Boletín de Matemáticas
Vol. VII, No. 2, pp. 69 - 99

NUMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

YU TAKEUCHI

0. *Introducción.*

El concepto de *número de elementos de un conjunto* está incluido en el plan de estudios de 2o. de bachillerato; sin embargo, aún para estudiantes avanzados de la Carrera de Matemáticas, este concepto no es fácil de dominar.

En la Figura 1 se muestra un conjunto de frutas; los niños de kinder saben ya que aquí hay "tres" frutas. Analicemos cómo las cuentan :

Figura 1

Algunos niños las contarán como se muestra en la Figura 2, otros niños las contarán como en la Figura 3, ó la Figura 4. En cualquier caso, siempre hay que establecer una *correspondencia* de las frutas a los números naturales sucesivos (representados convenientemente por los dedos) *uno*, *dos* y *tres*, de tal manera que a ca-

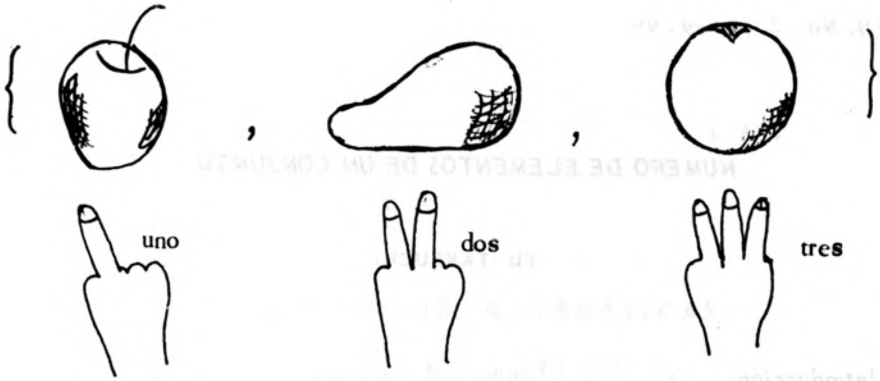

Figura 2

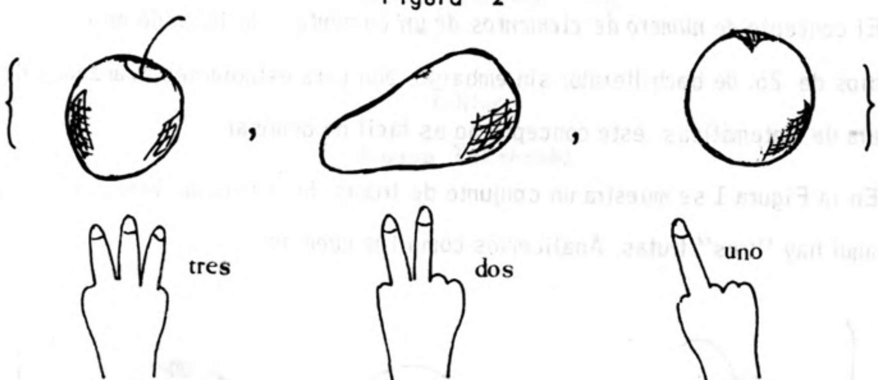

Figura 3

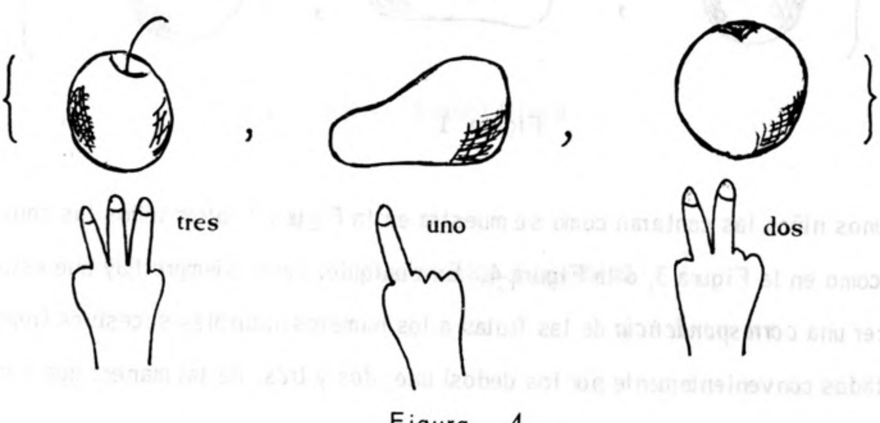

Figura 4

da fruta se le asigna *un sólo número*; así que se obtiene *el número tres* como el último número en estas correspondencias (en la Figura 2 el número correspondiente a la naranja, en la Figura 3 el número correspondiente a la manzana, y en la Figura 4 el número correspondiente a la pera) y ésto es precisamente *el número de frutas*.

A continuación estudiaremos matemáticamente el mecanismo intuitivo del "contar" observado anteriormente..

1. Equivalencia (o equipotencia) de dos conjuntos.

Dados dos conjuntos A y B decimos que A es *equivalente* (ó *equipotente*) a B si es posible establecer una correspondencia *uno a uno* entre los elementos de A y de B (en otras palabras, si existe una función uno a uno de A sobre B) y se nota :

$$A \sim B \tag{1}$$

En el ejemplo del parágrafo anterior, la Figura 2 (ó las Figuras 3 y 4) nos muestra que el conjunto de las frutas es equivalente al conjunto numérico $\{1, 2, 3\}$.

Ejemplo 1. Demostrar la equivalencia de los intervalos :

(i) $(0, 1) \sim (a, b)$

(ii) $(0, 1) \sim (0, \infty)$

(iii) $(0, 1) \sim (-\infty, \infty)$.

Solución. (i) Considerar la correspondencia $f: (0,1) \to (a,b)$ definida por :

$$x \in (0, 1)\,,\quad f(x) = a + x\,(b - a) \in (a, b)$$

(ii) Considerar la correspondencia $g : (0,1) \to (0, \infty)$ definida por :

$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$x \in (0, 1)\ ,\ g(x) = \frac{1}{x} - 1 \in (0, \infty)\ .$$

(iii) Considerar la función $h : (0,1) \mapsto (-\infty, \infty)$ definida por :

$$h(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{n} & \text{si} \quad x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{1 - x} - 2 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1)\ . \end{cases}$$

para cada $x \in (0, 1)$.

