Volumen IX, Nos. 4,5,6, págs. 189-202

UNA NOCION DE LA TEORIA DE LA DECISION (*)

YU TAKEUCHI

§ 1. Un ejemplo de la teoría de la decisión.

Daremos una noción de la teoría de decisión a través de un ejemplo. Idealizando *el problema de calificación* supongamos que :

I. Un estudiante puede tomar uno de los dos *estados académicos*, a saber :

(i) θ_1 (capacidad académica *nula*)

(ii) θ_2 (capacidad académica *adecuada*).

El conjunto de todos los estados académicos del estudiante es :

$$\Omega = \{\theta_1, \theta_2\} \tag{1}$$

El conjunto Ω se llama *"el espacio de parámetros"*.

II. El profesor puede escoger una de las acciones :

(i) Acción a_1 (calificación *aprobada*)

(ii) Acción a_2 (calificación *no aprobada*).

El conjunto de todas las acciones posibles que pueda escoger el profesor es

$$\mathfrak{A} = \{a_1 , a_2\} . \tag{2}$$

El conjunto $\mathfrak{A}$ se llama *"el espacio de acciones"*.

III. Si la calificación dada por el profesor no concuerda con la verdadera capacidad del alumno, habrá *una pérdida* de la labor docente por parte del profesor

(*) Trabajo final presentado por el autor en el curso de Estadística Matemática dictado en el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional durante el 1er. semestre de 1975.

En general, se tienen los casos siguientes :

(i) *No hay pérdida* de labor docente si el profesor toma la acción a_2 (reprobar al alumno) cuando el alumno no posee la capacidad del caso (el estado θ_1) .

(ii) *No hay pérdida* (no hay error en la calificación) si el profesor pone la calificación a_1 (aprobar) cuando el alumno esté bien capacitado académicamente (el estado θ_2).

(iii) Si el profesor toma la acción a_1(rechazar al alumno) cuando el alumno tiene la capacidad adecuada (el estado θ_2) naturalmente existe una pérdida de la labor docente. La pérdida a raíz de este error de la calificación la mediremos por *el número "1"*.

(iv) Si el profesor pone la calificación a_2 (aprobar) cuando la capacidad del alumno es nula (el estado θ_1), entonces este error de la calificación causa una pérdida b (medida *numéricamente)* de la labor docente del profesor.

Si el objetivo de la calificación es *seleccionar* un número reducido de buenos estudiantes esta última acción (iv) causaría mayor daño que el caso anterior (iii), luego b es mayor que 1. En cambio, si se quiere eliminar los estudiantes malos para aprovechar el mayor número de recursos humanos, entonces el error cometido en (iii) es más grave que el daño causado por (iv), esto es, b es menor que 1.

Sea $L(\theta, a)$ la *pérdida* (de la labor docente) del profesor cuando el verdadero estado del alumno es θ y el profesor toma la acción a. $L(\theta . a)$ es una función de *valor real* (la pérdida se mide numéricamente!) definida en $\Omega \times \mathfrak{A}$ como sigue :

$$
\begin{aligned}
L(\theta_1, a_1) &= 0 && \text{(Caso (i))} \\
L(\theta_2 . a_2) &= 0 && \text{(Caso ii))} \\
L(\theta_2 . a_1) &= 1 && \text{(Caso iii))} \\
L(\theta_1 . a_2) &= b && \text{(Caso (iv))}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

La función $L(\theta, a)$ se llama *Función de Pérdida* ; en la tabla 1 se muestran los valores de L dados por (3) .

Ω \ $\mathcal{A}$	a_1	a_2
θ_1	0	b
θ_2	1	0

Tabla 1

IV. Antes de determinar la calificación definitiva el profesor realiza una prueba (o un examen) X cuyo resultado puede ser $x_1=0$ ó $x_2=5$ (los valores de la prueba X). Supongamos que el estudiante responde a la prueba *con probabilidad* p, entonces se tiene que :

$$\left.\begin{array}{ll} P_{\theta=\theta_1}\{X=x_1\}=p \quad , & P_{\theta=\theta_1}\{X=x_2\}=1-p \\ P_{\theta=\theta_2}\{X=x_1\}=1-p \quad , & P_{\theta=\theta_2}\{X=x_2\}=p \;. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

V. De acuerdo con el resultado del examen el profesor tomará una acción a_1 ó a_2, así que la acción a *depende* del resultado x de la variable aleatoria X. Esta función se representa por d :

$$\begin{array}{lcl} d:\ \mathcal{X}=\{x_1,x_2\} & \to & \mathcal{A}=\{a_1,a_2\} \\ x & \longmapsto & a=d(x)\;. \end{array} \qquad (5)$$

d es una función del espacio muestral $\mathcal{X}$ en el espacio de acciones $\mathcal{A}$ y se llama *Función de decisión* ó *Regla de decisión*.

