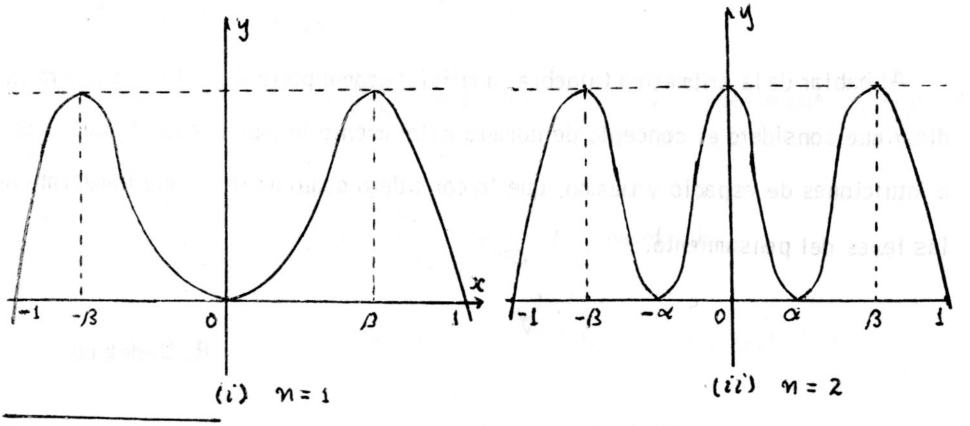
Boletín de Matemáticas
Vol. VII No. 1 , págs. 48 - 61

POLINOMIOS QUE TOMAN UN SOLO VALOR MAXIMO Y UN SOLO VALOR MINIMO

YU TAKEUCHI

§ 1. *Introducción.*

El año antepasado el profesor George Kemel (actual profesor de la Universidad del Valle) me preguntó si era posible encontrar los polinomios que tienen $(n+1)$ valores máximos iguales y n valores mínimos iguales como se muestra en la Figura 1. Según me dijo, quería utilizarlos en una investigación sobre algunas variedades y me explicó algo de la construcción de toros perforados. Yo no lo comprendí muy claramente (*) pero me pareció que el problema planteado era muy interesante y comencé a construir tales polinomios directamente como sigue.



(*) El artículo del Dr. Kemel "Variedades de género K en $\mathbb{R}^3$" será publicado próximamente en la Revista Colombiana de Matemáticas.

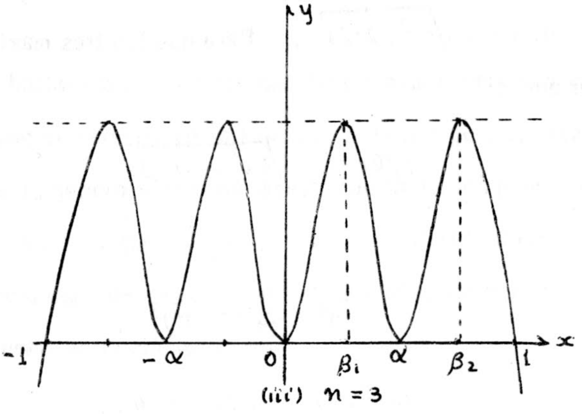


Figura 1

Suponiendo la simetría de los polinomios con respecto al origen como en la Figura 1, en caso de $n=1$ el polinomio tomará la forma (Fig. 1(i)):

$$f_1(x) = -x^2(x^2-1) ,$$

se observa que el polinomio f_1 toma un mínimo en $x=0$, máximos en $x = \pm 1/\sqrt{2}$, y precisamente los dos valores máximos son iguales :

$$f_1(1/\sqrt{2}) = f_1(-1/\sqrt{2}) = \tfrac{1}{4} .$$

Si $n=2$, el polinomio deseado tomará la forma :

$$f_2(x) = -(x^2-1)(x^2-\alpha^2)^2 .$$

Tenemos entonces :

$$f_2'(x) = -2x(x^2-\alpha^2)[3x^2-(\alpha^2+2)] ,$$

luego f_2 toma un valor mínimo cero en $x = \alpha$, $x = -\alpha$ y máximos en los tres puntos $x = 0$, $x = \pm \sqrt{(\alpha^2+2)/3}$. Para que los tres máximos sean iguales debemos tener que :

$$f_2(0) = f_2(\sqrt{(\alpha^2 + 2)/3})$$

O sea

$$\alpha^4 = \frac{4}{27}(1 - \alpha^2)^3 ,$$

$$(4\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 2)^2 = 0 .$$

Por lo tanto la constante α debe tener el valor $\frac{1}{2}$. Nótese que existe un único polinomio como el deseado.