Dejamos al lector la comprobación de que estas funciones f, g y h son *uno a uno*.

▲

Ejercicio 1. Demostrar que :

(i) $A \sim A$; (ii) si $A \sim B$ entonces $B \sim A$; (iii) si $A \sim B$, $B \sim C$ entonces $A \sim C$.

Solución. (i) Sea f la función idéntica definida en A :

$$f(x) = x \qquad \text{para todo} \quad x \in A\ .$$

Entonces f es *uno a uno* y *sobre* : por lo tanto se tiene que $A \sim A$.

(ii) Si $A \sim B$ existe una función g, de A sobre B y *uno a uno*. La función inversa g^{-1} existe, es *uno a uno* y

$$g^{-1}(B) = A\ .$$

Por lo tanto se tiene que $B \sim A$.

(iii) Si $A \sim B$, $B \sim C$ existen dos funciones, g y h , *uno a uno* tales que :

$$g(A) = B \ , \quad h(B) = C \ .$$

Dejamos al lector la comprobación de que la función compuesta $h \circ g$ nos garantiza la equivalencia de A y C. ▲

Por el ejercicio 1, la equivalencia (1) (ó equipotencia) es una *relación de equivalencia.*

***Ejercicio* 2.** Supóngase que $A \sim A_1$ y $B \sim B_1$. Demostrar :

(i) $A \times B \sim A_1 \times B_1$

(ii) Si $A \cap B = \phi$, $A_1 \cap B_1 = \phi$ entonces $A \cup B \sim A_1 \cup B_1$.

Solución. Sea f una aplicación *uno a uno* de A *sobre* A_1 y g una aplicación *uno a uno* de B *sobre* B_1.

(i) Definimos una aplicación F de $A \times B$ en $A_1 \times B_1$, en la forma siguiente :

$$F(x, y) = (\, f(x),\ g(y)\,) \ ; \quad x \in A \ , \ y \in B \ .$$

Si $F(x,y) = F(x_1, y_1)$ se tiene :

$$(f(x) \ , \ g(y)\,) = (\, f(x_1) \ , \ g(y_1)\,)$$

o sea que $f(x) = f(x_1)$, $g(y) = g(y_1)$.

Esto es, $x = x_1$, $y = y_1$, por lo tanto F es *uno a uno*. Dejamos al lector la comprobación de que F es *sobre* .

(ii) Consideremos la siguiente aplicación G de $A \cup B$ en $A_1 \cup B_1$:

$$G(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in A \ ,$$

$$G(y) = g(y) \quad \text{si} \quad x \in B \ .$$

El lector puede demostrar que G es *uno a uno* y *sobre*. ▲

Ejercicio 3. Demostrar la equivalencia de los intervalos :

$$[0, \infty) \sim (-\infty, \infty) \sim (0, \infty)$$

Solución. Por el Ejemplo 1 y el Ejercicio 1, basta demostrar que :

$$[0, \infty) \sim (-\infty, \infty) .$$

Consideramos la función $g : [0, \infty) \to (-\infty, \infty)$ definida por :

$$g(x) = \begin{cases} x - n & \text{si } x \in [2n, 2n+1), \text{ donde } n = 0, 1, 2, \ldots \\ x - 3n + 1 & \text{si } x \in [2n-1, 2n), \text{ donde } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Dejamos al lector la comprobación de que esta función g nos garantiza la equivalencia de $[0, \infty)$ y $(-\infty, \infty)$.

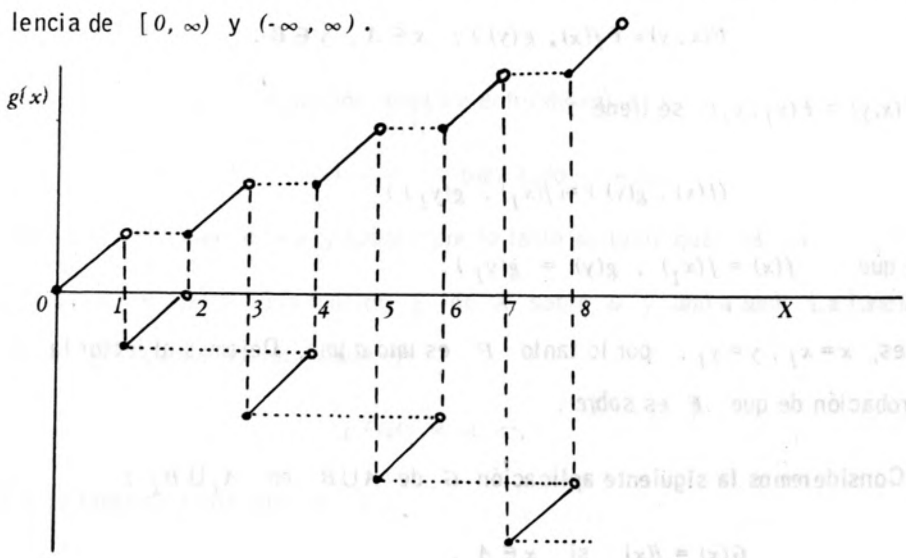

Figura 5. Gráfica de g

- ***Ejercicio 4.*** Demostrar que si

$$A \sim \{\, 1, 2, 3, \ldots, m \,\} \quad \text{y} \quad A \sim \{\, 1, 2, 3, \ldots, n \,\} \;,$$

entonces, $m = n$.

