Boletín de Matemáticas
Vol. VII Nº 3 , pp. 137 - 191

SISTEMAS NUMERICOS

YU TAKEUCHI

1. Números naturales.

Se usan los números naturales, 1, 2, 3, . . . para expresar *el número de elementos de un conjunto*, o para dar *el orden de un determinado objeto* en un conjunto. Nadie sabe quién inventó los números naturales; posiblemente los hombres sabían *contar* en alguna forma mucho antes de que apareciera la historia escrita. Sin embargo, los estudios sistemáticos de los números comenzaron hace menos de un siglo con G. Peano, quien estableció cinco axiomas para construirlos (1895); a saber:

[I] Uno es un número natural (ó mas estrictamente, el sistema de los números naturales contiene un elemento especial *llamado uno* y notado 1).

[II] A un número natural n le corresponde *otro número* n^*. Este número n^* se llama *el número inmediatamente posterior a* n.

(Nota: n es el número inmediatamente anterior a n^*)

[III] Dados dos números naturales n y m, si $n^* = m^*$ entonces $n = m$. (O sea que la correspondencia en (II) es *uno a uno*.)

[IV] No existe ningún número natural cuyo posterior sea 1; es decir, que 1 es *el* *primer número natural* .

[V] Si un conjunto S de números naturales satisface las siguientes condiciones:

(i) El número 1 pertenece a S .

(ii) Si n pertenece a S entonces n^* pertenece a S.

Entonces S contiene a todos los números naturales .

La condición [V] se conoce con el nombre de "axioma de inducción", y juega papel principal en las demostraciones por inducción matemática.

El número inmediatamente posterior a 1 (uno), es decir, 1^*, se denota 2, el número inmediatamente posterior a 2, es decir 2^*, se denota 3, etc.; así sucesivamente se obtiene el sistema de todos los números naturales, el cual se designa con la letra $\mathbb{N}$.

Comentario.

Es absurda la discusión acerca de la inclusión o no del *número cero* en el sistema de los números naturales. Los números naturales que comienzan en *uno* han sido utilizados por los hombres desde hace más de cinco mil años, en cambio el descubrimiento del cero como número fue muy reciente. Peano axiomatizó *la intuición humana* que aún los cavernícolas tenían para contar : *uno* es el primero, *uno* y *uno* es *dos*, *dos* y *uno* es *tres*, *tres* y *uno* es *cuatro*, . . . ; así se forman todos los números.

Ejercicio 1. Los números $1, 2, 3, \ldots$; abarcan la totalidad de $\mathbb{N}$.

A partir de los cinco axiomas de Peano se pueden definir en $\mathbb{N}$ las operaciones conocidas como adición, multiplicación, sustracción, potenciación .

Adición.

(ii) Sea n cualquier número natural; definimos la suma de 1 y n como sigue:

$$1 + n = n^* \text{ (el número inmediatamente posterior a } n) \qquad (1)$$

(ii) Sean n,m dos números naturales; si la suma $m+n$ está definida, entonces definimos la suma m^*+n así :

$$m^* + n = (m+n)^* \ . \qquad (2)$$

A continuación, veremos que la adición está definida entre dos números cualesquiera en $\mathbb{N}$.

Dado un número n fijo, sea S el conjunto de todos los números naturales m, tales que $m+n$ está definida :

$S = \{ m \in \mathbb{N} \mid$ ó $m+n$ está definida $\}$.

De (1) se tiene que $1 \in S$. De (2), si $m \in S$ entonces $m^* \in S$ Luego por el axioma de inducción, se tiene que $S = \mathbb{N}$.

***Ejercicio* 2.** Demostrar que $n + 1 = n^* \ (= 1 + n)$ (3)

***Solución*.** Sea $S = \{ n \in \mathbb{N} \mid n + 1 = n^* \}$ entonces $1 \in S$ (por *(1)*). Si $n \in S$ entonces

$$n^* + 1 = (n+1)^* = (n^*)^* \quad ,$$

o sea que $n^* \in S$. Por el axioma de inducción se tiene que $S = \mathbb{N}$.

***Ejercicio* 3.** Sea $n \in \mathbb{N}$, si $n \neq 1$, demostrar que existe un número natural m tal que

$$m^* = n \qquad \text{(es decir } m+1 = n\text{)} .$$

***Solución*.** Sea $S = \{ n \in \mathbb{N} \mid$ existe m tal que $m^* = n \} \cup \{ 1 \}$.

Evidentemente $1 \in S$. Si $n \in S$ entonces $n^* \in S$, y por el axioma de inducción se tiene que $S = \mathbb{N}$.

Ejercicio 4. Demostrar que la adición es conmutativa.

Solución. Dado un número natural fijo m, consideremos el conjunto S:

$$S = \{ k \in \mathbb{N} \mid k + m^* = k^* + m \},$$

Entonces:

$$\underset{(por\ (2))}{1^* + m = (1+m)^*} \underset{(por\ (3))}{=} \underset{(por\ (2))}{(m+1)^* = m^* + 1} \underset{(por\ (3))}{=} 1 + m^*.$$

o sea que $1 \in S$. Si $k \in S$ entonces:

$$k^* + m^* \overset{(2)}{=} (k + m^*)^* = (k^* + m)^* \overset{(2)}{=} (k^*)^* + m,$$

esto es, $k^* \in S$. Por el axioma de inducción se tiene que $S = \mathbb{N}$, o sea que:

$$k + m^* = k^* + m \qquad \text{para todo} \quad k, m \in \mathbb{N}. \qquad (4)$$

Ahora consideremos el siguiente conjunto T:

$$T = \{ m \in \mathbb{N} \mid m + n = n + m. \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \}.$$

Por (3) se tiene que $1 \in T$. Si $m \in T$ entonces, $m^* \in T$, puesto que:

$$m^* + n \overset{(2)}{=} (m+n)^* = (n+m)^* \overset{(2)}{=} n^* + m \overset{(4)}{=} n + m^*,$$

Por el axioma de inducción se tiene que $T = \mathbb{N}$, esto es:

$$m + n = n + m \qquad \text{para todo} \quad n, m \in \mathbb{N} \qquad (5)$$

Ejercicio 5. Demostrar que

$$n + p = n + q \qquad \text{implica} \qquad p = q.$$

Solución. Consideremos el conjunto :

$$W = \{ n \in \mathbb{N} \mid n + p = n + q \quad \text{implica} \quad p = q \} ,$$

Por el axioma III se tiene que $1 \in W$. (Nótese que $1 + p = p^*$, $1 + q = q^*$ (por (1)).

Si $n \in W$, entonces, $n^* \in W$. En efecto, supongamos que $n^* + p = n^* + q$, entonces :

$$(n+p)^* \overset{(2)}{=} n^* + p = n^* + q \overset{(2)}{=} (n + q)^* ,$$

y por el axioma [III] se tiene que $n+p = n+q$, luego $p = q$ ya que $n \in W$. Esto es, $n^* \in W$. Basta ahora aplicar el axioma de inducción .

Ejercicio 6 Demostrar que no existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n = n + p .$$

Solución. Si existiera tal p se tendría :

$$n + 1 = n^* = (n + p)^* = n + p^* .$$

Por el Ejercicio 5 se obtiene que $1 = p^*$ (absurdo por el axioma [IV]) .

Ejercicio 7. La adición es asociativa.

Solución. Dados n, m fijos, considerar el conjunto T :

$$T = \{ k \in \mathbb{N} \mid (n + m) + k = n + (m + k) \} .$$

Tenemos :

$$(n + m) + 1 \overset{(3)}{=} (n + m)^* \overset{(2)}{=} n^* + m \overset{(4)}{=} n + m^* \overset{(3)}{=} n + (m+1) ,$$

o sea que $1 \in T$.

Si $k \in T$ entonces, $k^* \in T$. En efecto :

$$(n+m)+k^* = ((n+m)+k)^* = (n+(m+k))^*$$

$$= n+(m+k)^* = n+(m+k^*),$$

Basta aplicar ahora el axioma de inducción.

Ejercicio 8. Sean n, m dos números naturales distintos, entonces existe un número p tal que

(i) $n = m+p$ ó

(ii) $m = n+p$.

En el primer caso decimos que n es mayor que m (ó m es menor que n) y se nota $n > m$, en el segundo caso m es mayor que n. De esta manera se puede establecer un orden en $\mathbb{N}$.

Dado m fijo, sea

$$T = \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{ existe un } p \text{ tal que } n = m+p, \text{ ó } m = n+p \} \cup \{ m \}.$$

Si $m \neq 1$, por el ejercicio 2 existe un p tal que $p^* = m$, o sea que $1+p = m$, luego $1 \in T$. Si $m = 1$, por definición del conjunto T tenemos que $1 \in T$.

Ahora supongamos que $n \in T$. En el caso (i), tenemos :

$$n^* = (m+p)^* = m+p^*, \text{ luego } n^* \in T.$$

En el caso (ii), si $p = 1$ tenemos :

$$m = n+1 = n^* \in T \quad \text{(por definición del conjunto } T) :$$

si $p \neq 1$ existe un número q tal que $q^* = p$, luego $n = n+p = n+q^* = n^*+q$, esto es, $n^* \in T$.

Sustracción. Si n es mayor que m, existe un único número p (ver Ejercicio 5) tal que :

$$n = m + p \quad ;$$

Se escribe entonces

$$p = n - m \ . \tag{6}$$

Ejercicio 9. Si $n > m$ se tiene :

$$n + k > m + k \qquad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N} \tag{7}$$

Sugerencia . Utilizar la ley conmutativa (Ejercicio 4) y la ley asociativa (Ejercicio 7) de la adición .

Ejercicio 10. Suponiendo $n > m$, demostrar que :

i) $(n - m) + k = (n + k) - m$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

ii) $k - (n - m) = (k + m) - n$ si $k > (n - m)$.

iii) $(n - m) - k = n - (m + k)$ si $n - m > k$.

Ejercicio 11. Un conjunto de números naturales siempre posee un número mínimo.

Demostración. Sea A un conjunto de números. Escogemos un número $k \in A$. De los números $1, 2, 3, \ldots, k$ podemos encontrar el primer número natural que pertenece a A, el cual es el mínimo de A .

Ejercicio 12. Sea p un número natural fijo. Dado $k \in \mathbb{N}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$k < n\,p \ .$$

Demostración . Si $p \neq 1$, tenemos $kp > k$. Si $p = 1$, tenemos $(k+1) \cdot p = k + 1 > k$.

Ejercicio 13 . Si $k > p$ existe un número natural n tal que

$$n \cdot p \leq k \quad , \quad \text{y} , \quad (n+1) \cdot p > k .$$

Sugerencia. Sea $A = \{ m \in \mathbb{N} \mid m\, p > k \}$. El número mínimo del conjunto A (ver Ejercicio 11) es $n+1$.

Ejercicio 14. Si $k > p$ existen $n, r \in \mathbb{N}$ tales que

$$k = n \cdot p + r \qquad (0 \leq r < p) .$$

Esta expresión es única.

Sugerencia. Ejercicio 13.

Ejercicio 15 . Un conjunto acotado de números naturales siempre posee un número máximo.

Sugerencia . Si M es una cota de un conjunto A, entonces para todo $n \in A$ se tiene $n < M$. El conjunto :

$$B = \{ M - n \mid n \in A \}$$

tiene un número mínimo, digamos m , entonces $M - m$ es el máximo del conjunto A .

Multiplicación .