En general, si $n = 2m$ (par) el polinomio en cuestión será :

$$f_n(x) = -(x^2 - 1)(x^2 - \alpha_1^2)^2(x^2 - \alpha_2^2)^2 \ldots (x^2 - \alpha_m^2)^2 ,$$

donde f_n toma el valor mínimo cero en $2m$ puntos $x = \pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \ldots, \pm\alpha_m$. El polinomio f_n tomará los valores máximos en $x = 0$ y en m puntos positivos y m puntos negativos (son simétricos con respecto al origen). Para que todos los valores máximos sean iguales se plantean m ecuaciones con las cuales podríamos determinar justamente m incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Lo mismo para el caso de $m = 2m+1$ (impar). Podríamos entonces imaginar que siempre existe un único polinomio (salvo un factor constante) para cada valor de n. Sin embargo esto no fue posible demostrarlo con este método directo puesto que un sistema de m ecuaciones no siempre posee soluciones reales.

§ 2. *Solución por medio de ecuaciones diferenciales*.

Se trata de hallar los polinomios que tienen exactamente un valor máximo y un valor mínimo como se muestra en la figura 2, o en la figura 3. Sea f tal polinomio; sin pérdida de generalidad supongamos que todos los puntos críticos de f están entre -1 y 1 y que 1 y 0 son los valores máximo y mínimo respectivamente. Primero consideremos el caso en que el grado del polinomio f es par (Fig. 2); suponemos adicionalmente que :

$$f(-1) = f(1) = 0 .$$

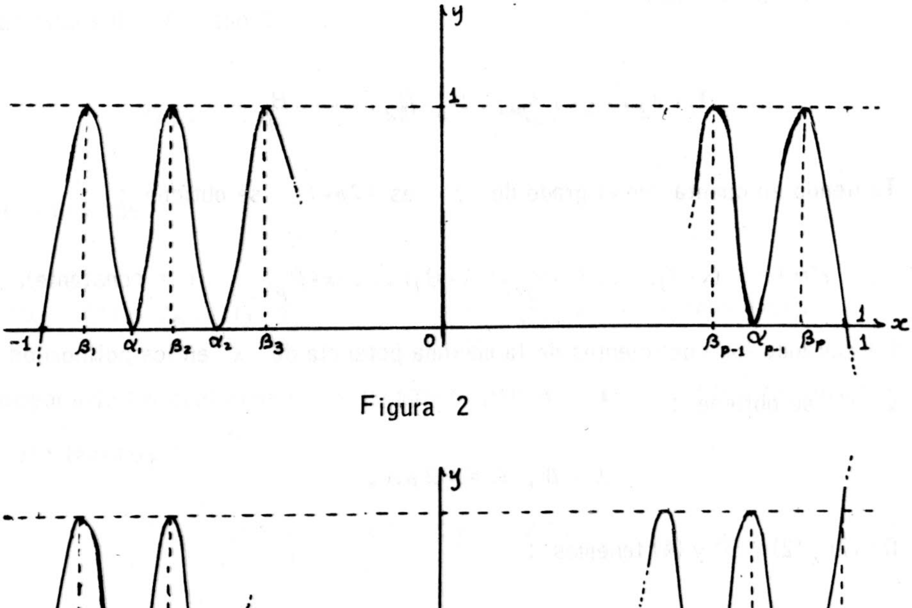


Figura 2

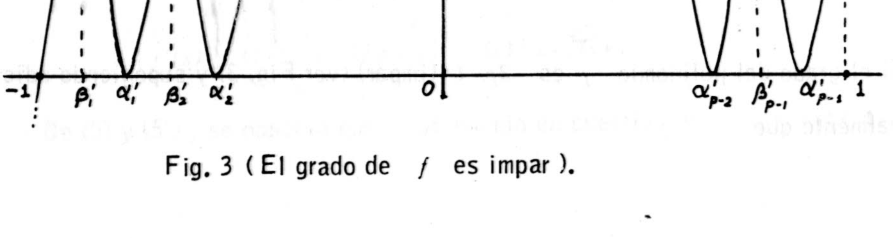


Fig. 3 (El grado de f es impar).

