Boletín de Matemáticas
Vol. VII, Nº 3 , pp. 192 - 202

SOBRE LA FUNCION DE LYAPUNOV

JOSE M. CASTRO

Se considerarán en este artículo algunas condiciones suficientes para la estabilidad e inestabilidad de las soluciones de los sistemas de la forma $\dot{x} = f(x)$ (sistemas autónomos). Para ello, es necesario dar algunas definiciones y enunciar algunos teoremas que se refieren a la *función de Lyapunov* como criterio de estabilidad. Aunque no hay métodos generales para encontrarla, es posible hacerlo para algunos sistemas que tengan que ver, más que todo, con problemas de tipo físico.

Definición 1. $N_\varepsilon(M) = \{ x \in R^n \mid \rho(x, M) < \varepsilon \}$

$$N_\varepsilon[M] = \{ x \in R^n \mid \rho(x, M) \leq \varepsilon \} .$$

Definición 2. M es un *conjunto estable* para $\dot{x} = f(x)$, si $\varepsilon > 0$ $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $r^+(x_o) \subset N_\varepsilon(M)$, siempre y cuando $x_o \in N\delta_\varepsilon(M)$.

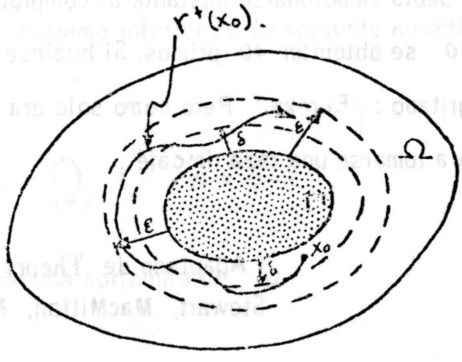
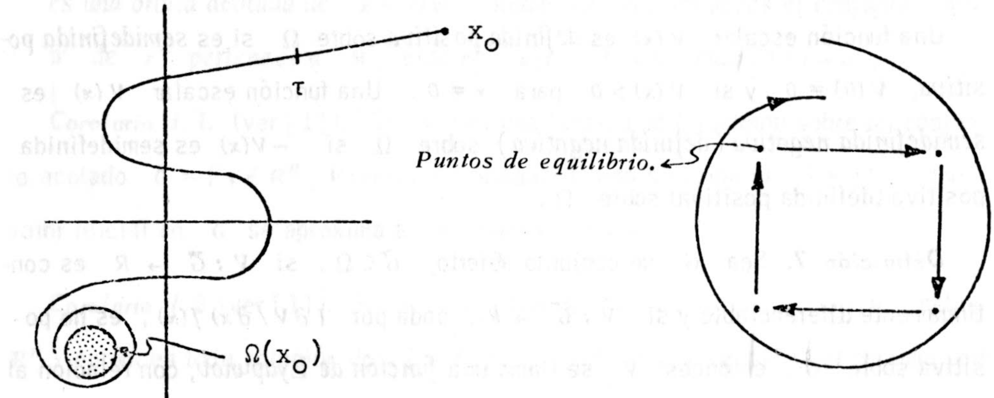


Figura 1

Definición 3. El *conjunto límite* de una órbita r, correspondiente al sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$, es el conjunto de puntos en R^n al cual se aproxima r cuando el tiempo crece. El conjunto límite de r lo denotaremos por $W(r(x))$.



El cuadrado es un conjunto límite W.

Figura 2

Definición 4. Sea M un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ y B un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in B$, $W(r^+(x)) \neq \phi$ y $W(r^+(x) \subseteq M$; entonces M se llama un *atractor relativo* a B. El mayor conjunto B se denotará $A(M)$ y se llamará la *región de atracción* de M; si $A(M) = R^n$, M se llama un *atractor global*.

Definición 5. M es *asintóticamente estable* para $\dot{x} = f(x)$ con relación a G, si es estable y si además existe una vecindad $G_\alpha(M)$ con $\overline{G_\alpha(M)} \subset \Omega$ tal que M es un atractor con relación a $G_\alpha(M)$.