Análogamente a la adición, definimos la multiplicación como sigue :

(i) Sea n cualquier número natural, entonces

$$1 \times n = 1 \cdot n = n \tag{1'}$$

(ii) Sean m,n dos números naturales, si *el producto* $m \cdot n$ está definido entonces definimos $m^* \cdot n$ como sigue :

$$m^* \times n = m^* \cdot n = (m \cdot n) + n . \tag{2'}$$

Ejercicio 16. Demostrar que :

$$1 \times n = n \times 1 \tag{3'}$$

Sugerencia . Similar al ejercicio 2 .

Ejercicio 17 . Demostrar que la multiplicación es conmutativa .

Sugerencia . Demostrar primero la siguiente identidad :

$$n \times m^* = n \times (m + 1) = (n \times m) + n \tag{4'}$$

Ejercicio 18 . Demostrar que :

$$n \times p = n \times q \qquad \text{implica} \qquad p = q .$$

Sugerencia. Similar al Ejercicio 5 .

Ejercicio 19 . Demostrar la ley distributiva :

i) $\quad (n+m) \times k = (n \times k) + (m \times k) , \quad n, m, k \in \mathbb{N}$

ii) $\quad (n - m) \times k = (n \times k) - (m \times k)$ si $n > m$.

Demostración. i) Dados n, m fijos, sea

$$T = \{ k \in \mathbb{N} \mid (n + m) \times k = (n \times k) + (m \times k) \} \ .;$$

evidentemente se tiene que $1 \in T$.

Si $k \in T$ entonces, $k^* \in T$.

En efecto :

$$(m+m) \times k^{*} = [\,(n+m) \times k\,] + (n+m)$$

$$= (n \times k) + (m \times k) + n + m = (n \times k^{*}) + (m \times k^{*})$$

Aplicando el axioma de inducción se tiene que $T = \mathbb{N}$.

Ejercicio 20 . Demostrar que la multiplicación es asociativa, o sea que :

$$(n \times m) \times k = n \times (m \times k) \quad \text{para todo} \quad n, m, k \in \mathbb{N}$$

Sugerencia. Similar al Ejercicio 7 .

Ejercicio 21. Dados dos números naturales n, k , si existe un número natural p tal que

$$n = k \cdot p$$

se dice que n es *un múltiplo de* k , ó que k *divide* a n , y se escribe :

$$k \mid n \, .$$

Demostrar que si $k \mid n$ y $k \neq n$ entonces $n > k$.

Solución. Existe $p \neq 1$ tal que $n = kp$, luego

$$n = k(\,(p-1) + 1) = k(p-1) + k > k \, .$$

Ejercicio 22 . Demostrar que 2 no divide a 3 .

Solución. Supongamos que $2 \mid 3$, entonces existiría un número natural p tal que $3 = 2 \cdot p$. Evidentemente $p \neq 1$. Si $p = 2$ se tendría :

$2 \cdot 2 = 2 \cdot (1+1) = 2 + 2 = 2 + (1+1) = (2+1) + 1 = 3 + 1 < 3$ (absurdo) .

Si $p \geq 3$ se tendría :

$$2 \cdot p > p \geq 3 \qquad \text{(absurdo)}.$$

2 . *Números Quebrados* .

Dados dos números naturales n y k, no siempre existe un número natural x tal que

$$k \cdot x = n \qquad \text{(ver Ejercicio 22)}. \qquad (8')$$

Para resolver esta clase de ecuaciones se inventaron los *números quebrados* ; la raíz de la ecuación (8) es, "por lo general", un número quebrado (no entero) que se denota por $\frac{n}{k}$.

En el conjunto de los números quebrados se define

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$,

(ii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$,

(iii) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,

donde a, b, c, d son números naturales.

***Ejercicio** 23.* Demostrar que

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

***Ejercicio** 24.* Comprobar que si

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} ,$$

entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} , \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \times \frac{c'}{d'}$$

***Ejercicio** 25* . Demostrar que

[*1*] $\frac{a}{b} + x = \frac{c}{d} + x$ implica $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (x es un número quebrado).

[2] $\frac{a}{b} \times y = \frac{c}{d} \times y$ implica $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (y es un número quebrado).

Ejercicio 26. Si $bc > ad$, existe un número quebrado x tal que

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} + x \tag{9}$$

Sugerencia. Comprobar que

$$x = \frac{bc - ad}{bd} \quad .$$

Se denota entonces

$$x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \quad \left(= \frac{bc - ad}{bd} \right) .$$

El Ejercicio 26 nos sugiere que podemos establecer el siguiente orden entre los números quebrados :

(iv) Si $ad < bc$ entonces se escribe $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (y se dice que $\frac{c}{d}$ *es mayor* que $\frac{a}{b}$) .

Ejercicio 27 . Dados dos números quebrados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, demostrar que existe un número quebrado y tal que

$$\frac{a}{b} \cdot y = \frac{c}{d} \tag{10}$$

Sugerencia. Tomar $y = \dfrac{c \cdot b}{a \cdot d}$.

Se escribe entonces :

$$y = \frac{c \cdot b}{a \cdot d} = \frac{c}{d} \div \frac{a}{b} \qquad \text{(División)} .$$

Ejercicio 28 . Comprobar la ley asociativa de la adición, la ley asociativa de la multiplicación, y la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, entre números quebrados .

Ejercicio 29 . Se define a^n (a es un número quebrado, n es un número natural) como sigue :

i) $a^1 = a$

ii) $a^{n+1} = a^n \times a$ (para todo $n \in \mathbb{N}$) .

Demostrar las siguientes identidades :

[*1*] $a^{n+m} = a^n \times a^m$

[2] $a^{n-m} = a^n \div a^m$ (si $n > m$) .

[*3*] $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Ejercicio 30 . Demostrar que no existe un número quebrado x tal que

$$x^2 = 2 .$$

Demostración. Si existiera un número quebrado x tal que $x^2 = 2$, se tendría

$$x = \frac{p}{q}$$

donde p, q son números naturales que no tienen común divisor, entonces

$$(\frac{p}{q})^2 = 2 , \quad \text{esto es ,} \quad p^2 = 2\,q^2 .$$

Luego p^2 es un número par y por lo tanto p es un número par , digamos $p = 2r$ (r es un número natural). Tenemos :

$$(2\,r)^2 = 2\,q^2 , \quad \text{esto es,} \quad 2\,r^2 = q^2 ,$$

lo cual significa que p es un número par, pero esto es imposible ya que p y q no tienen divisor común alguno .

3. *Números negativos y Cero .*

El *cero* fue descubierto por los hindues, quienes ya en el Siglo VI tenían conocimiento del cero como un número. Algunos historiadores atribuyen el descubrimiento del cero a la filosofía hindú en la que *el universo vacío* juega el papel de Dios en la cultura occidental. El cero posee las propiedades siguientes , (r es un número quebrado) :

$$r + 0 = r,$$

$$r \times 0 = 0 .$$

La utilización sistemática de números negativos comenzó apenas en el Siglo XVI con Descartes (1596 - 1650).

Sean a, b dos números positivos, damos las siguientes reglas para la adición y multiplicación de $-a$ y de $-b$:

i) $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

ii) $(-a) + b = b + (-a) = \begin{cases} -(a-b) & \text{si} \quad a > b \\ b-a & \text{si} \quad a < b \\ 0 & \text{si} \quad a = b \end{cases}$.

iii) $a \times (-b) = (-a) \times b = -ab$.

iv) $(-a) \times (-b) = ab$.

Se observa que estas definiciones son bastante naturales si consideramos los siguientes ejemplos.

i) Una persona tiene una deuda de 5 pesos (-5 pesos de capital) y otra deuda de 3 pesos (-3 pesos de capital), entonces la deuda total es de 8 pesos (-8 pesos de capital), o sea que

$$(-5) + (-3) = -8 .$$

ii) Una persona tiene 5 pesos en su bolsillo, si tiene una deuda de 3 pesos (-3 pesos de capital), al pagar su deuda le quedan 2 pesos, o sea que la suma de 5 y (-3) es igual a 2.

iii) Un reloj se atrasa 5 minutos diariamente, si decimos que el reloj se adelanta (-5) minutos por día, entonces en tres días se atrasa $5 \times 3 = 15$ minutos, o sea que el reloj se adelanta (-15) minutos en 3 días, así que se tiene :

$$(-5) \times 3 = -15$$

(iv) Si este reloj indica hoy la hora exacta, entonces hace tres días (-3 días después) el reloj debía estar adelantado en 15 minutos, esto es :

$$(-5) \times (-3) = 15 .$$

Los números quebrados positivos, los números quebrados negativos y el cero constituyen los llamados *números racionales* . Se acostumbra usar la letra Q para denotar el conjunto de todos los números racionales.

Nota . Los números naturales, los números naturales negativos y el cero constituyen los llamados *números enteros* ; el conjunto de todos los números enteros se denota por la letra Z .

4. *Expresión de un número en el sistema decimal.*

En la vida diaria, para expresar un número generalmente se usa la numeración decimal; sin embargo no existe una razón lógica para utilizar el número 10 como base de la numeración. Podemos utilizar cualquier número natural p $(p \neq 1)$ como base de la numeración. En realidad, se usa siempre el sistema binario para el mecanismo interno de los computadores y, aún en nuestra vida cotidiana, utilizamos numeraciones en sistemas en bases diferentes a 10 ; por ejemplo :

$$1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos} \;, \quad 1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos} .$$

Sea n un número natural; por división ordinaria de n por p (ver Ejercicio 14) obtenemos :

$$n = q_1 \cdot p + r_1 \qquad (0 \le r_1 < p)$$

donde q_1 es la parte entera del cociente $\frac{n}{p}$ y r_1 es el residuo de la división . Si $q_1 \ge p$, dividimos q_1 por p :

$$q_1 = q_2 \cdot p + r_2 \qquad (0 \le r_2 < p) ,$$

así sucesivamente :

$$q_2 = q_3 p + r_3 \qquad (0 \le r_3 < p)$$

$$q_3 = q_4 p + r_4 \qquad (0 \le r_4 < p) .$$

$$\cdots\cdots$$

Como $n > q_1 > q_2 > q_3 > \ldots$, al cabo de algunos pasos se tendrá un cociente menor que p, digamos :

$$q_{k-1} = q_k \cdot p + r_k \qquad (0 \le r_k < p , \; q_k < p) .$$

Reemplazando estas divisiones sucesivamente se obtiene :

$$n = q_1 \cdot p + r_1 = (q_2 \, p + r_2) \cdot p + r_1 = q_2 \cdot p^2 + r_2 \cdot p + r_1$$

$$= (q_3 \, p + r_3) \cdot p^2 + r_2 \cdot p + r_1 = q_3 \cdot p^3 + r_3 \cdot p^2 + r_2 \cdot p + r_1$$

$$= \ldots = q_k \cdot p^k + r_k \cdot p^{k-1} + r_{k-1} \cdot p^{k-2} + \cdots + r_2 \cdot p + r_1 .$$

Para abreviar esta escritura escribimos solamente los coeficientes de las potencias de p como sigue :

$$n = q_k \, r_k \, r_{k-1} \ldots r_2 \, r_1$$

así obtenemos la expresión del número n en el sistema de base p. En caso de $p = 10, 3, 2$ estas escrituras abreviadas se llaman numeraciones en *sistema decimal*, *sistema ternario* y *sistema binario*, respectivamente.