Suponiendo que f no tiene raíces complejas, sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ las raíces dobles de f; entonces tenemos (ver nota 1) :

$$f(x) = A\ (1 - x^2)\ (x - \alpha_1)^2 \ldots (x - \alpha_{p-1})^2 \qquad (1)$$

donde A es una constante. Si f toma máximos locales en $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, entonces $1 - f$ tiene las raíces dobles en $x = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, o sea :

$$1 - f(x) = B\,(x - \beta_1)^2\,(x - \beta_2)^2 \ldots (x - \beta_p)^2 \qquad (B = \text{constante}) \qquad (2)$$

ya que el polinomio en (2) y el polinomio en (1) tienen el mismo grado $2p$. Las raíces de $f'(x)$ son :

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p .$$

Teniendo en cuenta que el grado de f' es $2p - 1$, se obtiene :

$$f'(x) = C\,(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_{p-1})\,(x - \beta_1) \ldots (x - \beta_p) \qquad (C = \text{constante}). \quad (3)$$

Comparando los coeficientes de la máxima potencia de x en los polinomios f y f' se obtiene :

$$A = B\,, \quad C = -\,2\,p\,A\,. \qquad (4)$$

De (1) , (2) , (3) y (4) tenemos :

$$[\,f'(x)\,]^2\,(1 - x^2) = (2\,p)^2\ f(x)\ [1 - f(x)\,] \qquad (5)$$

Si el grado del polinomio f es $2p - 1$ (impar) (ver Fig. 3) y suponiendo adicionalmente que

$$f(-1) = 0 \ , \quad f(1) = 1 \ ,$$

sean $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{p-1}$ las raíces dobles de f. Entonces :

$$f(x) = A' \, (1+x)\,(x-\alpha'_1)^2\,(x-\alpha'_2)^2 \ldots (x-\alpha'_{p-1})^2 \ , \quad (A' = \text{constante}) \qquad (1')$$

Si f toma máximos locales en $x = \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{p-1}$ entonces $1-f$ tiene raíces dobles en $x = \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{p-1}$, luego :

$$1-f(x) = B' \, (1-x)\,(x-\beta'_1)^2\,(x-\beta'_2)^2 \ldots (x-\beta'_{p-1})^2 \quad (B' = \text{constante}) \qquad (2')$$

Las raíces de f' son :

$$\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{p-1}, \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{p-1} \ ,$$

luego tenemos :

$$f'(x) = C'\,(x-\alpha'_1)\ldots(x-\alpha'_{p-1})\,(x-\beta'_1)\ldots(x-\beta'_{p-1}) \quad (C' = \text{constante}). \qquad (3')$$

Comparando los coeficientes de la máxima potencia de x en los polinomios f y f' tenemos :

$$A' = B' \ , \quad C' = (2p-1)\,A' \ , \qquad (4')$$

así tenemos la ecuación :

$$[f'(x)]^2\,(1-x^2) = (2p-1)^2 \; f(x)\,[1-f(x)] \qquad (5')$$

De (5) y (5'), se observa que el polinomio en cuestión, si existe, debe cumplir la siguiente ecuación diferencial :

$$(y')^2 \ (1-x^2) = n^2 \ y(1-y) \tag{6}$$

donde n es el grado del polinomio(*) .