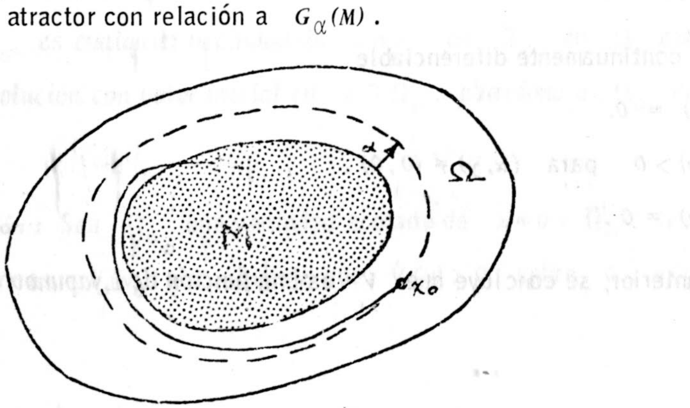


Figura 3

Definición 6. Sea $\Omega \subset R^n$ un subconjunto abierto de R^n, tal que $0 \in \Omega$. Una función escalar $V(x)$, $x \in \Omega$ se dice *semidefinida positiva* sobre Ω, si es continua sobre Ω y $V(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$.

Una función escalar $V(x)$ es *definida positiva* sobre Ω si es *semidefinida positiva*, $V(0) = 0$ y si $V(x) > 0$ para $x \neq 0$. Una función escalar $V(x)$ es *semidefinida negativa (definida negativa)* sobre Ω si $-V(x)$ es semidefinida positiva (definida positiva) sobre Ω.

Definición 7. Sea G un conjunto abierto, $\bar{G} \subset \Omega$, si $V : \bar{G} \to R$ es continuamente diferenciable y si $\dot{V} : \bar{G} \to R$, dada por $(\partial V / \partial x) f(x)$, es no positiva sobre G, entonces V se llama una *función de Lyapunov*, con relación al conjunto G.

Veamos un ejemplo : Dado el sistema

$$\dot{x} = y$$

$$\ddot{x} = \dot{y} = -g(x) ,$$

sea

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$$

$$= \frac{1}{2} y^2 + \int_0^x g(s)\, ds$$

y supongamos que $x\, g(x) > 0$ para $x \neq 0$ y $g(0) = 0$. Tenemos entonces lo siguiente :

1) V es continuamente diferenciable

2) $V(0, 0) = 0.$

3) $V(x, y) > 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

4) $\dot{V}(x, y) = 0$.

De lo anterior, se concluye que V es una *función de Lyapunov* para cualquier conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. De 2) y 3) se deduce que V es definida positiva sobre $\mathbb{R}^2$.

Teorema I (ver [1]). *Si V es una función de Lyapunov sobre G y si $r^+(x_o)$ es una órbita acotada de $\dot{x} = f(x)$ situada en G, entonces el conjunto límite W de r^+ pertenece a M; esto es, $x(t, x_o) \to M$ cuando $t \to \infty$.*

Corolario I.1. (ver [1]). Si V es una *función de Lyapunov* sobre un conjunto acotado $G = \{ x \in R^n \mid V(x) < \rho \}$, entonces toda solución de $\dot{x} = f(x)$ con valor inicial en G se aproxima a M cuando $t \to \infty$.

Corolario I.2 (ver [1]). Si $V \to \infty$ cuando $|x| \to \infty$ y si $\dot{V}(x) < 0$ sobre $\mathbb{R}^n$, entonces toda solución de $\dot{x} = f(x)$ es acotada y se aproxima al máximo conjunto invariante M de $x = f(x)$ en el conjunto donde $V(x) = 0$. En particular, si $M = \{ 0 \}$, entonces la solución $x = 0$ es global y asintóticamente estable.

Teorema II. *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para $\dot{x} = f(x)$ el cual está situado sobre la frontera de algún conjunto abierto U. Se define $G = U \cap \Omega$, donde Ω es una vecindad de $x = 0$. Supongamos:*

1) $V(x) = 0$ *cuando* $x \in \partial G / \partial \Omega$

2) $V(x) > 0$ *cuando* $x \in G$

$(x) > 0$ *cuando* $x \in G$.

Entonces la solución $x = 0$ de $\dot{x} = f(x)$ es inestable. En forma más específica, si Ω_o es cualquier vecindad de $x = 0$ con $\overline{\Omega}_o$ en Ω, entonces cualquier solución con valor inicial en $U \cap \Omega_o$, abandona a Ω_o en un tiempo finito.