Ejemplo. El número "veintiuno" es :

$$(2 \times 10) + 1 = 21 \qquad \text{(sistema decimal)}$$

En el sistema ternario tenemos :

$$21 = 7 \times 3 + \boxed{0} \;,$$

$$7 = \boxed{2} \times 3 + \boxed{1} \;,$$

luego :

$$21 = (2 \times 3^2) + (1 \times 3^1) + 0$$

o sea :

$$21 \ (decimal) = 2\,1\,0 \quad (sistema\ ternario).$$

En el sistema binario tenemos :

$$21 = (10 \times 2) + \boxed{1},$$

$$10 = (5 \times 2) + \boxed{0},$$

$$5 = (2 \times 2) + \boxed{1},$$

$$2 = (\boxed{1} \times 2) + \boxed{0} \;,$$

luego : $21 = (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2) + 1$, o sea : 21 *(decimal)* $= 1\,0\,1\,0\,1$ *(binario)*

Ejercicio 31. Expresar el número 5301 (base 6) en el sistema decimal y en el sistema ternario.

Solución. 5301 (base 6) $= (5 \times 6^3) + (3 \times 6^2) + (0 \times 6^1) + 1$

$$= 1080 + 108 + 1 = 1189 \ (decimal).$$

$$
\begin{aligned}
1189 &= (396 \times 3) + \boxed{1} \\
396 &= (132 \times 3) + \boxed{0} \\
132 &= (44 \times 3) + \boxed{0} \\
14 &= (4 \times 3) + \boxed{2} \\
4 &= (\boxed{1} \times 3) + \boxed{1} \, .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos :

$$1189 \ (decimal) = 1122001 \ \ (sistema\ ternario)\ .$$

■

Ahora, estudiaremos la expresión de un número quebrado utilizando la numeración en sistema de base $p \ (p \neq 1)$. Sea $\frac{n}{m}$ un número quebrado ; si $n > m$ por división ordinaria de n por m obtenemos :

$$n = m\,q + r_o \qquad\qquad (0 \leq r_o < m)$$

luego :

$$\frac{n}{m} = q + \frac{r_o}{m} \qquad , \tag{1}$$

donde el número natural q es *la parte entera del número quebrado* $\frac{n}{m}$.

Dividiendo $p\,r_o$ por m :

$$p\,r_o = a_1\, m + r_1 \qquad\qquad (0 \leq r_1 < m\ ,\ \ 0 \leq a_1 < p)$$

donde a_1 es la parte entera de $\frac{p\,r_o}{m}$, y r_1 es el residuo de la división. Luego :

$$\frac{r_o}{m} = \frac{a_1}{p} + \frac{r_1}{p\,m} \qquad . \tag{2}$$

Si $r_1 \neq 0$, dividiendo $p\,r_1$ por m se tiene

$$p\,r_1 = a_2\, m + r_2 \qquad\qquad (0 \leq r_2 < m\ , \quad 0 \leq a_2 < p) \qquad ,$$

o sea :

$$\frac{r_1}{m} = \frac{a_2}{p} + \frac{r_2}{p\,m} \quad . \tag{3}$$

Reemplazando (3) en (2) :

$$\frac{r_o}{m} = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{r_2}{p^2\, m} \quad . \tag{4}$$

Así sucesivamente, si $r_2 \neq 0$ se tiene :

$$\frac{r_o}{m} = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \frac{r_3}{p^3\, m} \qquad (0 \leq r_3 < m\,,\ 0 \leq a_3 < p\,)\ .$$

En general :

$$\frac{r_o}{m} = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \cdots + \frac{a_k}{p^k} + \frac{r_k}{p^k\, m} \quad , \tag{5}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ no son negativos y son menores que p, $0 \leq r_k < m$.

Si para algún k se llega a tener $r_k = 0$ obtenemos entonces :

$$\frac{r_o}{m} = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \cdots + \frac{a_k}{p^k} \ . \tag{6}$$

Abreviadamente la expresión (6) se denota como sigue :

$$\frac{r_o}{m} = 0\,.\,a_1\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_k \quad \text{(base } p\,\text{)}. \tag{7}$$

Si $r_k \neq 0$ para todo k, antes de realizar m *veces* las divisiones sucesivas se repetirá alguno de los residuos obtenidos anteriormente, puesto que los números $r_o, r_1, r_2, \ldots$ son *menores* que m, digamos

$$r_j = r_{j+l} \qquad (\,j + l < m\,).$$

En tal caso :

$$p\cdot r_j = (m \cdot a_{j+1}) + r_{j+1} \;,\; p\cdot r_{j+l} = (m \cdot a_{j+l+1}) + r_{j+l+1} \quad ,$$

así :

$$a_{j+1} = a_{j+l+1} \quad , \quad r_{j+1} = r_{j+l+1} \quad ,$$

sucesivamente tenemos :

$$a_{j+2} = a_{j+l+2} \;,\; a_{j+3} = a_{j+l+3} \;, \ldots ,\; a_{j+l} = a_{j+2l} \quad .$$

Por lo tanto, se repiten los números $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots , a_{j+l}$ en forma cíclica, y obtenemos la expresión de $\frac{r_o}{m}$ como sigue :

$$\frac{r_o}{m} = 0 \,.\, a_1 a_2 \ldots a_j \underbrace{a_{j+1} a_{j+2} \ldots a_{j+l}} \cdot \underbrace{a_{j+1} \ldots a_{j+l}} \cdot \underbrace{a_{j+1} \ldots a_{j+l}} \ldots \; . \tag{8}$$

Esta expresión de un número quebrado se llama *expresión cíclica en el sistema de base* p , y los números $a_{j+1} a_{j+2} \ldots a_{j+l}$ constituyen la parte cíclica de la expresión ; se acostumbra denotar (8) como sigue :

$$\frac{r_o}{m} = 0 \,.\, a_1 a_2 \ldots a_j \dot{a}_{j+1} a_{j+2} \ldots \dot{a}_{j+l} \quad , \tag{9}$$

indicando que la parte que está entre los dos puntos se repite periódicamente .

Ejemplo 2. Expresemos $\frac{1}{7}$ en el sistema decimal $(p = 10)$.

$$1 \times 10 = \boxed{1} \times 7 + 3 \qquad \left(\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{3}{7 \times 10}\right)$$

$$3 \times 10 = \boxed{4} \times 7 + 2 \qquad \left(\frac{3}{7} = \frac{4}{10} + \frac{2}{7 \times 10}\right)$$

$$2 \times 10 = \boxed{2} \times 7 + 6 \qquad \left(\frac{2}{7} = \frac{2}{10} + \frac{6}{7 \times 10}\right)$$

$$6 \times 10 = \boxed{8} \times 7 + 4 \qquad \left(\frac{6}{7} = \frac{8}{10} + \frac{4}{7 \times 10}\right)$$

$$4 \times 10 = \boxed{5} \times 7 + 5 \qquad \left(\frac{4}{7} = \frac{5}{10} + \frac{5}{7 \times 10}\right)$$

$$5 \times 10 = \boxed{7} \times 7 + 1 \qquad \left(\frac{5}{7} = \frac{7}{10} + \frac{1}{7 \times 10}\right)$$

$$1 \times 10 = 1 \times 7 + 3 \qquad \left(\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{3}{7 \times 10}\right)$$

En la sexta división se obtiene 1 como residuo, es decir, el número que apareció en el primer paso. Por lo tanto :

$$\frac{1}{7} = 0\,.\,\underbrace{142857}\;\underbrace{142857}\;\underbrace{142857}\;\underbrace{14}\;\ldots$$

$$= 0\,.\,\dot{1}4285\dot{7}$$

Ejercicio 32. Expresar $\frac{3}{7}$ en el sistema ternario $(p = 3)$.

$$\begin{array}{ccccc|c|ccc}
3 & \times & 3 & = & & 1 & \times 7 & + & 2 \\
2 & \times & 3 & = & & 0 & \times 7 & + & 6 \\
6 & \times & 3 & = & & 2 & \times 7 & + & 4 \\
4 & \times & 3 & = & & 1 & \times 7 & + & 5 \\
1 & \times & 3 & = & & 0 & \times 7 & + & 3 \\
\end{array}$$

$$3 \times 3 = 1 \times 7 + 2 \;,$$

$$\frac{7}{3} = 0\,.\,\underbrace{10210}\;\underbrace{10210}\;\underbrace{102}\;\ldots = 0.\,\dot{1}021\dot{0} \qquad \text{(base } 3\text{)}$$

■

Ejemplo 3. Expresar $\frac{1}{3}$ en el sistema decimal :

$$1 \times 10 = 3 \times 3 + 1$$

$$1 \times 10 = 3 \times 3 + 1$$

$$\frac{1}{3} = 0.\,3333 \;\ldots = 0.\,\dot{3}$$

Esto es :

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = 0.3 + \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{300} = 0.33 + \frac{1}{300}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{1}{3000} = 0.333 + \frac{1}{3000}$$

etc.

O sea que 0.3 es la aproximación de $\frac{1}{3}$ tomando hasta el primer decimal, 0.33 es la aproximación de $\frac{1}{3}$ considerando hasta el segundo decimal, más generalmente, $0.\underbrace{33\ldots3}_{n}$ es la aproximación de $\frac{1}{3}$ considerando hasta n-ésimo decimal, y los errores de estas aproximaciones son :

$$\frac{1}{30}\ ,\ \frac{1}{300}\ ,\ \frac{1}{3000}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{3\times10^n}$$

respectivamente . Cada vez que aumente el número de decimales el error de las aproximaciones disminuye y *se acerca a cero*, o sea que los números

$$0.3\ ,\ 0.33\ ,\ 0.333\ ,\ 0.3333\ ,\ \ldots$$

van acercándose al valor verdadero $\frac{1}{3}$. En otras palabras, el número quebrado $\frac{1}{3}$ es *el límite de la sucesión* :

$$\{\ 0.3\ ,\ 0.33\ ,\ 0.333\ ,\ \ldots\ ,\ 0.\underbrace{33\ldots3}_{n}\ ,\ \ldots\ \}\ .$$

■

Nota. Suponemos que el lector sabe muy bien lo que es *una sucesión*, y lo que es *el límite* de una sucesión.

Sabemos ya que cualquier número quebrado puede ser expresado como un *número decimal cíclico* ; recíprocamente se puede demostrar que cualquier número decimal cíclico es una expresión de algún número quebrado .

Demostración . $0.\, b_1\, b_2 \ldots b_k\, \dot{a}_1\, a_2 \ldots \dot{a}_l$

$$= 0.\, b_1 \ldots b_k \underbrace{a_1\, a_2 \ldots a_l}_{1^{\circ}\ ciclo}\ \underbrace{a_1\, a_2 \ldots a_l}_{2^{\circ}\ ciclo}\ \underbrace{a_1\, a_2 \ldots a_l}_{3^{\circ}\ ciclo} \ldots$$

$$= 0.\, b_1 b_2 \ldots b_k + \frac{1}{10^k} \{ 0.\, a_1 a_2 \ldots a_l + \frac{0.\, a_1 a_2 \ldots a_l}{10^l} + \frac{0.\, a_1 a_2 \ldots a_l}{10^{2l}} + \ldots \}$$

$$= 0.\, b_1 b_2 \ldots b_k + \frac{0.\, a_1\, a_2 \ldots a_l}{10^k} \{ 1 + \frac{1}{10^l} + \frac{1}{10^{2l}} + \ldots \}$$

$$= 0.\, b_1\, b_2 \ldots b_k + \frac{0.\, a_1\, a_2 \ldots a_l}{10^k} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{10^l}} \qquad * \qquad \blacksquare$$

Nota. Suponemos que el lector conoce muy bien la suma total de una serie geométrica :

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}, \qquad \text{si} \quad -1 < r < 1 .$$

Ejercicio 33. Expresar el número decimal cíclico $0.\dot{a} = 0.\, aaaa \ldots$ en forma de número quebrado y comprobar que la expresión decimal del número quebrado así obtenido es igual a $0.\, a$.