De (3) se ve que existen 4 funciones distintas, a saber :

$$\begin{array}{ll} d_1:\ d_1(x_1)=a_1 \quad , & d_1(x_2)=a_1 \\ d_2:\ d_2(x_1)=a_1 \quad , & d_2(x_2)=a_2 \\ d_3:\ d_3(x_1)=a_2 \quad , & d_3(x_2)=a_1 \\ d_4:\ d_4(x_1)=a_2 \quad , & d_4(x_2)=a_2 \end{array} \qquad (6)$$

Esto es : d_1 representa la acción de *reprobar* al estudiante *sin mirar* los resultados de la prueba, y d_4 es la acción de *aprobar* al alumno sin considerar los resultados de la prueba; d_2 representa la acción del profesor que tiene la mayor confianza en el examen realizado y d_3 es la acción del profesor incrédulo.

El conjunto de todas las funciones de decisión se denota por D.

VI. Si en la función de pérdida $L(\theta, a)$ reemplazamos a por $d(x)$ tenemos :

$$L(\theta, d(X)) \tag{7}$$

que es una *variable aleatoria* que depende de un parámetro θ. La *esperanza* de $L(\theta, d(X))$ para cada valor de $\theta \in \Omega$ y para cada función de decisión $d \in D$ se llama la *Función de riesgo*, y se denota por R :

$$R(\theta, d) = E[L(\theta, d(X))] \tag{8}$$

la cual representa la *pérdida promedio* del profesor cuando usa la función particular d y la verdadera capacidad del alumno es θ. En el presente caso, de (3),(4) y (6) podemos calcular los siguientes valores de $R(\theta, d)$:

$$\left.\begin{aligned} R(\theta_1, d_1) &= E[L(\theta_1, d_1(X))] = pL(\theta_1, a_1) + (1-p)L(\theta_1, a_1) = 0, \\ R(\theta_2, d_1) &= E[L(\theta_2, d_1(X))] = (1-p)L(\theta_2, a_1) + pL(\theta_2, a_1) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} R(\theta_1, d_2) &= E[L(\theta_1, d_2(X))] = pL(\theta_1, a_1) + (1-p)L(\theta_1, a_2) = b(1-p) \\ R(\theta_2, d_2) &= (1-p)L(\theta_2, a_1) + pL(\theta_2, a_2) = 1-p \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} R(\theta_1, d_3) &= pL(\theta_1, a_2) + (1-p)L(\theta_1, a_1) = pb \\ R(\theta_2, d_3) &= (1-p)L(\theta_2, a_2) + pL(\theta_2, a_1) = p \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} R(\theta_1, d_4) &= pL(\theta_1, a_2) + (1-p)L(\theta_1, a_2) = b \\ R(\theta_2, d_4) &= (1-p)L(\theta_2, a_2) + pL(\theta_2, a_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

VII. **Principio minimax**. El profesor *debe* escoger una de las cuatro funciones de decisión, d_1, d_2, d_3 y d_4. Para cada escogencia de la función de decisión siempre *existe cierto riesgo* según el estado verdadero de la capacidad académica del estudiante. Supongamos que $b > 1$.

Si el profesor toma la decisión d_1, el riesgo es 1 cuando $\theta = \theta_2$ (¡el estudiante está bien capacitado académicamente !).

Si el profesor toma la decisión d_2, hay el mayor riesgo en cantidad $b(1-p)$, cuando $\theta = \theta_1$ (el máximo riesgo entre $b(1-p)$ y $(1-p)$).

Si el profesor escoge la decisión d_3 el mayor riesgo es bp (el máximo entre pb y p), y si el profesor escoge la decisión d_4 el mayor riesgo es b (el máximo entre b y 0).

Un profesor conservador preferirá escoger una decisión $d \in D$ de tal manera que *el mayor riesgo* causado por la escogencia de d *sea más pequeño*. Por ejemplo, si $b = 2$, $p = \frac{3}{4}$ tenemos que (ver la tabla 2) el mínimo de los mayores riesgos es $\frac{1}{2}$, o sea que la decisión d_2 es más favorable.

Decisión	Riesgo cuando $\theta = \theta_1$	Riesgo cuando $\theta = \theta_2$	el máximo riesgo
d_1	0	1	1
d_2	$b(1-p)$	$1-p$	$b(1-p) = \frac{1}{2}$
d_3	pb	p	$pb = \frac{3}{2}$
d_4	b	0	$b = 2$
$b = 2 (> 1)$		$p = 3/4$	

Tabla 2

Más generalmente, *el máximo riesgo causado* por la escogencia de la decisión d es :

$$\max_{\theta \in \Omega} R(\theta, d) \tag{13}$$

y el profesor escogerá una decisión $d \in D$ para que (13) *sea mínimo*, con riesgo mínimo

$$\min_{d \in D} \left\{ \max_{\theta \in \Omega} R(\theta, d) \right\} . \tag{14}$$

Este mecanismo para escoger una decisión $d \in D$ se llama *"El principio Mini – max"*.