La ecuación diferencial (6) es del tipo de variables separables. Observando que $(1-x^2)$ y $y(1-y)$ tienen el mismo signo tenemos :

$$\frac{y'}{\sqrt{y(y-1)}} = \pm \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \ ,$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y(y-1)}} = \pm \frac{n}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{si} \quad |x| \geq 1 \ ,$$

luego, la solución es :

$$\log(-y+\tfrac{1}{2}+\sqrt{y^2-y}) = n \log(-x-\sqrt{x^2-1}) + C_1 \quad \text{si} \quad x \leq -1$$

$$2y-1 = sen\ (n\ sen^{-1} x + C_2) \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\log\left|-y+\tfrac{1}{2}+\sqrt{y^2-y}\right| = n \log(x+\sqrt{x^2-1}) + C_3 \quad \text{si} \quad x \geq 1 \ .$$

De la condición inicial : $y=0$ cuando $x=-1$ se tiene :

$$C_1 = -\log 2 \ , \quad C_2 = \frac{\pi}{2}(n-1) \ .$$

---

*) Cuando el doctor Kemel me planteó el problema llegué inmediatamente a la ecuación (6) y traté de demostrar por métodos directos que esta ecuación tiene una solución polinómica de grado n. No pude obtener el resultado deseado a causa de la gran dificultad de cálculo debida a la no linealidad de la ecuación. Posteriormente (¡cuando la Universidad estuvo cerrada durante 6 meses!) hallé la solución polinómica de (6) para n=3,4,..12 por un cálculo directo y fastidioso.

Con este valor de C_2 se tiene el valor de $y(1)$:

$$y(1) = (1 + (-1)^{n-1})/2 = 0 \quad \text{si } n \text{ es par, } 1 \text{ si } n \text{ es impar;}$$

por lo tanto :

$$C_3 = - \log 2 .$$

Así obtenemos :

[I] $\quad n = 2p = par$

$$\left.\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2} + (-1)^{p-1} \cos (n \operatorname{sen}^{-1} x) && \text{en} \quad |x| \leq 1 \\ y &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n] && \text{en} \quad |x| \geq 1 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

[II] $\quad n = 2p - 1 \ impar$

$$\left.\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(-1)^{p-1} \operatorname{sen} (n \operatorname{sen}^{-1} x) && \text{en} \quad |x| \leq 1 \\ y &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n] && \text{en} \quad |x| \leq 1 . \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

La función y para $|x| \geq 1$ dada en (7) o en (8) es un polinomio de grado n, como puede verse a continuación :

$$\tfrac{1}{4}[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n]$$

$$= \tfrac{1}{4}\Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2 - 1)^{k/2} x^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x^2 - 1)^{k/2} x^{n-k}\Big]$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\sum_{j=0}^{\leq n/2} \binom{n}{2j} (x^2 - 1)^j x^{n-2j}\Big] = \frac{T_n(x)}{2}$$

donde T_n es el polinomio de Tchebysheff de grado n, ([1], [2]), luego :

$$y = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} T_n(x) \qquad \text{si} \quad n \quad \text{es par}$$

$$y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} T_n(x) \qquad \text{si} \quad n \quad \text{es impar.} \tag{9}$$

Como el polinomio (9) satisface la ecuación diferencial (6) en $|x| \geq 1$, entonces (9) debe satisfacer la ecuación (6) para todo x, o sea que la solución dada en (7) o en (8) es un polinomio de grado n, así que :

$$y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} (-1)^{p-1} \cos (n \operatorname{sen}^{-1} x) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} T_n(x) \qquad \text{donde} \quad n = 2p ,$$

$$y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} (-1)^{p-1} \operatorname{sen} (n \operatorname{sen}^{-1} x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} T_n(x) \qquad \text{donde} \quad n = 2p - 1 \tag{10}$$

§ 3. ***Ecuación diferencial de Tchebysheff.***

El resultado (9) se obtiene también de la siguiente manera :

Derivando la ecuación (6) :

$$2 (1 - x^2) y' y'' - 2x (y')^2 = n^2 (1 - 2y) y' .$$

Multiplicando por y' :

$$\tfrac{1}{4} (1 - x^2) (y')^2 y'' - 2x (y')^2 y' = n^2 (1 - 2y) (y')^2 \tag{11}$$