Solución. $0.\dot{a} = 0.\, aaa \ldots = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1000} + \ldots$

$$= \frac{a}{10} [1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + \ldots] = \frac{a}{10} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{a}{9} \quad .$$

Tenemos :

$$10 \quad a = 9\, a + a \qquad (0 < a < 10\ )$$

$$10 \quad a = 9\, a + a$$

luego :

$$\frac{a}{9} = 0.\,aaa\,\ldots \qquad = 0.\,\dot{a}\ .$$

Nótese que si $a = 9$ se tiene que $0.999\ \ldots = 1$. ■

Observación . Cualquier *número decimal finito* puede expresarse en forma decimal cíclica con parte cíclica 9 , o sea :

$$0.\,b_1 b_2 \ldots b_k = 0.\,b_1 b_2 \ldots (b_k - 1)\,\dot{9} \qquad (b_k \neq 0)\ ,$$

por ejemplo :

$$0.\,31\dot{9} = 0.\,31999\ \ldots = 0.\,32\ .$$

El número 0.32 puede ser notado por $0.32000\ \ldots = 0.\,32\dot{0}$; por lo tanto tenemos dos expresiones cíclicas del mismo número $\frac{32}{100}$.

5. *Números decimales no-cíclicos.*

Las expresiones decimales no-cíclicas, por ejemplo :

$0.1010010001000010\ \ldots\ldots$

$1.41421356\ \ldots\ldots$

$2.7182818\ \ldots$

no representan números quebrados, o sea que *la sucesión de números:*

$$\{\ 1\ ,\ 1.4\ ,\ 1.41\ ,\ 1.414\ ,\ 1.4142\ ,\ \ldots\ \} \qquad (1)$$

no se "acerca" a un número quebrado. ¿ qué representa entonces la escritura $1.41421\ \ldots$? Es conveniente entonces ampliar el concepto clásico de número : decimos que *toda expresión* decimal no cíclica también es un número; estos números (positivos ó negativos) se llaman *números irracionales* . Los números racionales ó irracionales se llaman *números reales*, así que *un número real* es *una expre-*

sión decimal. El conjunto de todos los números reales se denota por $\mathbb{R}$. En $\mathbb{R}$ se pueden definir las operaciones de adición y sustracción como la suma ó diferencia de dos expresiones decimales en la forma acostumbrada. También, podemos establecer un orden $(<, ó, >)$ en $\mathbb{R}$, y hablar de la convergencia o divergencia de una sucesión de números reales.

Ejemplo 4. Dados dos números cuya expresión decimal no es finita:

$$a = a_o \cdot a_1 a_2 a_3 \ldots \quad , \quad b = b_o \cdot b_1 b_2 b_3 \ldots ,$$

tenemos que $a > b$ si a_o (la parte entera de a) $> b_o$ (la parte entera de b), ó, $a_o = b_o$ pero $a_1 > b_1$, y, así sucesivamente, es decir:

$$a_o = b_o,\ a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, \text{ pero } a_k > b_k \text{ (para algún } k).$$

■

Tenemos la siguiente propiedad:

Teorema 1. *Cualquier sucesión creciente y acotada de números reales tiende a un número real.*

Demostración. Sea

$$\{ a_o^{(n)} \cdot a_1^{(n)}\ a_2^{(n)}\ a_3^{(n)} \ldots\ldots ,\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots \} \tag{2}$$

una sucesión creciente y acotada, entonces la sucesión formada por las partes enteras de (2), $\{ a_o^{(n)},\ n = 1, 2, 3, \ldots \}$ es acotada, luego esta sucesión tiene un máximo (ver Ejercicio 15):

$$b_o = a_o^{(N_o)} = \textit{máximo}\ \{ a_o^{(n)},\ n = 1, 2, 3, \ldots \}.$$

La sucesión $\{ a_o^{(1)}, a_o^{(2)}, a_o^{(3)}, \ldots \}$ es creciente y por lo tanto:

$$a_o^{(n)} = a_o^{(N_o)} = b_o \quad \text{(para todo } n \geq N_o).$$

La sucesión formada por la primera cifra decimal de cada número :

$$\{ a_1^{(n)} , n = N_o , N_o + 1 , N_o + 2 , . . . \}$$

es *creciente* y acotada ; sea

$$b_1 = a_1^{(N_1)} = máximo \{ a_1^{(n)} , n \geq N_o \} ,$$

tenemos :

$$a_1^{(n)} = a_1^{(N_1)} = b_1 \qquad \text{(para todo } n \geq N_1) .$$

La sucesión formada por la segunda cifra decimal de cada número, $\{ a_2^{(n)} \}$, es creciente a partir de N_1-ésimo término; sea

$$b_2 = a_2^{(N_2)} = máximo \{ a_2^{(n)}, n \geq N_1 \} ,$$

luego :

$$a_2^{(n)} = a_2^{(N_2)} = b_2 \quad \text{(para todo } n \geq N_2) .$$

Prosiguiendo de la misma manera vemos que la expresión decimal :

$$b_o . b_1 b_2 b_3 . . . . . .$$

es el límite de la sucesión (2) .

***Ejemplo* 5.** Observemos la sucesión $\{ \frac{n^2}{n^2 + 1} \}$,

$$n = 1 , \quad \frac{1^2}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} = 0. 50000 . . .$$

$$n = 2 , \quad \frac{2^2}{2^2 + 1} = \frac{4}{5} = 0.80000 . . .$$

$$n = 3 , \quad \frac{3^2}{3^2 + 1} = \frac{9}{10} = 0.90000 . . .$$

$$n = 4 , \quad \frac{4^2}{4^2 + 1} = \frac{16}{17} = 0.94117 . . .$$

$n = 5, \quad \dfrac{5^2}{5^2+1} = \dfrac{25}{26} = 0.96153\ \ldots$

$n = 6, \quad \dfrac{6^2}{6^2+1} = \dfrac{36}{37} = 0.97297\ \ldots$

$n = 7, \quad \dfrac{7^2}{7^2+1} = \dfrac{49}{50} = 0.98000\ \ldots$

$n = 8, \quad \dfrac{8^2}{8^2+1} = \dfrac{64}{65} = 0.98461\ \ldots$

$n = 9, \quad \dfrac{9^2}{9^2+1} = \dfrac{81}{82} = 0.98780\ \ldots$

$n = 10, \quad \dfrac{10^2}{10^2+1} = \dfrac{100}{101} = 0.99099\ \ldots$

La sucesión obtenida tomando la 1a. cifra decimal de cada número es :

$$\{ 8, 9, 9, 9, \ldots \},$$

que es creciente y su máximo es 9. $(N_1 = 2,\ b_1 = 9)$.

La sucesión formada por la 2a. cifra decimal de cada número es :

$$\{ 0, 0, 0, 4, 6, 7, 8, 8, 9, \ldots \}$$

que es creciente a partir del $N_1 (=2)$-ésimo término, y su máximo es 9. Así pues el límite de la sucesión dada es :

$$0.99\ \ldots$$

Ejercicio 34. La sucesión : $\{ 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!},\ n = 1, 2, 3, \ldots \}$ es creciente y acotada :

$1 + \dfrac{1}{1!} = 2.000000\ \ldots$

$1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} = 2.500000\ \ldots$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2.666666 \ldots$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2.708333 \ldots$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{5!} = 2.716666 \ldots$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{6!} = 2.718055 \ldots$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{7!} = 2.718253 \ldots$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{8!} = 2.718277 \ldots$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718279 \ldots$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{10!} = 2.718281 \ldots \quad , \text{ etc.}$$

La sucesión formada por los números de la parte entera es :

$$\{ \overset{1}{2}, \overset{2}{2}, \overset{3}{2}, \ldots \} , \quad N_o = 1 \quad , \quad b_o = \text{máx} \{ 2, 2, \ldots \} = 2 .$$

La sucesión formada por las primeras cifras decimales es :

$$\{ \overset{1}{0}, \overset{2}{5}, \overset{3}{6}, \overset{4}{7}, \overset{5}{7}, 7, 7, \ldots \} ,$$

que es creciente y tenemos :

$$b_1 = 7 \quad , \quad N_1 = 4 .$$

La sucesión formada por las segundas cifras decimales es :

$$\{ \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \overset{3}{6}, \Big| \overset{4}{0}, \overset{5}{1}, \overset{6}{1}, 1, 1, \ldots \} ,$$

la cual es creciente a partir del $N_1 (=4)$ ésimo término con

$$b_2 = \text{máximo}\ \{ \overset{④}{0}, \overset{⑤}{1}, \overset{⑥}{1}, \ldots \} = 1 , \; N_2 = 5 .$$

La sucesión formada por las terceras cifras decimales es

$$\{ \overset{①}{0}, \overset{②}{0}, \overset{③}{6}, \overset{④}{8}, \Big| \overset{⑤}{6}, \overset{⑥}{8}, \overset{⑦}{8}, \ldots \} ,$$

y es creciente a partir del $N_2 (=5)$ ésimo término,

$$b_3 = \text{máx}\ \{ \overset{⑤}{6}, \overset{⑥}{8}, \overset{⑦}{8}, \overset{⑧}{8}, \ldots \} = 8 , \qquad N_3 = 6 .$$

La sucesión formada por las cuartas cifras decimales es :

$$\{ \overset{①}{0}, \overset{②}{0}, \overset{③}{6}, \overset{④}{3}, \overset{⑤}{6}, \Big| \overset{⑥}{0}, \overset{⑦}{2}, \overset{⑧}{2}, \overset{⑨}{2}, \ldots \} ,$$

y es creciente a partir del $N_3 (=6)$ ésimo término ;

$$b_4 = \text{máx}\ \{ \overset{⑥}{0}, \overset{⑦}{2}, \overset{⑧}{2}, \overset{⑨}{2}, \ldots \} = 2 , \quad N_4 = 7 .$$

Así pues, la sucesión converge al límite :

$$b_1 . b_1 b_2 b_3 b_4 \ \ldots \ = \ 2.7182 \ \ldots \qquad \blacksquare$$

***Ejercicio 35*.** Demostrar que cualquier sucesión de números reales, decreciente y acotada inferiormente converge a un número real.

***Ejercicio 36*.** Un número real x, no-negativo, es cero si x es menor que cualquier número racional positivo .

***Demostración*.** Sea $x = x_o . x_1 x_2 x_3 \ldots x_k \ldots$. Entonces :

$x_o = 0$ ya que $x < 1$ (o sea que $x_o < 1$).

$x_1 = 0$ ya que $x < 0.1$ (o sea que $x_1 < 1$).

En general, $x_k = 0$ ya que $x < 0.\underbrace{0\,0 \ldots 1}_{k}$ (o sea que $x_k < 1$). Así, se tiene que

$$x = 0.00 \ldots 0 \ldots = 0$$

■

Ejercicio 37 . Dado un número *irracional* x , siempre *existe* una sucesión creciente de números racionales que tiende a x .