Demostración. Por el ejercicio 1 se tiene que

$$\{\, 1, 2, \ldots, m \,\} \sim \{\, 1, 2, \ldots, n \,\} \;,$$

o sea que existe una aplicación f, uno a uno tal que

$$f(\{\, 1, 2, \ldots, m \,\}) = \{\, 1, 2, \ldots, n \,\} .$$

$f(m)$ es un número natural entre 1 y n, la aplicación f establece la siguiente equivalencia :

$$\{\, 1, 2, \ldots, m\text{-}1 \,\} \sim \{ 1, 2, \ldots, n \,\} - \{\, f(m) \,\}$$

Pero, (ver la Fig. 6) :

$$\{\, 1, 2, \ldots, n \,\} - \{\, f(m) \,\} \sim \{\, 1, 2, \ldots, n\text{-}1 \,\} \;, \tag{2}$$

luego :

$$\{ 1, 2, \ldots, m\text{-}1 \,\} \sim \{\, 1, 2, \ldots, n\text{-}1 \,\} \tag{3}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\{\, 1, & 2, & \ldots, & f(m) - 1 \;, & f(m) + 1, & \ldots, & n \,\} \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\
\{\, 1, & 2, & \ldots, & f(m) - 1 \;, & f(m) \;, & \ldots, & n\text{-}1 \,\}
\end{array}$$

Figura 6. Esta correspondencia garantiza la equivalencia (2) .

Y así, sucesivamente, si $m \geq n$ tenemos :

$$\{ 1, \ldots, m-n+1 \} \sim \{ 1 \} \quad ,$$

esto es :

$$m = n .$$

ya que $m - n + 1 = 1$. ▲

Si un conjunto A es equivalente al conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ decimos que "A es un conjunto *finito*" y que "A *tiene* m *elementos*" (ó que m es el *número de elementos* del conjunto A). De acuerdo con el Ejercicio 4, el número de elementos está *bien definido*, en términos más intuitivos, el número de elementos de un conjunto es *independiente* de la manera de contarlos, según se observó en el parágrafo anterior.

***Ejemplo* 2.** Un conjunto acotado de números naturales es finito.

***Solución*.** Sea A un conjunto acotado de números naturales, sean :

$a(1)$ = el mínimo de A ,

$a(2)$ = el mínimo de $A - \{ a(1) \}$,

$a(3)$ = el mínimo de $A - \{ a(1) , a(2) \}$,

Si M es una cota del conjunto A , el procedimiento anterior debe acabar al cabo de, a lo más, M pasos ; o sea que existe $m \, (m \leq M)$ tal que $a(m)$ = el mínimo de $A - \{ a(1) , a(2), \ldots , a(m-1) \}$ y $A = \{ a(1), a(2), \ldots , a(m) \}$.

Es evidente que A es un conjunto finito de m elementos.

***Ejemplo* 3.** Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de todos los números naturales. Entonces $\mathbb{N}$ *no es finito.*

Solución. Supongamos que $\mathbb{N}$ fuera finito, entonces existiría un m tal que

$$\mathbb{N} \sim \{ 1, 2, 3, \ldots, m \}.$$

Por un procedimiento similar a la demostración del Ejercicio 3 se tendría :

$$\mathbb{N} - \{ 1, 2, 3, \ldots, m\text{-}1 \} \sim \{ 1 \}.$$

Esto es imposible ya que $\mathbb{N} - \{ 1, 2, \ldots, m\text{-}1 \}$ tiene dos elementos distintos, por ejemplo, m y $m+1$.

***Ejercicio* 5.** Sean A, B dos conjuntos finitos disyuntos de m, k elementos respectivamente. Demostrar que $A \cup B$ tiene $m+k$ elementos .

Solución. Tenemos :

$$A \sim \{ 1, 2, \ldots, m \} \text{ y } B \sim \{1, 2, \ldots, k \} .$$

Evidentemente se tiene :

$$B \sim \{ 1, 2, \ldots, k \} \sim \{ m+1, m+2, \ldots, m+k \} ,$$

luego (ver la Fig. 7) :

$$A \cup B \sim \{ 1, 2, \ldots, m \} \cup \{(m+1), (m+2), \ldots, (m+k) \}$$

$$= \{ 1, 2, 3, \ldots, m+k \}$$

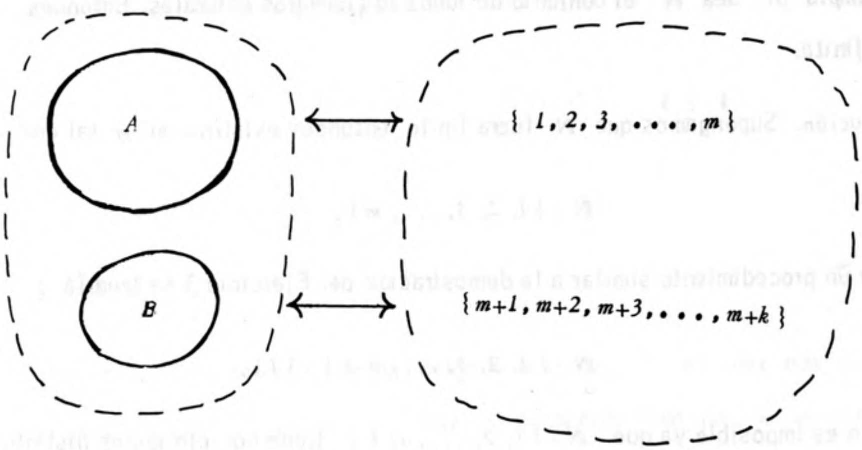

Figura 7

Dejamos al lector los detalles de la demostración .

Ejercicio 6. Demostrar que cualquier sub-conjunto no vacío de un conjunto finito es finito.

Demostración. Sea m el número de elementos de un conjunto finito A, si $B \subset A$ entonces B es equivalente a un sub-conjunto de $\{1, 2, \ldots, m\}$, digamos S. Por el Ejemplo 2 se tiene que S es finito, por lo tanto B es finito . ▲

Ejercicio 7. Demostrar que un conjunto finito no es equivalente a ningún sub-conjunto propio.