Reemplazando (6) en (11) :

$$2 n^2 y (1 - y) y'' - \frac{2x \, n^2 (1 - y) y}{1 - x^2} y' = n^2 (1 - 2y) \frac{n^2 y (1 - y)}{1 - x^2}$$

o sea :

$$\frac{y(1-y)}{1-x^2}\,\{\,(1-x^2)\,y'' - xy' + n^2\,y - \frac{n^2}{2}\,\} = 0\ .$$

Así tenemos una ecuación diferencial lineal de segundo orden :

$$(1-x^2)\,y'' - xy' + n^2\,y = \tfrac{1}{2}\,n^2\,, \tag{12}$$

cuya solución general es *([1] [2])* :

$$y = \tfrac{1}{2} + E_1\,T_n(x) + E_2\,U_n(x)$$

donde T_n , U_n son las funciones de Tchebysheff de primera y segunda clase respectivamente. Como U_n no es un polinomio, la solución polinómica es de la forma :

$$y = \tfrac{1}{2} + E_1\,T_n(x)\ .$$

Teniendo en cuenta que el polinomio de Tchebysheff tiene el valor máximo (local) 1 y el valor mínimo (local) -1 , y que $T_n(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, se tiene :

$$E_1 = -\tfrac{1}{2} \quad \text{si} \quad n \quad \text{es par,} \quad E_1 = \tfrac{1}{2} \quad \text{si} \quad n \quad \text{es impar.}$$

§ *4. **Los máximos y mínimos de la solución polinómica de (6).***

Veamos ahora que el polinomio obtenido en (9) satisface las condiciones requeridas, o sea que la solución (7) u (8) tiene exactamente $(p-1)$ raíces dobles entre -1 y 1 .

[I] Si $n = 2p$, de (7) y (10) se tiene para $|x| \leq 1$:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\{ 1 - T_n(x) \} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(-1)^{p-1} \cos (2p \operatorname{sen}^{-1} x)$$

$$= \begin{cases} \cos^2 p\,\theta & \text{si } p \text{ es impar} \\ \operatorname{sen}^2 p\theta & \text{si } p \text{ es par} \end{cases}$$

donde $x = \operatorname{sen}\theta$.

Por lo tanto, las $p-1$ raíces dobles de f son :

$$\pm \operatorname{sen} \frac{\pi}{2p}, \pm \operatorname{sen} \frac{3p}{2\pi}, \ldots, \pm \operatorname{sen} \frac{(p-2)\pi}{2p} \qquad \text{si } p \text{ es impar},$$

$$0, \pm \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2p}, \pm \operatorname{sen} \frac{4\pi}{2p}, \ldots, \pm \operatorname{sen} \frac{p-2}{2p}\pi \qquad \text{si } p \text{ es par}.$$

[II] Si $n = 2p - 1$ (impar) de (10) se tiene, para $|x| < 1$:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\{ 1 + T_n(x) \} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(-1)^{p-1} \operatorname{sen} (n \operatorname{sen}^{-1} x)$$

$$= \tfrac{1}{2}[1 + \cos n\theta] = \cos^2 (p-\tfrac{1}{2})\,\theta ,$$

donde $x = \cos\theta$. Así, las $p-1$ raíces dobles del polinomio $f(x)$ son :

$$\cos \frac{\pi}{n}, \cos \frac{3\pi}{n}, \cos \frac{5\pi}{n}, \ldots, \cos \frac{2p-3}{n}\pi$$

En conclusión, salvo una transformación de primer grado tenemos el siguiente teorema :

Teorema. *Existe un único polinomio de grado $2p$ que tiene exactamente un valor mínimo en $p-1$ puntos y un valor máximo en p puntos. Existe un único polinomio de grado $2p-1$ que tiene exactamente un valor mínimo en $p-1$ puntos y un valor máximo en $p-1$ puntos.*

Nota 1. Se han considerado polinomios tales que la multiplicidad en los puntos críticos es exactamente igual a dos. Existen polinomios que no satisfacen esta condición adicional, por ejemplo, si

$$g(x) = \frac{27}{4}(1-x^2)\,x^4 \quad ,$$

entonces g tiene una raíz cuádruple en $x = 0$ y $1-g$ tiene dos raíces dobles en $x = \sqrt{2/3}$ y $x = -\sqrt{2/3}$, y dos raíces complejas. En general, si un polinomio f tiene raíces reales de multiplicidad mayor que 2, $1-f$ tiene raíces complejas.