Sugerencia . Sea $x = x_o . x_1 x_2 x_3 \ldots$;

considérese la sucesión :

$$\{ x_o . x_1 x_2 \ldots x_n ; \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots \} .$$

Obsérvese que

$$0 < x - x_o . x_1 x_2 \ldots x_n < \frac{1}{10^n} \to 0 \quad (n \to \infty) .$$

Ejercicio 38 . Sea e el límite de la sucesión del Ejercicio 34 :

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} .$$

Demostrar que e es irracional .

Solución . Sea $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ entonces, para $n > 10$, tenemos :

$$0 < e - S_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{n!\,(n+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right\}$$

$$< \frac{1}{12 \cdot n!} \left\{ 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots \right\}$$

$$= \frac{1}{n!} \; \frac{1.111\ldots.}{12} < \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{n!} \quad ,$$

luego :

$$0 < e \cdot n! - S_n \cdot n! < \frac{1}{10} \quad . \tag{3}$$

El número $S_n \cdot n!$ es un número natural ya que S_n es un número racional con denominador $n!$. Si e fuera un número racional, $e \cdot n!$ sería un número natural para n suficientemente grande, por lo tanto, $e\,n! - S_n\,n!$ sería un número entero, esto es imposible ya que no existe un número entero entre 0 y $\frac{1}{10}$. ■

Usando el teorema 1 y el Ejercicio 37 es fácil definir la multiplicación en $\mathbb{R}$ como sigue :

Sean $x = x_o \cdot x_1\, x_2\, x_3 \ldots$, $y = y_o \cdot y_1\, y_2\, y_3 \ldots$.

Se define :

$$x \cdot y = \lim_{n \to \infty} (x_o \cdot x_1\, x_2 \ldots x_n) \cdot (y_o \cdot y_1\, y_2 \ldots y_n) \; . \tag{4}$$

Ejercicio 39 . Demostrar que existe un número real $x > 0$ tal que

$$x^2 = 2 \qquad \text{(Ver Ejercicio 30)} .$$

Solución . Como $1^2 = 1 < 2$, $(1+1)^2 = 4 > 2$, .

Sea $x_o = 1$. Tenemos así :

$$(1.4)^2 = 1.96 < 2 \; , \; (1.5)^2 = 2.25 > 2 \; ,$$

Sea

$$x_1 = 4 \qquad , \text{ etc.}$$

En general, suponemos que hemos determinado los valores de $x_o, x_1, \ldots, x_n$ tales que

$$(x_o \cdot x_1\, x_2 \ldots x_n)^2 < 2 \; ,$$

$$(x_o \cdot x_1 x_2 \; . . . \; x_n + \frac{1}{10^n})^2 > 2 \, .$$

Podemos determinar x_{n+1} de tal manera que :

$$(x_o \cdot x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1})^2 < 2 \ ,$$

$$(x_o \cdot x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}})^2 > 2 \ .$$

Sea $x = \lim\limits_{n \to \infty} (x_o \cdot x_1 x_2 \ldots x_n)$, entonces $x^2 = \lim\limits_{n \to \infty} (x_o \cdot x_1 x_2 \ldots x_n)^2 \leq 2.$

Pero :

$$2 \leq \lim_{n \to \infty} (x_o \cdot x_1 x_2 \ldots x_n + \frac{1}{10^n})^2$$

$$= \lim_{n \to \infty} [(x_o \cdot x_1 \ldots x_n)^2 + \frac{2}{10^n}(x_o \cdot x_1 \ \ldots \ x_n) + \frac{1}{10^{2n}}] = x^2 .$$

Por lo tanto se tiene que

$$x^2 = 2 \ .$$

***Ejercicio** 40.* Demostrar que $log_{10}2 = 0.3010299956 \ldots$ es un número irracional .

Solución. Supongamos que $log_{10} 2$ fuera igual a p/q $(p, q$ son naturales):

$$10^{p/q} = 2 \quad ,$$

entonces se tendría :

$$10^p = 2^q \, .$$

Esto es *imposible* ya que el último dígito de 10^p es el número 0 ; en cambio el de 2^q puede ser únicamente $2, 4, 6,$ ú , 8 .

***Ejercicio** 41.* Demostrar que $log_{10}3$, $log_{10}5$, $log_{10}6$, $log_{10}7$ y $log_{10}11$ son irracionales.

Nota . El número $\pi = 141596 \; . \, . \, .$ fue utilizado ya en la época de los griegos (el valor $\frac{22}{7}$ fue empleado por Arquímedes como una aproximación de él). Sin embargo, la irracionalidad de π fue demostrada por Lambert apenas en 1761 .Este demostró primero que $\tan\theta$ es irracional si θ es racional, como $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ (racional) $\frac{\pi}{4}$ *no puede ser racional* .

Ejercicio 42 . Sean $a, b \; (a < b)$; existe por lo menos un número racional r y por lo menos un número irracional s, tales que

$$a < r < b \quad , \quad a < s < b \quad .$$

Solución . i) Como $b - a > 0$, existe un número natural n (suficientemente grande) tal que $\frac{1}{n} < b - a$.

Además existe k natural tal que

$$(\frac{1}{n}) k < a \; , \quad (\frac{1}{n}) (k+1) > a \quad ;$$

por lo tanto tenemos :

$$a < \frac{1}{n}(k+1) = (\frac{1}{n}) k + \frac{1}{n} < a + \frac{1}{n} < b \; .$$

ii) Existe un número natural n tal que

$\frac{\sqrt{2}}{n} < b - a$ ($\sqrt{2}$ es irracional, ver Ejercicio 30), etc. ■

Intervalos Encajados .

Sea $\{ [a_k, b_k] , k = 1, 2, 3, \ldots \}$ una familia de intervalos tal que

i) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}] \supset \cdots$,

ii) $\lim\limits_{k \to \infty} (b_k - a_k) = 0$

Tenemos :

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \le a_{k+1} \le \cdots \le b_1 \ ,$$

$$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_k \ge b_{k+1} \ge \cdots \ge a_1 \ ,$$

por lo tanto (Teorema 1) existen los límites :

$$a = \lim_{k\to\infty} a_k \ , \qquad a \ge a_k \quad (\text{para todo} \quad k) \ ,$$

$$b = \lim_{k\to\infty} b_k \ , \qquad b \le b_k \quad (\text{para todo} \quad k) \ .$$

Pero :

$$b - a = \lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = 0 \ ,$$

por consiguiente :

$$a = b \quad .$$

El límite común $a (= b)$ pertenece a $[a_k, b_k]$ para todo k, es decir

$$a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \ .$$

Recíprocamente, si $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ se tiene : $x \ge a_k$, $x \le b_k$ (para todo k), luego : $x \ge a$, y , $x \le b$

o sea que $x = a = b$. Por lo tanto tenemos :

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = \{ a \} \ . \tag{5}$$

Así pues, una familia de intervalos que satisface las condiciones (i) y (ii) determina *un número real* por medio de como único elemento de su intersección. Recíprocamente, *un número real* siempre es determinado por la intersección total de una familia de intervalos encajados, con extremos racionales .

Demostración. Sea $x = x_0 . x_1 x_2 x_3 \ . \ . \ . \in \mathbb{R}$

Considerar los intervalos $[a_k, b_k]$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ definidos por :

$$a_k = x_o . x_1 x_2 \ldots x_k \ , \quad b_k = x_o . x_1 x_2 \ldots x_k + \frac{1}{10^k} \ ,$$

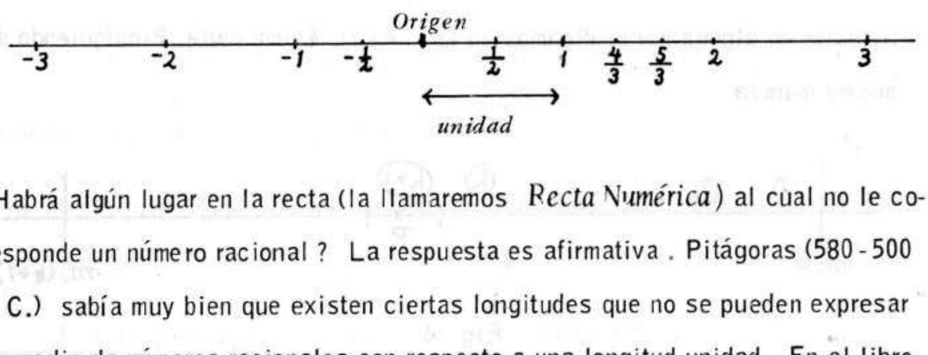
evidentemente :

$$b_k - a_k = \frac{1}{10^k} \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty), \ \text{y}$$

$$\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \ . \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 6. Mostrar que en el Ejercicio 39, hemos definido $\sqrt{2}$ por medio de la intersección de intervalos encajados con extremos racionales.

Ejemplo 7 . (*La Recta numérica*) . Se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los números racionales y los puntos de una recta dada, escogiendo un punto fijo (el origen) sobre la recta y una distancia fija (la unidad) (Fig. 1) .



¿ Habrá algún lugar en la recta (la llamaremos *Recta Numérica*) al cual no le corresponde un número racional ? La respuesta es afirmativa . Pitágoras (580 - 500 A. C.) sabía muy bien que existen ciertas longitudes que no se pueden expresar por medio de números racionales con respecto a una longitud unidad. En el libro de Euclides (330 - 275 A. C.) se demuestra que la diagonal de un cuadrado de lado uno no es un número racional (ver Ejercicio 30) . Pero, el método de *intervalos* encajados nos garantiza que al punto que no corresponde a un número racional se le puede asignar un número irracional (ó una expresión decimal no cíclica) como sigue : Sea P un punto sobre la recta numérica, entonces P debe estar entre dos puntos correspondientes a dos enteros sucesivos, por ejemplo m y $m+1$

(para mayor sencillez suponemos que $m > 0$).

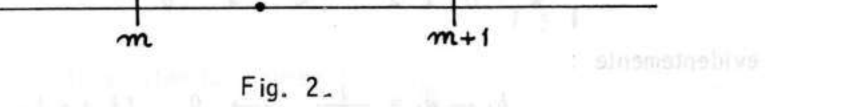


Fig. 2.

Subdividimos el trozo de la recta entre el punto m y el punto $m+1$ en 10 partes iguales, entonces el punto P debe hallarse en alguna parte, digamos en la $(k+1)$-ésima parte.

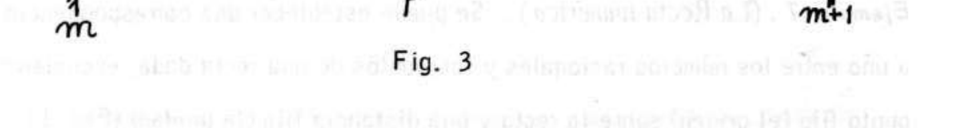


Fig. 3

Subdividiendo la parte mencionada en 10 partes iguales entonces el punto P debe estar en alguna parte, digamos en la $(h+1)$-ésima parte. Prosiguiendo de la misma manera

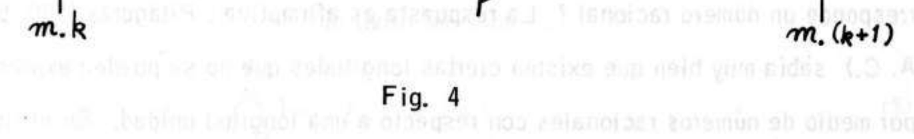


Fig. 4

tenemos que la expresión decimal correspondiente al punto P es

$$m \cdot k\, h \;\ldots\;,$$

ya que el número correspondiente al punto P está determinado por la siguiente sucesión de intervalos :

$$[m, m+1] \supset [m \cdot k,\ m \cdot (k+1)] \supset [m \cdot k h,\ m \cdot k(h+1)] \supset \ldots$$

Recíprocamente, *suponemos* (como *hipótesis característica* de una recta) que para cada " expresión decimal " (ó número real) *existe* sobre la recta un punto, que le corresponde . Entonces hay correspondencia uno a uno entre $\mathbb{R}$ y la recta ,o sea, podemos decir que la recta es una *representación* del conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$ (Recta Real).