Demostración: Sea Ω_o una vecindad acotada de $x = 0$. $\overline{\Omega}_o \subset \Omega$, sea $x_o \in G$, entonces $V(x_o) > 0$, puesto que $\dot{V}(x) > 0$ sobre G, $x(t, x_o)$ per-

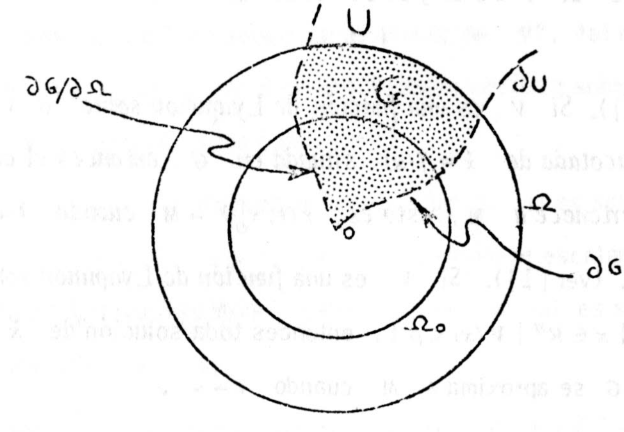


Figura 4

manece en G hasta que $x(t, x_o)$ abandona a Ω. En caso contrario, $x(t, x_o)$ tendría que cruzar a $\partial G/\partial\Omega$ cuando $x(t, x_o)$ se aparta de G. Esto es imposible puesto que $V(x(t, x_o)) \geq 0$ mientras $x(t, x_o)$ está en G. Sea $B = \underset{\Omega_o}{\text{máx}}\, V(x)$, escojamos Ω_o^* de tal manera que $\overline{\Omega}_o$ esté contenido en el interior de $\Omega_o^* \subset \overline{\Omega}_o^* \subset \Omega$. Sea α = mínimo de $\dot{V}(x)$, $x \in \Omega_o^*$ y $V(x) \geq V(x_o)$. Entonces $V(x(t, x_o)) \geq V(x_o) + \alpha t$ siempre que $x(t, x_o)$ permanezca en $G^* = \{x \mid x \in \overline{\Omega}_o^*, V(x) \geq V(x_o)\}$. Mientras $x(t, x_o)$ esté en $\overline{\Omega}_o$, $x(t, x_o)$ estará en G^*. Por lo tanto $V(x(t,x_o)) \geq V(x_o) + \alpha t$ el tiempo suficiente para que $V(x(t, x_o)) > B$. Por lo tanto, para $x(t)$, existe T tal que $x(T, x_o) \notin \overline{\Omega}_o$.

Teorema III. *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Supongamos que $V(x)$ es definida positiva en una vecindad G de $x = 0$, y que $\overline{G} \subset R$. Entonces:*

a) Si $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa sobre G, entonces $\{0\}$ es estable.

b) Si $\dot{V}(x)$ es definida negativa sobre G, entonces $\{0\}$ es asintóticamente extable con relación a G.

c) *Si* $\dot{V}(x)$ *es definida positiva sobre* G, *entonces* $\{0\}$ *es inestable*.

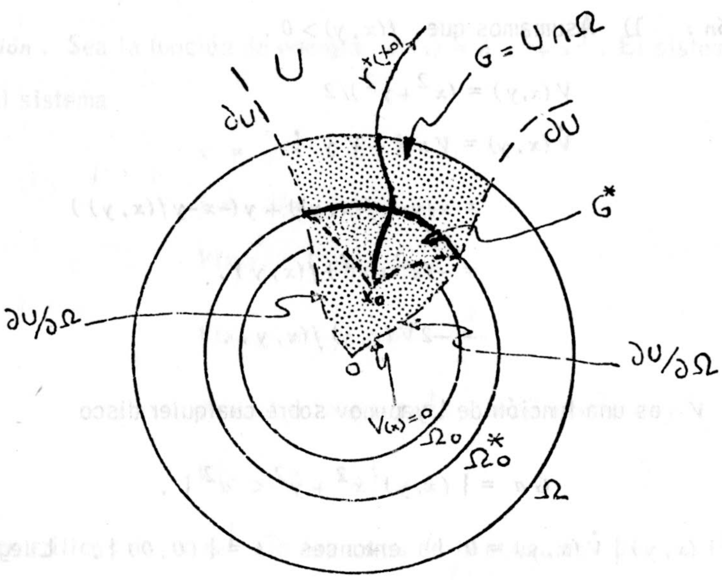


Figura 5

Demostración: a) Debemos mostrar que $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$, tal que si $x_o \in B(\delta) \Rightarrow x(t, x_o) \in B(\varepsilon)$, para todo $t \geq 0$ (siendo $B(a) = \{x \mid |x| < a\}$). Sea $K(\varepsilon) = \min\limits_{\partial B(\varepsilon)} V(x)$; si $B(\varepsilon) \subset B(r) \subset \Omega$, podemos asumir que $K(\varepsilon) > 0$, para $0 < \varepsilon < r$. Escojamos δ_ε tan pequeño que $\max\limits_{B(\delta)} V(x) < K(\varepsilon)$; esto es posible puesto que $V(0) = 0$. Entonces, si iniciamos en $x_o \in B(\delta)$, $V(x_o) < K$, podemos asumir también que $B(\delta) \subset B(\varepsilon) \subset \Omega$ y así $\dot{V}(x) \leq 0$ en $B(\varepsilon)$. Concluimos que $V(x(t)) \leq V(x_o) < K$, siempre que $x(t) \in \overline{B(\varepsilon)}$. Por consiguiente no existe un tiempo t, para el cual $x(\varepsilon) \in \partial B(\varepsilon)$, por lo tanto, $x(t)$ permanece en $B(\varepsilon)$ para todo $t \geq 0$.