Nota 2. De las conocidas fórmulas de Tchebysheff [3] :

$$\cos p\theta = \pm\sqrt{1-x^2}\,\{\, 1 - \frac{p^2-1^2}{2!}\,x^2 + \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{4!}\,x^4 - \dots \}$$

$$\operatorname{sen} p\theta = \pm\sqrt{1-x^2}\,\{\, px - \frac{p(p^2-2^2)}{3!}\,x^3 + \frac{p(p^2-2^2)(p^2-4^2)}{5!}\,x^5 - \dots \}$$

$$(x = \operatorname{sen}\theta)\ ,$$

se obtiene una fórmula explícita para el polinomio f como sigue :

$$f(x) = (1 - x^2)\,[\,1 - \frac{p^2 - 1^2}{2!}\,x^2 + \ldots\,]^2$$

$$= (1 - x^2)\,[\,\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m+j-1}{2j} (2x)^{2j}\,]^2 ,$$

si $n = 2p$ (par) y $p = 2m-1$ (impar) ,

$$f(x) = (1 - x^2)\,[\,px - \frac{p(p^2 - 2^2)}{3!}\,x^3 + \ldots\,]^2$$

$$= 4\,(1 - x^2)\,x^2\,[\,\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m+j}{2j+1} (2x)^{2j}\,]^2$$

si $n = 2p$ (par) y $p = 2m$ (par) .

Dejamos al lector la obtención de la fórmula explícita del polinomio en cuestión para el caso de $n = 2p - 1$ (impar) .

Nota 3. Aplicando un método similar al utilizado en este artículo se puede construir un polinomio que toma un valor mínimo cero en $2m$ puntos, un valor máximo M en $x = 0$ y un valor máximo 1 en $2m$ puntos como se muestra en la figura 4; los detalles los dejamos al lector.

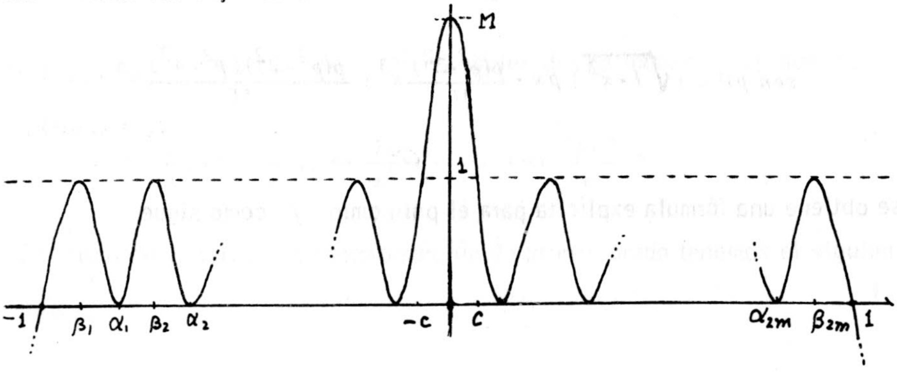


Figura 4

Bibliografía

[1] Erdelyi, Magnus, Oberhettinger. *Higher Transcendental Functions*, Vol. II pp. 183-187, Mc Graw Hill, New York, 1953 .

[2] K. Yoshida. Diccionario de Matemática Aplicada, pp. 364-365, Maruzen Tokyo, 1957 (en japonés).

[3] T. J. Bromwich. *An introduction to the theory of infinite series*,, second Ed. pp.202-208, Mc Millan, London, 1955 .

* * *

Lógica y Matemática

Dedekind opina también que el concepto (teoría) de número es parte de la lógica; pero sus trabajos difícilmente refuerzan esta opinión, porque las expresiones "sistema" ("clase") y "una cosa pertenece a una cosa" usados por él no son usuales en lógica y no se reducen a nociones lógicas aceptadas.

G. Frege.