Extremo Superior , Extremo Inferior .

Sea S un conjunto de números reales *acotado superiormente* . El conjunto de números enteros formado por las *partes enteras* (*) de los números de S es *acotado* superiormente ; luego existe *el máximo* de este conjunto , digamos a_o . Sea S_o el conjunto de números de S cuya parte entera es igual a a_o , tenemos entonces que $S_o \subset S$ y S_o es distinto del vacío. El conjunto de las primeras cifras decimales de los números de S_o tiene un máximo, digamos a_1 , sea

$$S_1 = \{ x \in S_o \mid \text{ (la primera cifra decimal de } x) = a_1 \} ,$$

entonces : $S_1 \subset S_o$, y S_1 no es vacío .

De la misma manera, el conjunto de las n-ésimas cifras decimales de los números de S_{n-1} tiene un máximo, digamos a_n ; sea

$$S_n = \{ x \in S_{n-1} \mid \text{ (la } n\text{-ésima cifra decimal de } x) = a_n \} ,$$

entonces : $S_n \subset S_{n-1}$, y S_n no es vacío .

Sea

$$a = a_o \cdot a_1 a_2 a_3 \ \ldots \ a_n a_{n+1} \ \ldots \qquad ,$$

(*) Si x es negativo, lo expresamos como sigue :

$$x = - n + (0. x_1 x_2 x_3 \ \ldots \ )$$

-n se llama " la parte entera de x ".

tenemos entonces $x \leq a$ para todo $x \in S$. *(6)*

Como S_n no es vacío, existe $x^{(n)} \in S_n$ tal que

$$x^{(n)} \geq a_o \cdot a_1 a_2 \cdots a_n ,$$

o sea
$$a - x^{(n)} \leq 0.0 \ \dots \ 0 \ a_{n+1} \ a_{n+2} \ \dots \leq \frac{1}{10^n} . \tag{7}$$

El número a así determinado puede pertenecer o no a S. Decimos que a es el *extremo superior de* S, y se denota $Sup\ S$.

Si el conjunto S posee un elemento máximo, el máximo es el extremo superior de S. Si S no tiene máximo, la desigualdad *(7)* nos garantiza que existe una sucesión de números de S que tiende al extremo superior.

***Ejemplo* 8**. Sea

$$S = \{ 1.1 \ , 0.3 \ , \ 1.8 \ , \ 1.797 \ , \ 1.913 \ , \ 1.926 \ \} ,$$

entonces

$$a_o = \text{máximo} \ \{ 1 \ , 0 \ \} = 1$$

$$S_o = \{ 1.1 \ , \ 1.8 \ , \ 1.797 \ , \ 1.913 \ , \ 1.926 \ \} .$$

$a_1 = \text{máximo} \ \{ 1 \ , 8 \ , 7 \ , \ 9 \ \} = 9$

$S_1 = \{ 1.913 \ , 1.926 \ \}$.

$a_2 = \text{máximo} \ \{ 1 \ , 2 \ \} = 2$,

$S_2 = \{ 1.926 \ \}$.

$a_3 = \text{máximo} \ \{ 6 \ \} = 6$,

$S_3 = \{ 1.926 \ \}$,

así pues,

$$Sup\ S = 1.926 = máximo\ de\ S.$$

Ejemplo 9. Sea

$$S = \{ \frac{n^2}{n^2+1} \}$$

$$= \{ 0.5,\ 0.8,\ 0.9,\ 0.941,\ 0.961..,\ 0.976...,\ 0.98,\ 0.984...,\ 0.987..,\ 0.990. ... \}$$

$$a_0 = 0,\ a_1 = 9,\ a_2 = 9,\ ...$$

$$Sup\ S = 0.99\ ...$$

En realidad, se tiene que $Sup\ S = 1 = 0.9999\ ...$ ya que

$$1 > \frac{n^2}{n^2+1} \quad \text{para todo } n \quad \text{y}$$

$$\frac{n^2}{n^2+1} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Ejercicio 43. Sea S un conjunto numérico acotado superiormente, si S no posee elemento máximo, entonces existe una *sucesión creciente* de números de S que converge al extremo superior de S.

Sugerencia. De (7):

$$0 < a - x^{(1)} < \frac{1}{10}, \quad x^{(1)} \in S.$$

Como $a \neq x^{(1)}$, existe n tal que

$$\frac{1}{10^n} < a - x^{(1)},$$

luego $0 < a - x^{(n)} < \frac{1}{10^n} < a - x^{(1)}, \quad x^{(n)} \in S,$

o sea

$$x^{(n)} > x^{(1)}$$

Prosiguiendo de la misma manera, se puede construir una sucesión creciente de números de S que tiende al extremo superior. ■

Se acostumbra denotar :

$$Sup\ S = +\infty$$

si el conjunto S no es acotado superiormente.

Si S es acotado inferiormente existe un número (una expresión decimal) b tal que :

$$b \leq x \quad \text{para todo} \quad x \in S \text{ , y ,} \tag{8}$$

existe $x^{(n)} \in S$ tal que

$$x^{(n)} - b < \frac{1}{10^n} \quad ; \tag{9}$$

este número b se llama el *extremo inferior de* S y se denota : $Inf\ S$. Si S no es acotado inferiormente se acostumbra escribir $Inf\ S = -\infty$.

Ejercicio 44**.** Sea S acotado superiormente, si B es el conjunto de todas las cotas superiores de S entonces $Sup\ S$ es el mínimo de B.

Solución**.** La desigualdad (6) nos dice que $Sup\ S \in B$. Por la desigualdad (7) se tiene que $Sup\ S$ es el mínimo del conjunto B. ■

6. *Cortaduras.*

Si cortamos las recta numérica en dos partes, en el punto de corte se debe encontrar algún número real (Ejemplo 7) ; este hecho nos conduce

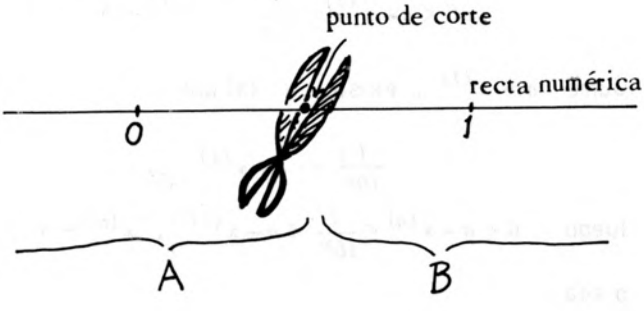


Fig. 5

a un método para definir números reales (es el Método de las Cortaduras de Dedekind) de la siguiente manera :

Subdividimos el conjunto Q (de todos los racionales) en *dos subconjuntos disyuntos* A y B de tal forma que

$$\text{si} \quad x \in A \; , \quad y \in B \qquad \text{entonces} \qquad x < y . \tag{1}$$

Los subconjuntos A y B se llaman "la clase inferior" y "la clase superior" respectivamente de la cortadura y representan los dos "pedazos" cortados de la recta numérica. Este tipo de subdivisión se llama *una cortadura en* Q . Se presentan las tres posibilidades siguientes :

[1] La clase inferior A tiene máximo, y la clase superior B *no* tiene mínimo.

[2] La clase inferior A *no* tiene máximo, y la clase superior B tiene mínimo.

[3] La clase inferior A *no* tiene máximo, y la clase superior B *no* tiene mínimo.

Hay que descartar la otra posibilidad de que A tiene máximo y B tiene mínimo puesto que si a = máximo de A , b = mínimo de B entonces $a < b$ por la condición (1) y por tanto debe existir un número racional r en (a,b) (ver Ejercicio 42) , tal que $r \notin A$, (a es el máximo de A), y $r \notin B$ (b es el mínimo de B) ; esto contradice el hecho de que $Q = A \cup B$.

En los dos primeros casos, un número racional separa las dos clases A y B como sigue :

Caso [*1*] . Sea a = máximo de A entonces

$$A = \{ x \in Q \,/\, x \leq a \} , \quad B = \{ y \in Q \,/\, y > a \} . \tag{2}$$

Caso [2] . Sea b = mínimo de A entonces

$$A = \{ x \in Q \,/\, x < b \} , \quad B = \{ y \in Q \,/\, y \geq b \} . \tag{3}$$

En el tercer caso, existe un *número irracional* que separa las dos clases A y B.

Demostración. Sean $a = Sup\, A$ y $b = Inf\, B$; entonces $a, b \notin Q$. Si $a < b$ existiría un número racional r entre a y b (ver Ejercicio 42) , y

$$r \notin A\ , \quad r \notin B\ , \quad r \in Q \qquad \text{(absurdo)}.$$

Por lo tanto, $a = b$. Esto es :

$$A = \{ x \in Q \ / \ x < a \} \quad , \quad B = \{ y \in Q \ / \ y > a \} . \qquad (4)$$

En cualquier caso, *una cortadura en* Q determina un *número real* que separa las dos clases. (Hablando intuitivamente, se encuentra un número real en el punto del corte de la recta numérica).

Ejemplo 10. Sean $A = \{ x \in Q \ / \ x > 0 \ , x^2 < 2 \} \cup \{ x \in Q \ / \ x \leq 0 \}$,

$$B = \{ x \in Q \ / \ x > 0 \ , x^2 > 2 \ \} .$$

Evidentemente

$$A \cap B = \phi \ , \quad A \cup B = Q \ ,$$

ya que no existe un racional cuyo cuadrado es igual a 2 . Si $x \in A$, $y \in B$ se tiene que $x < y$, por lo tanto (A, B) es una cortadura de Q . Esta cortadura define el número irracional $\sqrt{2}$. ■

Según Dedekind, cada número real es *identificado* con una cortadura de Q y $\mathbb{R}$ (el conjunto de todos los números reales) es la colección de todas las cortaduras. A partir de esta definición se pueden definir las operaciones de adición, sustracción y multiplicación en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 45. Sea (A, B) una *cortadura de* Z . Es decir :

i) $A \cup B = Z$, $A \cap B = \phi$

ii) Si $x \in A$, $y \in B$ entonces $x < y$.

Entonces la clase inferior A *tiene máximo* y la clase superior B *tiene mínimo.*

Ejercicio 46. Sea (A, B) una cortadura de $\mathbb{R}$. Es decir :

i) $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \phi$

ii) Si $x \in A$, $y \in B$ entonces $x < y$.

Entonces existen dos posibilidades :

[1] A tiene máximo y B no tiene mínimo.

[2] A no tiene máximo, y B tiene mínimo.

Ejercicio 47. Sea (A, B) una cortadura de Q. Si $a \in A$ entonces todo $x \in Q$ menor que a pertenece a A. Si $b \in B$ entonces todo $y \in Q$ mayor que b pertenece a B.

