ A$, es el conjunto de todos los conjuntos equipotentes con A. Se logra así que, para dos conjuntos A y B la afirmación A Ep B sea equivalente a $Card\ A = Card\ B$.

En particular, si Q es un objeto cualquiera, el número 1 se define como el cardinal de $\{Q\}$: $1 = Card\ \{Q\}$. En otros términos, 1 es *el conjunto de todos los conjuntos equipotentes con* $\{Q\}$, es decir, *el conjunto de todos los conjuntos unitarios* (esto es, de la forma $\{X\}$ donde X es un objeto cualquiera). Análogamente 2 será *el conjunto de todos los conjuntos de la forma* $\{X, Y\}$ donde X y Y son objetos distintos.

El número 0 sería, en este contexto, el cardinal del conjunto vacío ϕ, es decir, el conjunto de todos los conjuntos equipotentes con ϕ. Como ϕ es el único conjunto con esta propiedad resulta que $0 = Card\ \phi = \{\phi\}$; obsérvese que $\{\phi\} \neq \phi$: una caja vacía (nos referimos a ϕ) no es lo mismo que una caja que contiene una caja vacía. Por lo tanto resulta una discordancia : el número 0 *(cero)* es un conjunto que tiene *un* elemento. Pero esto no deja de ser una molestia menor; inconvenientes más serios serán revelados más tarde.

Antes de pasar a definir el concepto general de "número natural" hay que precisar lo que debe entenderse por $\alpha + 1$ cuando α es un cardinal dado : si α es el cardinal del conjunto A y b es un objeto que *no* pertenece a A, entonces $\alpha + 1$ es el cardinal del conjunto A' obtenido agregando a A el elemento b. Una propiedad P, referente a cardinales, se dice *inductiva* si

(1) 0 tiene la propiedad P.

(2) Si un cardinal α tiene la propiedad P entonces el cardinal $\alpha + 1$ también la tiene .

Las nociones anteriores permiten formular una definición de "número natural" : un *número natural* es un cardinal n que goza de *toda* propiedad inductiva.

Es importante anotar que la propiedad : «(el cardinal) n es un número natural », la cual es una propiedad referente a cardinales, ha sido introducida haciendo referencia explícita a la totalidad de las propiedades de cardinales: para verificar si un cardinal n es un número natural es necesario, en principio, seleccionar de entre *todas* las propiedades de cardinales aquellas que son inductivas y luego comprobar que n satisface estas últimas. Estas definiciones se dicen *impredicativas* : son definiciones que tienden a individualizar miembros de una totalidad haciendo uso explícito de esa misma totalidad. Este procedimiento es con frecuencia fuente de contradicciones (recuérdese, por ejemplo, la paradoja de Russell).

Veamos ahora que, las en apariencia impecables, definiciones anteriores están viciadas en su misma base. Según se dijo, el número 1 es, por definición, el conjunto U de todos los conjuntos unitarios; ahora bien, si a cada elemento X de $\mathcal{P}(U)$ (es decir, a cada subconjunto X de U) le hacemos corresponder el conjunto unitario $\{X\}$ (el cual pertenece a U, por la misma definición de este conjunto), habremos establecido una correspondencia entre $\mathcal{P}(U)$ y un subconjunto de U, y esta correspondencia será biunívoca pues si X y Y son elementos de $\mathcal{P}(U)$ tales que $X \neq Y$ entonces también $\{X\} \neq \{Y\}$. Pero esto está en contradicción frontal con el Teorema de Cantor. Nos vemos entonces forzados a admitir que un conjunto con las características de U no puede existir.

En forma similar se comprueba que la definición logicista de 2 y, en general, la definición del cardinal de un conjunto cualquiera, no vacío, conduce a una contradicción.