Demostración. Sea B un sub-conjunto propio (no vacío) de un conjunto finito A, entonces

$$A = B \cup (A - B) \quad , \quad A - B \neq \phi$$

Si $m(A)$; $m(B)$, $m(A-B)$ son los números de elementos de los conjuntos A, B y

A-B respectivamente, entonces, por el Ejercicio 5, tenemos :

$$m(A) = m(B) + m(A-B) .$$

Esto es :

$$m(A) > m(B) \quad ,$$

o sea que A y B no son equivalentes . ▲

***Ejercicio* 8.** Sea A un conjunto finito y B un sub-conjunto de A. Supongamos que $m(A)$ y $m(B)$ designan el númerc de elementos de A y de B respectivamente, demostrar que :

$$A = B \quad \text{sí y sólo si} \quad m(A) = m(B) .$$

***Sugerencia*.** Por el Ejercicio 7 se tiene que :

$$\text{si} \quad B \neq A \quad \text{entonces} \quad m(B) < m(A)$$ ▲

***Ejercicio* 9.** Sea A un conjunto de k números naturales. Demostrar que A tiene la forma :

$$A = \{ n_1 , n_2 , n_3 , \ldots , n_k \} \quad ,$$

donde

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k , \qquad\qquad n_1, n_2, \ldots , n_k \in \mathbb{N} \; .$$

***Solución*.** Sean :

$$n_1 = \text{el mínimo de } A ,$$
$$n_2 = \text{el mínimo de } A - \{ n_1 \}$$

$$n_3 = \text{ el mínimo de } A - \{ n_1, n_2 \}$$

$$\dots$$

$$n_k = \text{ el mínimo de } A - \{ n_1, n_2, \dots, n_{k-1} \}.$$

El lector debe demostrar que :

(i) Si $h < k$

$$A - \{ n_1, n_2, \dots, n_h \} \neq \phi .$$

(ii) $A = \{ n_1, n_2, \dots, n_k \}$ ▲

Ejercicio 10. Demostrar que un conjunto finito de números naturales tiene un elemento máximo.

Sugerencia. Aplicar el Ejercicio 9.

Ejercicio 11. Demostrar que la unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito.

Sugerencia. Sean A, B finitos, entonces

$$A \cup B = A \cup (B - A) .$$

Aplicar el Ejercicio 5 y el Ejercicio 6.

Ejercicio 12. Demostrar que la unión de *un número finito* de conjuntos finitos es finito.

Dejamos la demostración al lector.

2. *Conjuntos infinitos.*

Se dice que un conjunto (no vacío) es *infinito* si *no es finito*. En el Ejemplo 3 hemos visto que $\mathbb{N}$ es infinito.

Ejemplo 4. Los conjuntos numéricos $Z, Q, \mathbb{R}$ son infinitos.

Demostración. Si Z (ó $Q, \mathbb{R}$) fuera finito entonces $\mathbb{N}$ sería finito ya que $\mathbb{N} \subset Z$. (Ejercicio 5). ▲

Ejercicio 13. Demostrar que un conjunto es infinito si posee un sub-conjunto infinito.

Sugerencia. Si el conjunto fuera finito, cualquier sub-conjunto sería finito (Ejercicio 6).

Ejercicio 14. Cualquier conjunto infinito contiene un sub-conjunto equivalente a $\mathbb{N}$.

Demostración. Sea A un conjunto infinito.

Como A *no es vacío*, existe un elemento de A, digamos a_1. Ahora bien, $A - \{a_1\}$ no es vacío (si $A - \{a_1\}$ fuera vacío A sería finito contra la hipótesis). Luego existe un elemento de $A - \{a_1\}$, digamos a_2. Y así sucesivamente. En general, el conjunto

$$A - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

no es vacío, luego existe $a_{n+1} \in A - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

El conjunto $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ es equivalente a $\mathbb{N}$, y

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset A.$$

Decimos que un conjunto A es *contablemente* (ó *enumerablemente*) *infinito* si $A \sim \mathbb{N}$. Un conjunto es *contable* (o *numerable*) si es *vacío*, ó *finito* ó *contablemente infinito*.

Si A es contablemente infinito, existe una correspondencia (ó aplicación) uno a uno entre A y $\mathbb{N}$. Sea a_1 el elemento de A correspondiente a $1 \in \mathbb{N}$ por esta aplicación, a_2 el elemento de A correspondiente a $2 \in \mathbb{N}$, y en general, a_n el elemento de A correspondiente a $n \in \mathbb{N}$ (ver Fig. 8). En otras palabras,

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
A = \{ & a_1, & a_2, & a_3 & , \ldots\ldots, & a_n & , \ldots & \} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
\mathbb{N} = \{ & 1, & 2, & 3 & , \ldots\ldots & n & , \ldots & \}
\end{array}
$$

correspondencia entre A y $\mathbb{N}$

Fig. 8 $(A \sim \mathbb{N})$

todos los elementos del conjunto A pueden ser marcados por *subíndices naturales*. Nótese que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$ en esta expresión del conjunto A puesto que la correspondencia es *uno a uno*. Análogamente, si B es un *conjunto finito de* k *elementos* tenemos :

$$
\begin{array}{cccccc}
B = & \{ \; a_1, & a_2, & \ldots, & a_k & \} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
 & \{ \;\; 1, & 2, & \ldots, & k & \} .
\end{array}
$$

El ejercicio 14 puede formularse como sigue :

Cualquier conjunto infinito tiene un *subconjunto contablemente infinito*.

Se puede expresar este hecho en forma intuitiva diciendo que : Los conjuntos contables son *más pequeños* que todos los otros conjuntos infinitos. En resumen :

$$\{ \textit{Conjunto vacío} \} \longleftrightarrow \text{no tiene elemento}$$

$$\{ \textit{Conjuntos finitos} \} \sim \{ 1, 2, 3, \ldots, m \}$$

$$\{ \textit{Conjuntos infinitos contables} \} \sim \mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$$

$$\{ \textit{Conjuntos infinitos no contables} \} .$$

***Ejemplo* 5.** (i) Z es enumerable ya que la siguiente aplicación $f : Z \to \mathbb{N}$ es uno a uno.

$$f(0) = 1 , \quad f(n) = 2n , \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$f(-n) = 2n+1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(ii) $A = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$ es contablemente infinito ya que la aplicación $g : g(2n) = n$ de A sobre $\mathbb{N}$ es uno a uno.