Demostración. Sea $x \in Q$, $x < a$; si $x \in B$ se tendría $x > a$ (absurdo). ■

Sea α un número real ; se denota por $(A_\alpha B_\alpha)$ la cortadura en Q que determina el número α (A_α es la clase inferior, B_α es la clase superior). Para *evitar la duplicidad de expresión* supondremos siempre que la clase inferior A_α no tiene máximo en caso de que α sea racional ; ésta no es una restricción esencial.

Ejercicio 48. i) Si $x \in A_\alpha$, existe $x' \in A_\alpha$ tal que $x' > x$.

ii) Si $y \in B_\alpha$, $y \neq \alpha$, existe $y' \in B_\alpha$ tal que $y' < y$.

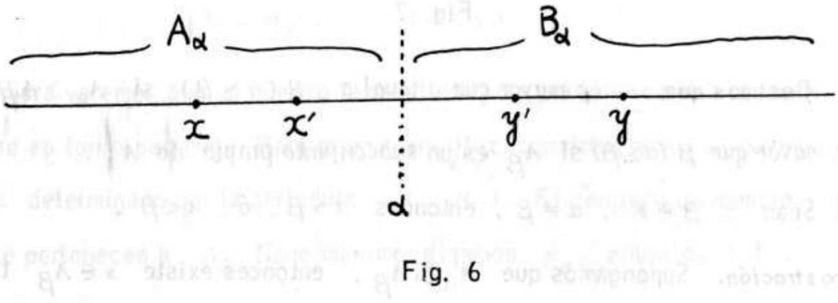


Fig. 6

Demostración. i) Si todo $x'\ (< x)$ pertenece a B_α entonces x es el máximo de A_α (absurdo !).

ii) Si todo $y'\ (<y)$ pertenece a A'_α entonces y es el mínimo de B_α, luego $\alpha = y$ (absurdo). ■

A continuación, estudiaremos las propiedades de los números reales *definidos por cortaduras en* Q.

[I] Decimos que α es *positivo* ($\alpha > 0$) si la clase inferior contiene al número cero ; $\alpha (\neq 0)$ es *negativo* ($\alpha < 0$) si el cero no pertenece a la clase inferior A_α.

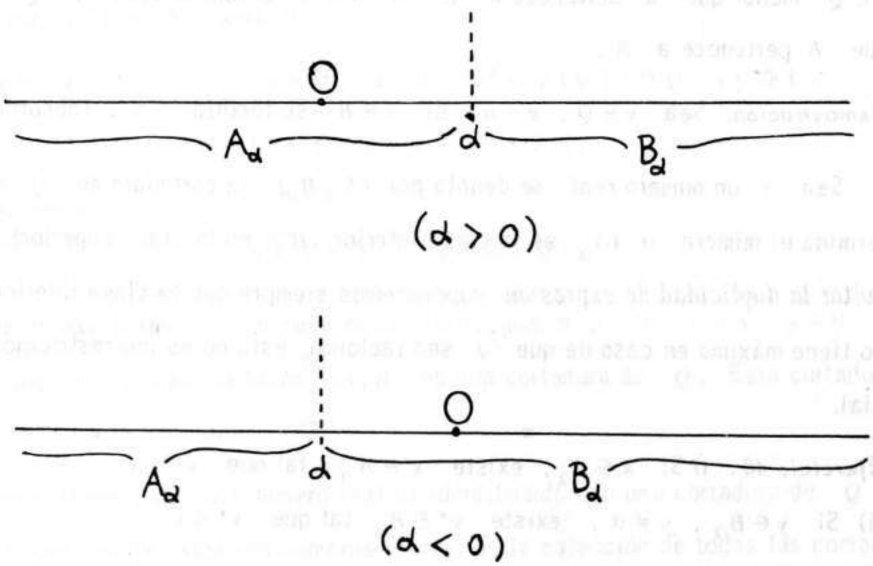


Fig. 7

[II] Decimos que α es *mayor que o igual a* β ($\alpha \geq \beta$) si $A_\alpha \supset A_\beta$, y que α es *mayor que* β ($\alpha > \beta$) si A_β es un *subconjunto propio* de A_α.

[III] Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, entonces $\alpha > \beta$, ó, $\alpha < \beta$.

Demostración. Supongamos que $A_\alpha \not\supset A_\beta$, entonces existe $x \in A_\beta$ tal que

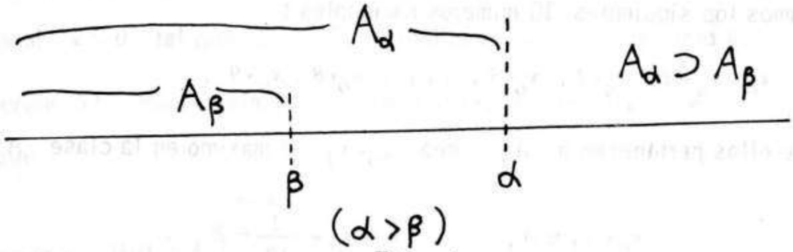


Fig. 8

$x \notin A_\alpha$, luego $x \in B_\alpha$. Esto es, para todo $y \in A_\alpha$ se tiene que $y < x$, luego $y \in A_\beta$ (Ejercicio 47), por lo tanto :

$$A_\alpha \subset A_\beta \qquad (\text{o sea } \alpha < \beta).$$

Ejercicio 49. Demostrar que si $x \in A_\alpha$ y $y \in B_\alpha$ (α = irracional) entonces $x < \alpha < y$.

Solución. Tenemos que :

$$A_x = \{ t \in Q / t < x \} , \ A_y = \{ t \in Q / t < y \}$$

Por el Ejercicio 47 se tiene que $A_x \subset A_\alpha (x < \alpha)$.

Por otra parte, todo número de A_α es menor que y (ya que y es un miembro de la clase superior B_α), luego

$$A_\alpha \subset A_y \ . \qquad (\alpha < y)$$

[IV] Ahora veremos que un número real determinado por una cortadura puede expresarse en forma decimal. Para mayor sencillez, consideraremos un número positivo α determinado por la cortadura (A_α , B_α) . El conjunto de *números enteros* que pertenecen a A_α tiene máximo, digamos x_o , entonces :

$$x_o \in A_\alpha , \qquad x_o + 1 \in B_\alpha .$$

Consideramos los siguientes 10 números racionales :

$$x_o,\ x_o\cdot 1,\ x_o\cdot 2,\ x_o\cdot 3,\ \ldots,\ x_o\cdot 8,\ x_o\cdot 9,$$

algunos de ellos pertenecen a A_α, sea $x_o\cdot x_1$ el máximo en la clase A_α, entonces

$$x_o\cdot x_1 \in A_\alpha , \qquad x_o\cdot x_1 + \frac{1}{10} \in B_\alpha .$$

Consideremos ahora los siguientes 10 números racionales :

$$x_o\cdot x_1 ,\ x_o\cdot x_1 1,\ x_o\cdot x_1 2,\ \ldots,\ x_o\cdot x_1 8,\ x_o\cdot x_1 9,$$

algunos de ellos pertenecen a A_α; sea $x_o\cdot x_1 x_2$ el máximo en la clase A_α; entonces

$$x_o\cdot x_1 x_2 \in A_\alpha , \qquad x_o\cdot x_1 x_2 + \frac{1}{100} \in B_\alpha .$$

De la misma manera, se pueden determinar $x_o, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ y tenemos :

$$x_o\cdot x_1 x_2 \ldots x_k \in A_\alpha , \quad x_o\cdot x_1 x_2 \ldots x_k + \frac{1}{10^k} \in B_\alpha \qquad (5)$$

(para todo k).

Por el Ejercicio 49 :

$$x_o\cdot x_1 x_2 \ldots x_k < \alpha < x_o\cdot x_1 x_2 \ldots x_k + \frac{1}{10^k} , \qquad (6)$$

por lo tanto obtenemos la siguiente expresión decimal de α :

$$\alpha = x_o \cdot x_1 x_2 x_3 \ldots .$$

***Ejercicio* 50** . Para todo $\alpha > 0$, existe un número racional x tal que

$$0 < x < \alpha .$$

Sugerencia . Usar la expansión decimal del número α .

Otra solución. Como $0 \in A_\alpha$ (por definición), si todo racional positivo pertenece a B_α se tiene que 0 es el *máximo* de A_α (absurdo!); por lo tanto existe un racional $x > 0$ tal que $x \in A_\alpha$. Entonces, $x < \alpha$ (Ejercicio 49).

Ejercicio 51. Para cualquier número positivo ε, existen $x \in A_\alpha$, $y \in B_\alpha$ tales que

$$y - x < \varepsilon .$$

Sugerencia. Utilizar (5) y (6).

[V] ***Adición.*** Sean α, β dos números reales, sean

$$S = \{\, x + x' \,/\, x \in A_\alpha,\ x' \in A_\beta \,\}\ ,\quad T = Q - S$$

entonces (S, T) es una cortadura de Q. En realidad, si $z < x + x'$ donde $x \in A_\alpha$ y $x' \in A_\beta$, entonces

$$z = x + (z - x) < x + x'$$

o sea,

$$z - x < x' .$$

Como $x \in A_\alpha$, entonces, $z - x \in A_\beta$ (Ejercicio 47), y por lo tanto:

$$z \in S .$$

Esto es, $z \in T = Q - S$ implica que $z > x + x'$ para todo $x \in A_\alpha$, $x' \in A_\beta$, o sea que z es mayor que cualquier número de S.

Definimos la suma de α y β como el número $\alpha + \beta$ correspondiente a la cortadura (S, T).

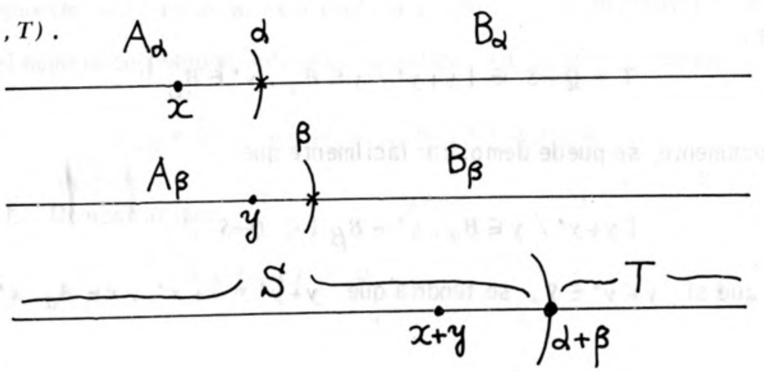


Fig. 9 .

***Ejercicio* 52.** Demostrar que

$$T = Q - S = \{ y+y' \ / \ y \in B_\alpha , \ y' \in B_\beta \}$$

si $\alpha + \beta$ es irracional .