Fue así como este programa de fundamentación de las Matemáticas se vió envuelto en sus propias redes llegando a tal estado de cosas que Poincaré, uno de sus detractores, podía exclamar mordazmente, y con bastante razón: *el logicismo no es enteramente estéril : engendra la contradicción.*

Un detenido análisis de la situación llevó a Russell a considerar tres posibles métodos para evitar las paradojas : (1) limitar la extensión o tamaño de las colecciones consideradas (*theory of limitation of size*), (2) método del zig-zag (*zig-zag theory*) y (3) evitar las definiciones no predicativas desarrollando un tratamiento sistemático del aspecto positivo de la cuestión, a saber, las definiciones predicativas (*no classes theory* o *ramified theory of types*). El primero de estos métodos fue el adoptado por Zermelo y sus sucesores, el segundo halla su realización en la obra de Quine, mientras que el mismo Russell decidió desarrollar la tercera posibilidad.

A grandes rasgos y por lo tanto con mucha imprecisión , podemos afirmar que en la *Teoria ramificada de tipos* (Russell) se supone dada una colección de *individuos* ("átomos" o "cosas dadas", no sujetos al análisis lógico). A estos individuos se les asigna el tipo *cero* : son los *entes de tipo cero.* Luego se consideran las *propiedades* de (o *relaciones* entre) estos individuos, las cuales vienen a constituir los *entes de tipo uno* ; las propiedades de estas propiedades, es decir , las propiedades de los entes de tipo uno son los *entes de tipo dos* , y así sucesivamente.

Si en lugar de las propiedades se consideran las extensiones correspondientes resulta la siguiente clasificación :

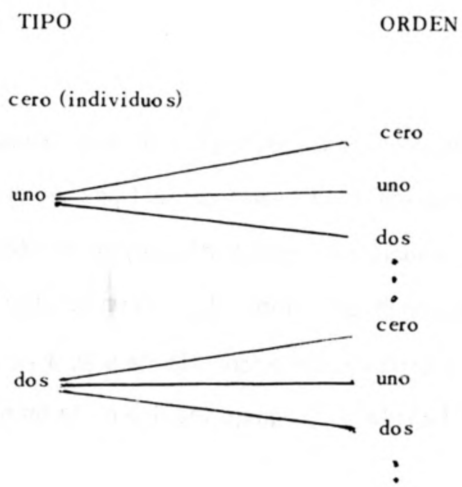
0) Entes de tipo cero : individuos

1) Entes de tipo uno : conjuntos de individuos

2) Entes de tipo dos : conjuntos de conjuntos de individuos, es decir, conjuntos de entes de tipo uno, etc.

Muchas contradicciones se evitan si en las construcciones matemáticas se admiten únicamente entes que pertenecen a un determinado tipo. De acuerdo con esta política carece de sentido , por ejemplo, afirmar que un conjunto *pertenece o no pertenece* a sí mismo pues dicho conjunto es de un tipo superior al de sus elementos. Es así como la Paradoja de Russell no puede siquiera ser formulada dentro de este sistema.

Naturalmente, dependiendo de la elección original de los *individuos* (pueden ser conjuntos, relaciones, etc.) se obtienen diversas escalas de tipos. Sin embargo, estas construcciones no son aún suficientes para analizar las definiciones impredicativas necesarias para desarrollar la Matemática, ni para evitar las paradojas de tipo semántico. Esto obliga a efectuar una subdivisión (ramificación) adicional de cada uno de los tipos superiores : Dentro del tipo uno aquellas propiedades definidas sin mencionar ninguna totalidad se dicen de *orden cero* (o *predicativas*); aquellas propiedades cuya definición involucra la totalidad de las propiedades de orden cero se dicen de *orden uno*, las propiedades definidas haciendo mención de la totalidad de las propiedades de orden uno serán de *orden dos*, y así sucesivamente. Análogamente se procede con los tipos siguientes.



Dentro de este esquema, la definición de los naturales puede tornarse predicativa fijando de antemano un orden y luego enunciando la definición limitándose a usar en su formulación sólo aquellas propiedades de los cardinales que pertenecen a dicho orden. La propiedad de ser un número natural resulta entonces ser del orden inmediatamente superior, evitándose así su carácter impredicativo. Sin embargo esta definición depende del orden escogido y no habría entonces un *conjunto de los números naturales* sino toda una infinidad de ellos.