Problema I (ver [1]). Considérese el sistema de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x f(x, y) \\ y &= -x - y f(x, y) \end{aligned} \qquad (1)$$

Se propone discutir la estabilidad de este sistema cuando f tiene signo fijo.

Solución : 1) Asumamos que $f(x,y) > 0$.

Sea
$$V(x,y) = (x^2+y^2)/2$$
$$\dot{V}(x,y) = V_x\,\dot{x} + V_y\,\dot{y}$$
$$= x(y - x f(x,y)) + y(-x - y f(x,y))$$
$$= -(x^2+y^2)\, f(x,y).$$
$$= -2\,V(x,y)\, f(x,y).$$

De donde V es una función de Lyapunov sobre cualquier disco
$$G_a = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 < a^2 \}.$$

Si $S = \{ (x,y) \mid \dot{V}(x,y) = 0 \}$ entonces $S = \{ (0,0) \}$. Luego $\{ (0,0) \}$ es un atractor para G_a. Puesto que $V(x,y)$ es *positiva definida* en $(0,0)$ y $\dot{V}(x,y)$ es *definida negativa* entonces $\{ (0,0) \}$ es también *estable*. Por consiguiente, $\{ (0,0) \}$ es asintóticamente estable con respecto a G_a. Ahora, como a es arbitrario, $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{0 \leq a < \infty} G_a$; $\{ (0,0) \}$ es realmente *global y asintóticamente estable*.

2) Asumamos ahora que $f(x,y) < 0$.

Sea
$$V(x,y) = -\frac{x^2+y^2}{2}.$$

Entonces $\dot{V}(x,y) = -2\,V(x,y)\,f(x,y)$. Por el teorema III, $\{ (0,0) \}$ es *inestable*. En forma más precisa, toda solución de (1) abandona cualquier vecindad acotada de $(0,0)$ al cabo de un tiempo finito.

Problema II (ver [1]). Considérese la ecuación
$$x + a x + 2b x + 3x^2 = 0 \quad , \quad a > 0 \qquad b > 0 , \qquad (1).$$

y determínese la región máxima de estabilidad asintótica de la solución $x=0$ que puede obtenerse usando la energía total del sistema como una función de Lyapunov.

Solución . Sea la función de energía $U(x) = b x^2 + x^3$. El sistema (1) es equivalente al sistema

$$x = y$$

$$y = -2bx - 3x^2 - ay$$

$$V(x,y) = U(x) + \frac{y^2}{2}$$

$$V(x,y) = b^2 x + x^3 + \frac{y^2}{2}$$

$$V(x,y) = 2bxy + 3x^2 y - 2bxy - 3x^2 y - ay^2$$

$$V(x,y) = -ay^2 .$$

Los puntos críticos de $U(x)$ son los ceros de la ecuación $2bx + 3x^2 = 0$, es decir, $x=0$ y $x = -\frac{2}{3}b$. Se tiene

$$U(-\frac{2}{3}b) = b \cdot \frac{4}{9}b^2 - \frac{8}{27}b^3 = \frac{4}{27}b^3 .$$

Sea $G = \{ (x,y) \mid V(x,y) < \frac{4b^3}{27} , x > -\frac{2}{3} \}$; entonces, por el corolario (I.1) , $\{(0,0)\}$ es un atractor para G , puesto que $\{(0,0)\}$ es obviamente estable, entonces $\{(0,0)\}$ es asintóticamente estable con relación a G.

Si $S = \{ (x,y) \subset G \mid V(x,y) = 0 \}$, entonces

$S = \{ (x,y) \subset G \mid y = c \}$. (Ver figura 6).

Problema III (ver [1]). Considérese el sistema n-dimensional $x = f(x) + g(t)$ donde $x' f(x) \leq -k|x|^2$, $k > 0$, para todo x, y $|g(t)| \leq M$ para todo t. Encontrar una esfera de radio lo suficientemente grande para que todas las trayectorias penetren a esta esfera .

Muestre que esta ecuación tiene una solución de período T, si g es de período T. Si, además, $(x-y)'[f(x)-f(y)]<0$ para todo $x \neq y$ muestre que la solución periódica es única.