***Ejercicio* 15.** Cualquier subconjunto de un conjunto contable es contable.

Demostración. Basta demostrar que cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ es contable. Sea $A \subset \mathbb{N}$, si A es finito o vacío entonces A es contable *por definición* . Si A es infinito, A es de la forma (ver Ejercicio 9) :

$$A = \{ n_1, n_2, n_3, \ldots \} , \quad n_1 < n_2 < n_3 < \cdots ,$$

o sea que A es contable. ▲

***Ejercicio* 16.** Si A es infinito entonces A es equivalente a alguno de sus subconjuntos propios .

Nota. Esta propiedad, combinada con el Ejercicio 7, caracteriza los conjuntos infinitos. Es decir, *un conjunto* A *es infinito si y sólo si* A *es equivalente a algún* B *de sus subconjuntos propios.*

Demostración. Por el Ejercicio 14 , existe *un subconjunto de* A , enumerablemente infinito, por ejemplo :

$$B = \{ b_1 , b_2 , b_3 , \ldots \} \subset A .$$

Definamos la siguiente aplicación f :

(i) f es idéntica en $A - B$ $(A - B$ puede ser vacío) .

(ii) $f(b_n) = b_{2n}$ $\qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

Evidentemente f es uno a uno y su recorrido es :

$$(A - B) \cup \{ b_2 , b_4 , b_6 , \ldots \}$$

lo cual constituye un subconjunto *propio* de A . (Ver Fig. 9)

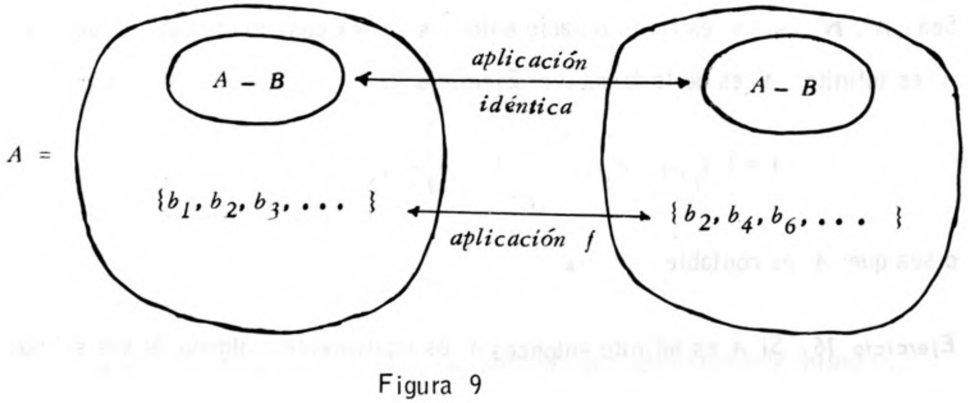

Figura 9

Ejercicio 17. La unión de dos conjuntos contables es contable.

Demostración. Sean A, B dos conjuntos contables.

(i) Suponemos primero que A y B son disyuntos.

Si A y B son finitos, entonces $A \cup B$ es finito, luego es contable .

Si A y B son infinitos, digamos :

$$A = \{ a_1 , a_2 , a_3 , \dots \} , \quad B = \{ b_1 , b_2 , b_3 , \dots \}$$

entonces :

$$A \cup B = \{ a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , a_3 , b_3 , \dots , a_n , b_n , \dots \} ,$$

por lo tanto $A \cup B$ es contablemente infinito.

Si A es finito y B es infinito :

$$A = \{ a_1 , a_2 , \dots , a_m \} , \; B = \{ b_1 , b_2 , b_3 , \dots \}$$

entonces :

$$A \cup B = \{ a_1 , a_2 , \dots , a_m , b_1 , b_2 , b_3 , \dots , b_n , \dots \} ,$$

por lo tanto $A \cup B$ es contablemente infinito .

(ii) Caso general. Tenemos :

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

donde $B\text{-}A$ es contable (Ejercicio 15), como A y $B\text{-}A$ son disyuntos se tiene que $A \cup (B - A)$ es contable . ▲

Ejercicio 18. La unión de un número finito de conjuntos contables es contable.

La demostración la dejamos al lector.

Ejercicio 19. Sean A y B dos conjuntos contables, entonces $A \times B$ (el producto cartesiano de A y B) es contable.

Demostración. (i) Suponemos que A y B son infinitos, entonces :

$$A \sim \mathbb{N} \sim \{ 2^n \;/\; n \in \mathbb{N} \} \quad ,$$

$$B \sim \mathbb{N} \sim \{ 3^n / \; n \in \mathbb{N} \} \quad ,$$

luego :

$$A \times B \sim \{ (2^n \, , \, 3^k) \,/\; n,k \in \mathbb{N} \} \sim \{ 2^n \cdot 3^k / \; n, k \in \mathbb{N} \} \, .$$

Como $\{ 2^n \cdot 3^k / \, n \, , k \in \mathbb{N} \}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$, entonces es contable, por lo tanto $A \times B$ es contable.

(ii) *Caso general* . Sean $A_o = A \cup \mathbb{N}$ y $B_o = B \cup \mathbb{N}$. Entonces A_o , B_o son contablemente infinitos (Ejercicio 17), luego se tiene que $A_o \times B_o$ es contable. (Parte (i)) . Como $A \times B \subset A_o \times B_o$, por el ejercicio 15 tenemos que $A \times B$ es contable.

Ejercicio 20. Sean $A_1 , A_2 , \ldots , A_p$ conjuntos contables. Entonces, el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p$ es contable .

La demostración la dejamos al lector.

Ejercicio 21. Sea $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una colección contable de conjuntos contables, entonces la unión total $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ es contable.

Demostración. Utilizando la técnica empleada en la demostración del Ejercicio 19 se puede suponer que A_j es contablemente infinito para todo j.

(i) Suponemos que $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son disyuntos.

Sean :

$$A_j = \{ a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, a_3^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)} \ldots \}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Consideremos la aplicación $f: \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por :

$$f(a_n^{(j)}) = (j, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

El lector puede comprobar fácilmente que f es *uno a uno* y *sobre*. Por lo tanto:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$$

(ii) *Caso general.* Sean

$$B_1 = A_1,$$
$$B_2 = A_2 - A_1$$
$$B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2)$$
$$\ldots$$
$$B_n = A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$$

Entonces :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Como B_n es contable para todo n se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es contable (parte (i)), por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es contable .

Ejercicio 22. El conjunto Q de todos los números racionales es contable.

Sugerencia . El conjunto Q es equivalente a un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Ejercicio 23. Sea A un conjunto de intervalos abiertos y disyuntos dos a dos. Entonces A es contable.