Para evitar inconvenientes como el anterior es forzoso introducir un axioma muy especial cuyo carácter claramente artificioso y antinatural contrasta con las otras suposiciones básicas de la teoría, las cuales admiten interpretaciones en forma de afirmaciones bastante plausibles en la realidad. El axioma en cuestión es el llamado "Axioma de Reducibilidad" el cual afirma que, dentro de cada tipo, para toda propiedad P de orden superior a cero, existe una propiedad P_o de orden cero que tiene *la misma extensión* (es decir, *determina el mismo conjunto)* que la propiedad P. Según los mismos autores de la teoría, este axioma *tiene una justificación puramente pragmática pues conduce a los resultados deseados, y no a otros (hasta donde sabemos). Pero no es, claramente, la clase de axioma con el cual quedamos satisfechos.*

Creemos oportuno aclarar que el empleo de los términos "cero", "uno", "dos", ... en la descripción de la Teoría de los tipos, en el seno de la cual se pretende luego definir la noción de *número natural*, no encubre, como sostenía Poincaré, una flagrante petición de principios. Esos términos son meros rótulos o marcas que no pertenecen a la Matemática formalizada sino a su *metalenguaje*, esto es, al lenguaje usado para formular el lenguaje técnico de la teoría.

Anotemos, por último, que la división en tipos y órdenes permite evitar paradojas sutiles como la del mentiroso. En efecto, de acuerdo con esta clasificación habría varias clases de mentirosos : de *primer orden* si siempre mienten, salvo cuando dicen que son mentirosos de primer orden ; de *segundo orden* si siempre mienten (aún cuando afirman ser mentirosos de primer orden) pero no lo hacen cuando dicen ser mentirosos de segundo orden, etc.. Luego, si alguien afirma "miento" puede contestársele : Está bien, es usted un mentiroso, pero ¿ de qué orden ?

Con la introducción del Axioma de Reducibilidad no se logra tampoco la ansiada formulación de la Matemática en términos puramente lógicos siendo aún necesario introducir un axioma que afirme la existencia de colecciones o conjuntos infinitos (Axioma del Infinito) el cual tiene un carácter netamente extralógico.

Después de la gigantesca labor representada por los Principia Mathematica sus autores, según sus mismas palabras, quedaron hastiados de la Lógica y se forzaron a dirigir su atención en otras direcciones. Su teoría fue posteriormente perfeccionada por F.P. Rampsey (Teoría Simple de Tipos, 1926), C. H. Langford y R. Carnap. Sin embargo, las construcciones siempre tan complicadas y artificiosas que, si se está dispuesto a basar la Matemática en esos supuestos también puede aceptarse, en cambio, un sistema axiomático para la Teoría de Conjuntos como el de Zermelo y Fraenkel o el de Bernays y von Newmann, los cuales son, por lo menos, más sencillos.

4. LA TESIS INTUICIONISTA

Contrastando sustancialmente con el enfoque logicista, en lo relativo a los fundamentos de la Matemática, la corriente intuicionista iniciada por L. Kronecker y H. Poincaré y sistematizada posteriormente por L. E. J. Brouwer y A. Heyting insiste en la necesidad de efectuar consideraciones de carácter sicológico : sólamente estudiando la actividad mental del matemático es posible acercarse a la verdadera esencia de las entidades matemáticas las cuales corresponden a ciertas nociones primitivas presentes en nuestro pensar. Entre estas nociones figura en primer lugar nuestra intuición sobre la sucesión de los números naturales con base en la cual se *construyen* progresivamente los otros objetos matemáticos. Estas nociones y los procesos deductivos que les son aplicados no pueden nunca describirse adecuadamente por medio de la lógica formal la cual, por el contrario, debe estar subordinada a la Matemática. Es así como la intuición pasa a jugar un papel preponderante mientras que el lenguaje técnico resulta ser únicamente un medio, muy deficiente, para la comunicación de las ideas : ... *ni el lenguaje ordinario* , afirma Brouwer, *ni un lenguaje simbólico pueden tener otro papel que el de servir como un auxiliar, no matemático, para ayudar a la memoria matemática o para permitir a diferentes individuos la construcción de una misma entidad.*

Los llamados "principios fundamentales" de la lógica se han constituído con base en la *experiencia sobre colecciones concretas* y por lo tanto *finitas* de objetos y entonces no es lícito extrapolarlas a conjuntos infinitos. En realidad, si se trata de fundamentar la Matemática, no debe *presuponerse* nada con respecto al comportamiento de las entidades matemáticas.