Nota. Si $\alpha + \beta$ es un número racional tenemos :

$$\{ y + y' \ / \ y \in B_\alpha , \ y' \in B_\beta \} = T - \{ \alpha + \beta \} .$$

Demostración. Sea $z \in T = Q - S$, si $z \neq \alpha + \beta$ existe $z' \in T$ tal que $z' < z$ (Ejercicio 48). Sea $\varepsilon = z - z'$ entonces existen $x \in A_\alpha$, $y \in B_\alpha$, $x' \in A_\beta$, $y' \in B_\beta$ tales que

$$y - x < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad y' - x' < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(Ejercicio 51)} .$$

Luego :

$$(y + y') - (x + x') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Tenemos entonces :

$$\underset{S}{\underset{\Cap}{y + y'}} < (x + x') + \varepsilon < \underset{T}{\underset{\Cap}{z'}} + \varepsilon = z .$$

Pero, $z = y + (z - y)$, luego $z - y > y'$ esto es, $y \in B_\alpha$, $z - y \in B_\beta$ (ya que $y' \in B_\beta$) , por lo tanto :

$$z \in \{ y + y' \ / \ y \in B_\alpha , \ y' \in B_\beta \} ,$$

esto es :

$$T = Q - S \in \{ y + y' \ / \ y \in B_\alpha , \ y' \in B_\beta \} .$$

Recíprocamente, se puede demostrar fácilmente que

$$\{ y + y' \ / \ y \in B_\alpha , \ y' \in B_\beta \} \subset Q - S ,$$

puesto que si $y + y' \in S$, se tendría que $y + y' = x + x'$, $x \in A_\alpha$, $x' \in A_\beta$ y entonces, $y > x$, y $y' > x'$ (absurdo !).

Ejercicio 53. Demostrar que $\alpha + 0 = \alpha$.

Demostración . $A_0 = \{ x' \in Q \ / \ x' < 0 \}$. (A_0 es la clase inferior de la cortadura que determina el número cero).

Tenemos inmediatamente que :

$$\{ x + x' \ / \ x \in A_\alpha \ , \ x' \in A_0 \ \} = A_\alpha \ ,$$

ya que , si $x \in A_\alpha$ existe $x'' \in A_\alpha$, $x'' > x$ y entonces :

$$x = x'' + \underbrace{(x - x'')}_{\wedge \atop 0}$$

o sea : $A_\alpha \subset \{ x + x' \ / \ x \in A_\alpha \ , \ x' \in A_0 \}$.

Además es evidente que :

$$\{ x + x' \mid x \in A_\alpha \ , \ x' \in A_0 \} \subset A_\alpha \ .$$

Ejercicio 54 . Demostrar que :

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Ejercicio 55. Demostrar la ley asociativa de la adición, a saber :

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) .$$

[VI] ***El opuesto $-\alpha$ de un número real*** α **.** Si α es *irracional* , se define $-\alpha$ como el número correspondiente a la cortadura $(A_{-\alpha}, B_{-\alpha})$, donde

$$A_{-\alpha} = \{ -y / y \in B_\alpha \} \ , \quad B_{-\alpha} = \{ -x \ / \ x \in A_\alpha \}$$

Ejemplo 11. Demostrar que

$$\alpha + (-\alpha) = 0 \ .$$

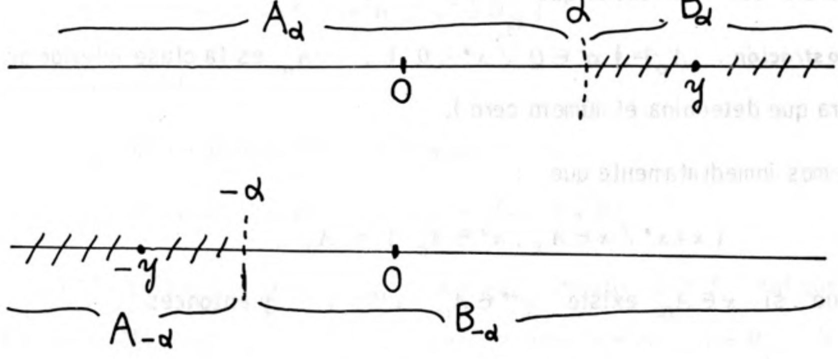


Fig. 10

Demostración . $\alpha + (-\alpha)$ es el número correspondiente a la cortadura cuya clase inferior es :

$$S = \{ x + x' / x \in A_\alpha , x' \in A_{-\alpha} \} = \{ x - y / x \in A_\alpha , y \in B_\alpha \} .$$

Si $t \in Q$, $t < 0$, existen $x \in A_\alpha$ y $y \in B_\alpha$ tales que

$$y - x < (-t) \qquad \text{(Ejercicio 51)} ,$$

o sea

$$x - y > t ,$$

luego

$$t \in S .$$

Evidentemente $0 \notin S$, por lo tanto :

$$S = \{ t \in Q / t < 0 \} .$$

Esta es la clase inferior de la cortadura correspondiente al número cero, o sea :

$$\alpha + (-\alpha) = 0 .$$

[VII] ***Sustracción*** . Se define :

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Ejercicio 56. Demostrar que

$$(\alpha - \beta) + \beta = \alpha$$

Solución . $(\alpha\text{-}\beta) + \beta = [\alpha + (\text{-}\beta)] + \beta = \alpha + [(\text{-}\beta) + \beta] = \alpha + 0 = \alpha$

(ver Ejercicio 53, Ejercicio 55) .

Ejercicio 57. Demostrar que

$$\alpha > \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha - \beta > 0 .$$

[VIII] ***Multiplicación.*** Dados $\alpha , \beta \geq 0$, sean

$$T = \{ y \cdot y' \ / \ y \in B_\alpha , \ y' \in B_\beta \}$$
$$S = Q - T$$

entonces (S, T) es una cortadura de Q .

Demostración. Sea $z > 0$ un número de $S = Q - T$; si existieran y , y' $(y \in B_\alpha , y' \in B_\beta)$ tales que $z > yy'$ se tendría :

$$z = y \cdot \frac{z}{y} > yy' \quad , \quad \text{luego :} \quad \frac{z}{y} > y' ,$$

esto es , $\frac{z}{y} \in B_\beta$ (ya que $y' \in B_\beta$)

por lo tanto se tendría :

$$z = y \cdot \frac{z}{y} \in T \qquad \text{(absurdo !).}$$

Por consiguiente, cualquier número de T es mayor que cualquier $z \in S$, esto es, (S, T) es una cortadura de Q . ■

Definimos el *producto* de α y β , $\alpha \cdot \beta$, como el número correspondiente a la cortadura (S, T) .

Ejercicio 57. Demostrar que $\alpha \cdot 0 = 0$.

Solución. Suponemos que $\alpha > 0$.

Tenemos :

$$B_o = \{ y' \in Q / \ y' \geq 0 \ \}$$

donde B_o es la clase superior de la cortadura que determina a cero, luego :

$$T = \{ \ yy' / \ y \in B_\alpha , \ y' \in B_o \} = \{ \ y' \in Q / \ y' \geq 0 \ \} = B_o \quad ,$$

esto es :

$$\alpha \cdot 0 = 0 \ .$$

Ejercicio 58. Demostrar que la multiplicación es asociativa.

Ejercicio 59. Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, la clase inferior de la cortadura correspondiente a $\alpha \cdot \beta$ es :

$$S = \{ \ x \cdot x' / \ x \in A_\alpha , \ x' \in A_\beta \ , \ x' \geq 0 \ , \ \ x \geq 0 \ \} \cup Q_- \ ,$$

donde

$$Q_- = \{ \ x \in Q \ / \ x < 0 \ \} .$$

Sugerencia. Evidentemente :

$$S \cap \{ \ yy' \ / \ y \in B_\alpha \ , \ y' \in B_\beta \ \} \quad \phi$$

Sea $z > 0$ un número de $Q - \{ \ yy' / \ y \in B_\alpha \ , \ \ y' \in B_\beta \ \}$, entonces existe $z' > z$ tal que

$$z' \notin \{ \ yy' / \ y \in B_\alpha \ , \ y' \in B_\beta \ \} \qquad \text{(Ejercicio 48)} .$$

Existen $y \in B_\alpha$, $y' \in B_\beta$, $x \in A_\alpha$, $x' \in A_\beta$ tales que

$$yy' - xx' < z' - z \qquad \text{(Similar a la demostración del Ejercicio 52)}$$

(7)

luego :

$$z < xx' + \underbrace{z' - yy'}_{\wedge \atop 0} \ < \ x \cdot x'$$

Entonces :

$$z = x \cdot \frac{z}{x} < x x' , \quad \text{o sea,} \quad \frac{z}{x} < x' \in A_\beta ,$$

esto es $\frac{z}{x} \in A_\beta$, luego , $z \in \{ x x' / x \in A_\alpha , x' \in A_\beta \}$,

por lo tanto :

$$Q - \{ y y' / y \in B_\alpha , y' \in B_\beta \} \subset S .$$

Ejercicio 60. Demostrar la ley distributiva :

$$(\alpha + \beta) \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma) .$$

[XIV] ***Extremo superior, Extremo inferior***. Sea S un conjunto de números reales acotado superiormente; podemos considerar que S es un conjunto de cortaduras de Q :

$$S = \{ (A_\alpha , B_\alpha) \}_{\alpha \in S} \tag{8}$$

Si M es una *cota superior* de S se tiene :

$$A_\alpha \subset A_M \qquad \text{para todo} \qquad \alpha \in S . \tag{9}$$

Sean

$$A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha , \quad B = Q - A$$

entonces (A, B) es una cortadura de Q .

Demostración. Sean $x \in A$, $y \in B$ entonces existe $\alpha \in S$ tal que

$$x \in A_\alpha .$$

Como $y \in B = Q - A$ se tiene que $y \notin A_\alpha$, o sea que $y \in B_\alpha$; por lo tanto se tiene que

$$x < y .$$

Nótese que $A \neq Q$, (o sea $B \neq \phi$) ya que $A \subset A_M$.

Si λ es el número real determinado por la cortadura (A, B) entonces :

(i) $\alpha \leq \lambda$ para todo $\alpha \in S$ *(10)*

Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, existen $x \in A$, $y \in B$ tales que

$$y - x < \varepsilon \qquad \text{(Ejercicio 51).}$$

Como $x \in A$ existe algún $\alpha \in S$ tal que

$$x \in A_\alpha \ .$$

Luego :

$$x < \alpha \leq \lambda \leq y \ .$$

Por lo tanto tenemos :

$$\lambda - \alpha < \varepsilon \ ,$$

o sea :

(ii) Existen un $\alpha \in S$ tal que

$$\alpha > \lambda - \varepsilon \ . \tag{11}$$

El número λ es el *extremo superior* de S.

***Nota*.** Si S no es acotado, se tiene que $A = Q$ y $B = \phi$. En este caso se acostumbra escribir : $Sup\ S = +\infty$.

***Ejercicio 61*.** Definir el extremo inferior de un conjunto numérico acotado inferiormente.

***Sugerencia*.** Sean

$$A = \bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha \ , \ B = Q - A \ ,$$

demostrar que (A, B) es una cortadura de Q.

***Ejercicio* 62**. Demostrar que una sucesión creciente y acotada de números reales tiende a un número real.

***Sugerencia*.** Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión creciente acotada, su límite será

$$Sup\,\{\alpha_n\}.$$

* * *

¿Conoce usted la diferencia entre un Matemático y un científico de Laboratorio?

Después de demostrar que la conjetura de Fermat

$$\text{“}\; 2^{2^s}+1 \text{ es primo para } s = 0, 1, \ldots, \text{”}$$

era incorrecta, mucha gente intentó encontrar una fórmula que produjera, sino todos, solamente primos. La persona que estudió por primera vez la función $f(x) = x^2 - x + 41$ debió emocionarse bastante al comprobar que al sustituir en ella $x = 1,2,\ldots, 40$ se obtenían 40 primos. Si hubiese sido un científico de laboratorio, habría gritado : ¡Eureka! Pero como sólo era un matemático, sustituyó $x = 41$ y salió a tomarse una taza de café.

(Adaptado de *Theory of Numbers*, , B. M. Stewart, MacMillan, Nueva York , 1952)