Demostración. Como Q es contable podemos escribir:

$$Q = \{ x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , \ldots \} .$$

Si $(a,b) \in A$, el conjunto de *números naturales* $\{ n \in \mathbb{N} \,/\, x_n \in (a, b) \}$ *no es vacío* puesto que Q es *denso* en toda parte. Al intervalo (a,b) le asignamos el siguiente *número natural* :

$$\text{el mínimo de } \{ n \in \mathbb{N} \,/\, x_n \in (a, b) \} .$$

Así se puede establecer una correspondencia entre los intervalos del conjunto A y un subconjunto de $\mathbb{N}$. Evidentemente esta correspondencia es uno a uno ya que los intervalos de A son disyuntos. ▲

Ejercicio 24. Sea B un conjunto de intervalos cerrados con longitud positiva y disyuntos dos a dos. Demostrar que A es contable.

Sugerencia. Similar al Ejercicio 23.

Ejercicio 25 Demostrar que :

(i) En $\mathbb{R}^2$ (ó en $\mathbb{R}^n$) el conjunto de todos los puntos de coordenadas racionales es contable.

(ii) Una colección de círculos disyuntos con radio positivo es contable.

(iii) Una colección de esferas disyuntas con radio positivo es contable.

La demostración la dejamos al lector.

Ejercicio 26 Sea S la colección de todos los polinomios de coeficientes racio -

nales , entonces S es contable .

Sugerencia. Sea S_n la colección de todos los polinomios con coeficientes racionales de grado n , entonces

$$S_n \sim Q^{n+1} \sim \mathbb{N}^{n+1} \sim \mathbb{N} \quad ,$$

luego :

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \sim \mathbb{N} \qquad \text{(Ejercicio 21)} \ . \qquad \blacktriangle$$

Ejercicio 27. Sea f una función de valor real definida en $[0, 1]$ y supongamos que existe una constante $M > 0$ tál que para toda sucesión finita de puntos distintos $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$, se tiene la desigualdad :

$$| f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) | \leq M ;$$

demostrar que el conjunto

$$S = \{ x \in [0, 1] \ / \ f(x) \neq 0 \}$$

es contable .

Solución . Sean $S_+ = \{ x \in [0, 1] \ / \ f(x) > 0 \}$ y $S_- = \{ x \in [0, 1] \ / \ f(x) < 0 \}$

entonces $\quad S = S_+ \cup S_- \quad .$ $\qquad$ (i)

Sea $S_n = \{ x \in [0, 1] \ / \ f(x) > \frac{1}{n} \}$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots .$ entonces tenemos:

$$S_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \ . \qquad \text{(ii)}$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son puntos distintos de S_n entonces

$$| f(x_1) + \cdots + f(x_k) | = f(x_1) + \cdots + f(x_k) \leq M ,$$

luego :

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} < f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) \leq M$$

es decir

$$k < n \cdot M .$$

Esto es, el conjunto S_n contiene a lo más nM puntos distintos o sea que S_n es finito (contable). Por lo tanto S_+ es contable. De la misma forma, se ve que S_- es contable. Luego S es contable.

El lector debe comprobar las identidades (i) y (ii).

Ejercicio 28. Sea f una función de variación acotada en $[0, 1]$, entonces el conjunto de todos los puntos de *discontinuidad* de f es *contable*.

Sugerencia. Considerar la función:

$$F(x) = f(x+) - f(x-) ,$$

y aplicar el Ejercicio 27 a la función F. ▲

3. *Conjuntos no-contables (no-enumerables).*

Ejemplo 6. El conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales no es contable.

Demostración. Sabemos que (Ejemplo 1):

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty) \sim (0, 1) ,$$

luego basta demostrar que $(0, 1)$ *no es contable*.

Si $(0, 1) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x < 1 \}$ fuera contable se podría escribir

$$(0, 1) = \{ s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, s_n, \ldots \} .$$

Desarrollando el número s_n en el sistema decimal se tiene :

$$s_n = 0 . u_{n1} u_{n2} u_{n3} \dots u_{nk} \dots \quad (0 \leq u_{nk} \leq 9)$$

Sea ahora

$$y = 0 . v_1 v_2 \dots v_k \dots .$$

donde

$$v_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u_{kk} \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad u_{kk} = 1 . \end{cases}$$

Entonces y es un número real entre 0 y 1 ; además

$$y \neq s_n \quad \text{para todo} \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

o sea

$$y \notin (0, 1) = \{ s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \} \qquad \text{(absurdo)} .$$

Ejercicio 29. Sea S la colección de todas las sucesiones formadas por los dos números 0 y 1 entonces S no es contable.

Sugerencia. S es equivalente al conjunto de todos los números entre 0 y 1 , expresados en el sistema binario .

Ejercicio 30. Sea $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos finitos de dos o más elementos . El producto cartesiano de los A_j $(j = 1, 2, 3, \dots)$ no es contable .

Sugerencia. El producto cartesiano $\prod_{j=1}^{\infty} A_j$ contiene un subconjunto equivalente al conjunto S del Ejercicio 29.

Ejercicio 31. Los conjuntos $(0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1]$ son equivalentes. Más gene -

ralmente, si A es infinito y B es contable entonces $A \cup B \sim A$.

Demostración. Para mayor sencillez supongamos que A y B son disyuntos. Sea

$$B = \{ b_1, b_2, b_3, \ldots \} .$$

Sabemos que A tiene un subconjunto contable (Ejercicio 14), digamos :

$$C = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots \} \subset A .$$

Consideremos la aplicación $f: A \to A \cup B$ definida por :

f es idéntica en $A - C$.

$f(a_{2n}) = a_n$, $f(a_{2n-1}) = b_n$ $\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Dejamos al lector la comprobación de que f es *uno a uno* y *sobre*. Hemos supuesto que B es contablemente infinito, si B es finito el lector puede construir fácilmente la correspondencia entre A y $A \cup B$.

Ejercicio 32. Demostrar que :

(i) $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}$

(ii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$

(iii) $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} \sim \mathbb{R}$.