Consideremos un ejemplo : si M es una colección formada por un número finito de objetos y si P es una cierta condición entonces es posible (por lo menos en principio) verificar, para cada uno de los elementos de M, si satisface la condición P o nó. Y sólo hay dos posibilidades :

a) existe (por lo menos) un elemento de M que satisface P, o bien

b) ningún elemento de M satisface P.

En consecuencia,si, por ejemplo, *no* se da el caso (b) entonces, necesariamente, debe darse el caso (a). De acuerdo con los intuicionistas no es lícito aplicar esta misma línea de razonamiento cuando M es un conjunto infinito pues en este caso el proceso de verificación de la condición P no es intuible.

En el seno de la Matemática ordinaria, para demostrar, por ejemplo, que :

$$\textit{existe un número natural } n \textit{ tal que } \mathrm{P}\{n\} \tag{1}$$

(donde P es una condición referente a números naturales), basta probar que al suponer la negación, es decir, al suponer que

$$\textit{para todo número natural } n, \textit{ no } \mathrm{P}\{n\} \tag{2}$$

se llega a una contradicción. En efecto, si éste es el caso, es decir, si (2) conduce a una contradicción entonces debe ser falsa (este principio es aceptado aún por los intuicionistas). Ahora bien, según el Principio del Tercero Excluído (*Tertium non datur*) o bien (1) es cierta o bien su negación (2) es cierta. Como (2) es falsa entonces (1) debe ser cierta.

Este tipo de *demostración indirecta* no es generalmente válido en Matemática Intuicionista: una demostración aceptable de (1) consistiría en dar un método efectivo para construir un número natural que gozara de la propiedad P es decir exhibir un especimen particular del conjunto de números determinados por P. Esto se debe a que un intuicionista no admite el Principio del Tercero Excluído, salvo cuando es *intuitivamente* evidente. *En general* una proposición de la forma

$$p \text{ ó no } p\,,$$

donde p es una afirmación dada, no se considera establecida (probada) sino cuando se ha dado una demostración de P ó se ha dado una demostración de *no* P

Ilustremos las consideraciones anteriores por medio de ejemplos concretos en 1644 Mersenne afirmó que 2^{257} 1 es un número primo, lo cual sólo en años relativamente recientes se probó es falso. Sin embargo, aún antes de la refutación un intuicionista aceptaría que la afirmación "2^{257} 1 es un número primo o no lo es" es cierta pues, en principio, es posible calcular efectivamente el número 2^{257}-1 y luego, usando el algoritmo de la división, comprobar que dicho número carece de divisores diferentes de sí mismo y la unidad. Por el contrario, la afirmación "existen infinitos números primos P tales que $P+2$ es también primo o bien hay sólo un número finito de tales números P" no sería aceptada como cierta pues no se ha demostrado ninguna de las dos posibilidades ni se ha dado un método efectivc para resolver la cuestión. Se observa, en particular, que para el intuicionismo el estado de desarrollo de la matemática en cada momento es un factor que debe tenerse en cuenta. Estas consideraciones aparecen en forma más razonable si se interpretan las afirmaciones $p, q, \ldots$ como *problemas* matemáticos : Decir que p *es cierta* significará entonces que *el problema* p *tiene solución* mientras que p *es falsa* (ó también, *no* p *es cierta*) significará que *el problema* p *no tiene solución* ; según esto, la afirmación

$$p \text{ ó no } p$$

significará que o bien el problema p tiene solución o no la tiene y de este modo el Principio del Tercero Excluído puede considerarse, según lo anotara Brouwer , como una aplicación no justificada del llamado "principio de solubilidad esencial de todos los problemas matemáticos ", enunciado por Hilbert en 1900. Es éste un verdadero acto de fé según el cual todo problema matemático debe, en principio, poder *resolverse* sea positiva sea negativamente. Pero, como el mismo Hilbert lo notara más tarde, cuando se precisan los términos de esta discusión dentro del formalismo, el "principio" de solubilidad aparece totalmente desprovisto de fundamento surgiendo en su lugar un problema no trivial llamado de *Decisión* y, como Gödel lo demostrara más tarde, dentro de la misma aritmética (formalizada) existen proposiciones "indecidibles", esto es, proposiciones que no pueden probarse ni refutarse dentro del sistema.