Solución . Se tiene que $x'(f(x)+g(t)) = x'f(x)+x'g(t) \leq -K|x|^2+M|x|$. Escojamos $|x|$ lo suficientemente grande para que $-K|x|+M<0$, es decir, $|x|>M/K$. Entonces $x'(f(x)+g(t))<0$. La bola $B_{\frac{M}{K}+1}(0)=\{x \mid |x| \leq M/K+1\}$ es invariante positivamente (para esta definición ver [2]). Consideremos $T: B_{M/K+1} \to B_{M/K+1}$ definida así : $Tx_o = x(T, x_o)$, donde $x(t,x_o)$ es la solución de $x = f(x)+g(t)$ con $x(0,x_o)=x_o$. Por el teorema del punto fijo de Brower, existe un x_o^* tal que $Tx_o^* = x_o^*$; puesto que $x(t+T,x_o) = x(t, x(T,x_o))$, tenemos :

$$
\begin{aligned}
x(t+T, x_o^*) &= x(t, x(T, x_o^*)) \\
&= x(t, Tx_o^*) \\
&= x(t, x_o^*)
\end{aligned}
$$

Si agregamos la condición $(x-y)'[f(x)-f(y)]<0$, entonces la solución periódica encontrada es única. En efecto : Supongamos que $x(t,x_o^*)$ y $y(t,y_o^*)$ son dos soluciones periódicas de $x = f(x)+g(t)$. Entonces $z(t)=x(t)-y(t)$ es una función periódica que satisface :

$$z(t) = f(x(t)) - f(y(t)) .$$

$$z' \cdot z < 0 \quad \text{si} \quad z \neq 0 .$$

$$|z|^2 = z' z \quad ; \quad \frac{d}{dz}[z' \cdot z] = z' \cdot z + z \cdot z' = 2z' z$$

Luego $\frac{d}{dz}|z|^2<0$, $|z| \neq 0$.

Si $z \to 0$, entonces las órbitas periódicas $x(t,x_o^*)$ y $y(t,y_o^*)$ no pueden estar separadas. Por lo tanto deben de ser idénticas .

Construcción de la función de Lyapunov.

No existen métodos generales para construir las *funciones de Lyapunov* ; sin embargo, hay muy buenos trabajos sobre la construcción de tales funciones para clases especiales de funciones (ver por ejemplo [3] [4]) . A manera de ilustración veamos el siguiente teorema, sin demostración, el cual es muy útil para construir funciones *definidas positivas* o *definidas negativas*.

Teorema IV. *La función* $V(x_1, x_2) = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$ *es definida positiva sii* $a > 0$ *y* $4ac - b^2 > 0$ *; es definida negativa sii* $a < 0$ *y* $4ac - b^2 > 0$.

Ejemplo. Consideremos el siguiente sistema

$$x = - x - x y^2$$

$$y = - y - y x^2 .$$

Vamos a construir una función de Lyapunov para él . Tratemos de construir una función de la forma

$$V(x, y) = a x^2 + bxy + c y^2 , \quad \text{entonces}$$

$$V_x(x, y) = 2ax + by$$

$$V_y(x, y) = bx + 2cy$$

$$V(x, y) = (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - yx^2)$$

$$= -[2a(x^2 + x^2y^2) + b(2xy + xy^3 + yx^3) + 2c(y^2 + x^2y^2)]$$

Si $b = 0$, tenemos :

$$V(x, y) = -2[2a(x^2 + x^2y^2) + 2c(y^2 + x^2y^2)] .$$

Si a y c son números positivos, entonces V es *definida negativa* y V es definida positiva porque $a > 0$ y $4ac - b^2 > 0$. Entonces V es una función de Lyapunov para el sistema en cuestión.

B i b l i o g r a f í a

[1] Hale, J. K. *Ordinary Differential Equations*. (Wiley-Interscience, 1969)

[2] Bhatia, N.P. "Dynamical Systems". Lecture Notes in Mathematics, Nº 35, 1967.

[3] Hahn, W. *Stabilyty of Motion*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, N.Y. 1967.

[4] *Theory and Application of Lyapunov's Direc Method*. Prentice-Hall, Inc.,1963.

* * *

Artificialidad de la Matemática

" . . . al transformarse en rigurosa, la Ciencia matemática toma un carácter artificial que chocará a todo el mundo, puesto que, al hacerlo así, olvida sus orígenes históricos. Se ve cómo pueden resolverse las cuestiones, pero no cómo y por qué se plantean".

H. Poincaré
El valor de la Ciencia