Demostración. (i) Sabemos que

$\mathbb{R} \sim (0,1) \sim [0, 1)$ (Ejemplo 1, Ejercicio 27)

$\mathbb{N} \sim Z$ (Ejemplo 5) ,

por lo tanto :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{N} \sim [0, 1) \times Z .$$

Si $x \in \mathbb{R}$ se tiene :

$$x = n + x'$$

donde

$n = [x]$ = la parte entera de x

$x' = x - [x]$ = la parte fraccionaria de x .

La aplicación : $\mathbb{R} \to [0, 1) \times Z$ definida por :

$$x = n + x' \mapsto (x', n)$$

es *uno a uno* y *sobre*. Luego

$$[0, 1) \times Z \sim \mathbb{R} ,$$

por lo tanto :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R} .$$

(ii) Sean $x, y \in (0, 1)$. Expresamos x, y en el sistema decimal :

$$x = 0 . x_1 x_2 x_3 \ldots , \quad y = 0. y_1 y_2 y_3 \ldots\ldots$$

Basta considerar la siguiente aplicación $g : (0,1) \times (0,1) \to (0, 1)$ definida por: :

$$g : (x, y) \mapsto 0. x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \ldots \ldots$$

(iii) Similar a (ii) .

Nota. El Ejercicio 32 puede expresarse así :

$$\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R} , \mathbb{R}^3 \sim \mathbb{R} , \ldots , \mathbb{R}^n \sim \mathbb{R} .$$

Ejemplo 7. Sea S el conjunto de todas las funciones de valor real definidas en $\mathbb{R}$. Demostrar que S no es equivalente a $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $S \sim \mathbb{R}$, entonces existiría una aplicación uno a uno de $\mathbb{R}$ sobre S, o sea que a cada real x le corresponde una función, la cual notaremos por $f_x(t)$ (Nótese que t es la variable independiente de la función f_x). Definimos una nueva función de valor real b como sigue :

$$b(t) = 1 + f_t(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Entonces b es una función definida en $\mathbb{R}$, luego $b \in S$, Como la aplicación $\mathbb{R} \to S$:

$$x \mapsto f_x$$

es sobre, debería existir un $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = f_b$, o sea :

$$b(t) = f_b(t) \qquad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pero

$$b(b) = 1 + f_b(b) \neq f_b(b). \qquad \text{(absurdo)}$$

Ejercicio 33. Sea A el conjunto de todos los números reales entre 0 y 1, entonces $A^\infty \sim \mathbb{R}$.

Nota. A^∞ es el conjunto de todas las sucesiones de números reales entre 0 y 1.

Sugerencia. Sea $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\ldots)$ una sucesión de números reales entre 0 y 1. Desarrollamos los elementos de la sucesión en el sistema decimal :

$$x_1 = 0.\,x_{11}\,x_{12}\,x_{13}\ldots x_{1k}\ldots$$

$$x_2 = 0.\,x_{21}\,x_{22}\,x_{23}\ldots x_{2k}\ldots$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$x_n = 0.\,x_{n1}\,x_{n2}\,x_{n3}\ldots x_{nk}\ldots$$

Reordenemos la doble sucesión $(x_{k,n})$ en una sucesión simple (este procedimiento es posible ya que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$) ; así podemos asignar un número real (expresado en el sistema decimal) a la sucesión $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

Ejercicio 34. Sean $A \supset B \supset C$ si $A \sim C$ entonces $A \sim B$.

Demostración. Suponemos que $A \neq B$, $B \neq C$, entonces C tiene que ser infinito (Ver Ejercicio 7) .

Como $A \sim C$, existe una aplicación f, uno a uno tal que $f(A) = C$.

Sea $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(A)$ donde :

$f^2(A) = \{ f(f(x)) : x \in A \}$, $f^3(A) = \{ f(f(f(x))) : x \in A \}$, etc. Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(B) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(A) = D$$

ya que

$$A \supset B \supset f(A) .$$

Tenemos :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f^{n-1}(A) - f^n(A) \} \cup D, \quad (f^0(A) = A\ )$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f^{n-1}(B) - f^n(B) \} \cup D \qquad (f^0(B) = B).$$

Definimos la siguiente aplicación $g : A \to B$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x \quad \text{si} \quad x \in f^{n-1}(B) - f^n(A) \\ \\ g(x) = f(x) \ \text{si} \ x \in f^{n-1}(A) - f^{n-1}(B) \end{array}\right\} \text{para todo } n$$

$$g(x) = x \qquad \text{si} \quad x \in D$$

Esta aplicación g es *uno a uno*, y *sobre* B, como puede observarse en la Figura 10, puesto que

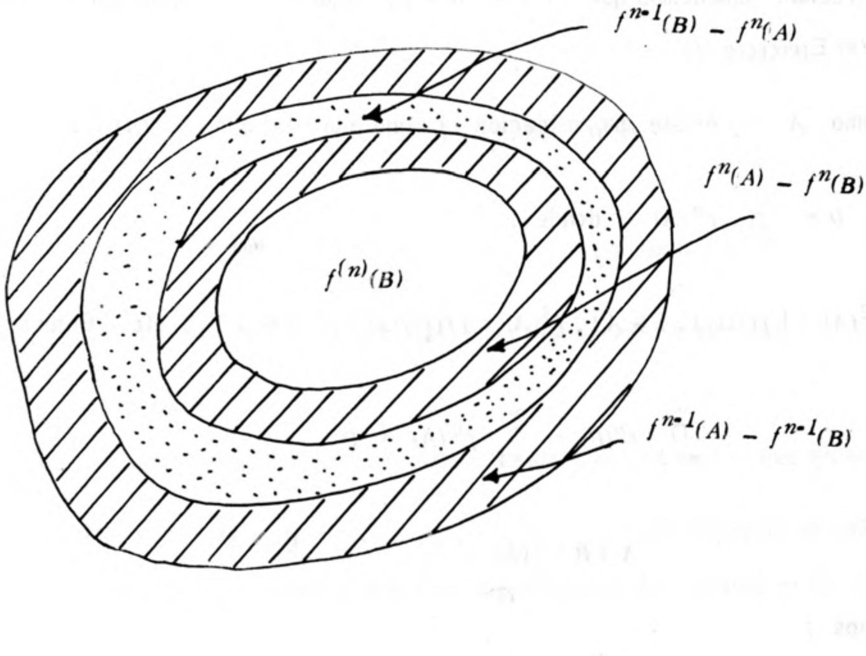

Figura 10.