La limitación en el uso del Principio del Tercero Excluído invalida muchos argumentos comunes. Para demostrar, por ejemplo, que (para números reales a y b) si $ab = 0$ entonces $a=0$ ó $b=0$ el procedimiento usual consiste en distinguir dos casos

(i) $a = 0$

(ii) $a \neq 0$; en este caso, de $ab = 0$ se obtiene $ab/_a = 0/a$, es decir $b = 0$;

y el principio mencionado garantiza que (i) ó (ii) es cierta. Pero si definimos $a = \frac{1}{10^n}$ donde n es el menor k tal que el k-simo dígito d_k en la representación decimal de $(\pi + e)^{\pi - e}$ es el primero de una sucesión de 100 dígitos, todos iguales a dk, si una tal sucesión existe y $a = 0$ en caso contrario, entonces a está bien definido desde el punto de vista intuicionista pues para obtener el m-simo término de su desarrollo decimal basta computar los primeros $m + 100$ términos del desarrollo decimal de $(\pi + e)^{\pi - e}$; sin embargo no se dispone de método alguno que permita decidir si $a = 0$ ó $a \neq 0$.

Sobre el *infinito* tiene también el Intuicionismo un enfoque particular : no se acepta el infinito en acto (*infinito actual*) sino en potencia (infinito potencial). En particular, el "conjunto" de los números naturales es "infinito" en cuanto dado un número natural cualquiera siempre puede pasarse al siguiente; sin embargo no se acepta la existencia actual de la totalidad de los números naturales.

Es claro que la noción de *conjunto* debe también tener un carácter peculiar: un *conjunto*, llamado por Brouwer *Spread* (extensión, propagación) es, en este contexto, una *ley* M por medio de la cual pueden construirse ciertos objetos matemáticos (los *elementos* de M). Es así como los elementos de un conjunto (infinito) no están dados de una vez por todas sino que están, por así decir, en un proceso permanente de formación : existen potencialmente por cuanto la ley M permite obtenerlos (construirlos) progresivamente. Una situación como esta se presenta al considerar *el conjunto de todas las proposiciones del idioma Castellano* : es claro que su totalidad no existe efectivamente, sino que, por medio de las reglas propias de este idioma, pueden construirse cada vez nuevas proposiciones.

En general, la doctrina intuicionista impone drásticas mutilaciones en la Matemática, especialmente en su nivel "superior" : conceptos transfinitos y análisis " infinitesimal". En consecuencia es muy improbable que sus principios de fundamentación sean adoptados aunque su crítica, debido a su sutileza y profundidad, ha tenido efectos positivos por cuanto ha obligado a los matemáticos a reconsiderar y analizar los fundamentos de su edificio. Muchos de los puntos de vista del intuicionismo han reaparecido, debidamente precisados, en posteriores desarrollos dentro del seno de la llamada Metamatemática.

* * *

Los infinitesimales

Los infinitesimales, aparentemente enterrados para siempre por Wierstrass , Dedekind, Cauchy y otros han vuelto a renacer, aunque sobre bases diferentes y sólidas. En efecto, en los trabajos de Abrahan Robinson se ha demostrado que el sistema $\mathbb{R}$ de los números reales puede extenderse hasta obtener un sistema "numérico" $\mathbb{R}^*$ el cual incluye números infinitamente grandes y números infinitamente pequeños. Ver, por ejemplo, las obras de Robinson *Non - Standard Analysis* (North- Holland, Amsterdam 1966) y "Topics in Non-Archimedean Mathematics" (Symposium on the Theory of Models; North Holland, Amsterdam, 1965).