$$A \supset B \supset f(A) \ ,$$

$$f^{n-1}(A) \supset f^{n-1}(B) \supset f^{n}(A) \supset f^{n}(B) \ ,$$

$$f^{n-1}(A) - f^{n}(A) = [\, f^{n-1}(A) - f^{n-1}(B)\,] \cup [\, f^{n-1}(B) - f^{n}(A)\,]$$

$$\Big\downarrow \ \textit{aplicación } f \qquad\qquad \Big\downarrow \ \textit{aplicación idéntica}$$

$$f^{n-1}(B) - f^{n}(B) = [\, f^{n}(A) - f^{n}(B)\,] \cup [\, f^{n-1}(B) - f^{n}(A)\,] \qquad \blacktriangle$$

Ejercicio 35. Sea $\mathbb{N}^{\infty}$ el conjunto de todas las sucesiones de números naturales. Demostrar que $\mathbb{N}^{\infty} \sim \mathbb{R}$.

Sugerencia . Sea n un número natural, expresamos n en el sistema decimal :

$$n = n_1 + (n_2 \times 10) + (n_3 \times 100) + \cdots$$

Hacemos corresponder a n el número :

$$0.\, n_1\, n_2\, n_3 \, \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \qquad ;$$

según esta correspondencia $\mathbb{N}$ es equivalente a un subconjunto de $(0,1)$ (más precisamente , al subconjunto formado por números entre 0 y 1 cuyo desarrollo decimal es finito).

Se puede entonces considerar que

$$\mathbb{N}^{\infty} \subset (0\,,1)^{\infty}$$

Por el Ejercicio 25, $\mathbb{N}^{\infty}$ contiene un subconjunto equivalente a $\mathbb{R}$, como $(0\,,1)^{\infty} \sim \mathbb{R}$ (Ejercicio 33) se tiene que $\mathbb{N}^{\infty} \sim \mathbb{R}$ (Ejercicio 34) .

Ejercicio 36. Demostrar que $\mathbb{R}^\infty \sim \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}^\infty$ es el conjunto de todas las sucesiones de elementos reales.

Sugerencia. Como $\mathbb{R} \sim (0,1)$ (Ejemplo 1), se tiene $\mathbb{R}^\infty \sim (0,1)^\infty \sim \mathbb{R}$ (Ejercicio 33).

Ejercicio 37. Sea A un conjunto numérico (e.d. $A \subset \mathbb{R}$) con su *interior no-vacío*, entonces $A \sim \mathbb{R}$.

Sugerencia. A contiene un intervalo, digamos (a,b) :

$$(a,b) \subset A \subset \mathbb{R}$$

Sabemos que $(a,b) \sim \mathbb{R}$, luego : $A \sim \mathbb{R}$.

Ejercicio 38. El conjunto de todos los puntos de una curva en $\mathbb{R}^2$ es equivalente a $\mathbb{R}$.

Sugerencia. Sea $(\alpha(t), \beta(t))$, $t \in (a,b)$ una ecuación paramétrica de la curva. Entonces α no es constante ó β no es constante.

Supongamos que α no es constante, esto es,

$$m = \text{mínimo de } \alpha(t) \neq M = \text{máximo de } \alpha(t).$$

La curva contiene *un subconjunto* equivalente al intervalo $[m, M] \sim \mathbb{R}$.

Yu Takeuchi
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional.

Nota: Los lectores que deseen remitir soluciones a los ejercicios pueden dirigirse al editor del Boletín. Las comunicaciones deben ir a máquina y doble espacio. Se publicarán las mejores soluciones.

* * *

A. E. Noether

El adjetivo "noetheriano" (neteriano) aplicado especialmente a los anillos y otras estructuras algebraicas se refiere a la crucial influencia que en el álgebra abstracta tuvo la obra de Amalie Emmy Noether, matemática judío-alemana nacida en Erlagen en 1883. Inicialmente trabajó en la teoría clásica de los invariantes con Gordan; asistió en Gottingen a lecciones de matemáticas como Klein, Minkowski, Blumenthal y Hilbert. Posteriormente siguió las líneas de ataque directo de este último y desarrolló sus grandes aportes en la teoría de ideales. Hizo también contribuciones significativas a la teoría de la relatividad e influyó notablemente en la escuela rusa de topología (Urysohn, Alexandroff); en el invierno de 1928-1929 disertó en la Academia Comunista de Moscú y tuvo contacto con L. S. Pontryagin e indirectamente influyó en A. G. Kurosh el gran especialista ruso en la teoría de grupos. En 1933 tuvo que abandonar la Alemania nazi y buscó refugio en E. U. junto con una pléyade de científicos que por la misma época se dirigieron a ese país (E. Artin, R. Courant, A. Einstein, W. Feller, K. Friedrichs, K. Gődel, J. von Neumann, O. Ore, G. Pólya, A. Tarski, H. Weyl y muchos otros). Disertó en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton; allí pasó quizás la época más agradable de su vida. Murió en 1935 a los 53 años de edad. Si bien, y según la expresión de Weyl " las gracias no mecieron su cuna", fué un ser humano de valores espirituales extraordinarios en todos los aspectos. A ella se debe en gran parte la fuerte tendencia hacia la algebrización de la matemática observada desde hace algún tiempo y su influencia ha sido resaltada por Alexandroff en los siguientes términos : " ... si el desarrollo de la Matemática de hoy indudablemente se lleva a cabo bajo la égida del Algebra y los conceptos y métodos algebraicos han penetrado de varias teorías matemáticas, todo ello ha sido posible sólo después de los trabajos de Emmy Noether. Ella nos enseñó a pensar en términos simples y por lo tanto generales : representación homomorfa, grupos o anillos con operadores, ideales, y no en complicados cálculos algebraicos y en consecuencia ella abrió la senda hacia el descubrimiento de regularidades algebraicas donde antes estas regularidades habían permanecido oscurecidas por complicadas condiciones específicas".