Si $b < 1$, tenemos la tabla 3.

Decisión	riesgo cuando $\theta = \theta_1$	riesgo cuando $\theta = \theta_2$	el mayor riesgo
d_1	0	1	1
d_2	$b(1-p)$	$1-p$	$1-p = \frac{1}{4}$
d_3	pb	p	$p = \frac{3}{4}$
d_4	b	0	$b = \frac{1}{5}$
	$b = 1/5\ (< 1)$	$p = 3/4$	

Tabla 3

Por ejemplo, si $b = 1/5$, $p = 3/4$ se ve que la decisión d_4 es *más favorable* según el principio minimax.

VIII. **Aleatorización de la decisión.** En el tratamiento anterior se debe escoger *una* decisión d del conjunto $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$. Se puede suavizar el concepto de decisión introduciendo sobre D *una distribución de la probabilidad* δ, o sea, podemos utilizar las cuatro funciones de decisión con determinada probabilidad δ :

$$\delta : D \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned}
\delta(d_1) &= p_1 = \text{ la probabilidad de tomar la decisión } d_1 \\
\delta(d_2) &= p_2 = \text{ la probabilidad de tomar la decisión } d_2 \\
\delta(d_3) &= p_3 = \text{ la probabilidad de tomar la decisión } d_3 \\
\delta(d_4) &= p_4 = \text{ la probabilidad de tomar la decisión } d_4
\end{aligned} \tag{15}$$

con

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \quad , \quad p_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) .$$

La distribución δ sobre D se llama "*Decisión Aleatorizada*". Considerando la decisión aleatorizada $\delta = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, estamos empleando *conjuntamente todas las posibles decisiones* de D en la siguiente forma :

$100\ p_1\%$ de la decisión d_1 (rechazar al alumno sin mirar el resultado del examen)

$100\ p_2\%$ de la decisión d_2 (respetar el resultado del examen)

$100\ p_3\%$ de la decisión d_3 (tomar la actitud contraria al resultado del examen)

$100\ p_4\%$ de la decisión d_4 (aprobar al alumno sin mirar el resultado del examen).

El conjunto de todas las decisiones aleatorizadas se denota por D^*.

Se puede considerar que D es un subconjunto de D^* de acuerdo con la siguiente identificación :

$$\left.\begin{array}{ll} (1,0,0,0) = d_1 & \text{(escoger } d_1 \text{ con la probabilidad de } 100\ \%) \\ (0,1,0,0) = d_2 & \text{(escoger } d_2 \text{ con la probabilidad de } 100\ \%) \\ (0,0,1,0) = d_3 & \text{(escoger } d_3 \text{ con la probabilidad de } 100\ \%) \\ (0,0,0,1) = d_4 & \text{(escoger } d_4 \text{ con la probabilidad de } 100\ \%) \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Ahora, podemos calcular el promedio del riesgo $R(\theta, d)$ de acuerdo con la decisión aleatorizada $\delta = (p_1, p_2, p_3, p_4)$:

$$R(\theta, \delta) = p_1 R(\theta, d_1) + p_2 R(\theta, d_2) + p_3 R(\theta, d_3) + p_4 R(\theta, d_4) \qquad (17)$$

Nótese que el riesgo $R(\theta, \delta)$ es una función de valor real definida en $\Omega \times D^*$.

IX. **Representación gráfica del riesgo** $R(\theta, \delta)$. La función de riesgo $R(\theta, \delta)$ correspondiente a una decisión aleatorizada δ es determinada por :

$$[\,R(\theta_1, \delta)\ ,\ R(\theta_2, \delta)\,] \qquad (18)$$

Como la pareja ordenada (18) es identificada por un punto (y_1, y_2) del espacio $\mathbb{R}^2$ con sus respectivas coordenadas :

$$y_1 = R(\theta_1, \delta) \quad , \quad y_2 = R(\theta_2, \delta)\ ,$$

la decisión aleatorizada δ es *representada por el punto* (y_1, y_2). Sea Q el conjunto de todos los puntos (18) en $\mathbb{R}^2$:

$$Q = \{(y_1, y_2) \mid y_1 = R(\theta_1, \delta) \quad , \quad y_2 = R(\theta_2, \delta) \text{ para alguna } \delta \in D^*\}\ . \qquad (19)$$

el conjunto Q se llama *el conjunto de riesgo* y es una representación gráfica del espacio D^*.

En nuestro caso, si $b=2$, $p=3/4$ tenemos (ver la tabla 2) :

$$d_1=(0,1)\ ,\ d_2=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4})\ ,\ d_3=(3/2,3/4)\ ,\ d_4=(2,0)\ .\quad \text{(Fig. 1)}$$

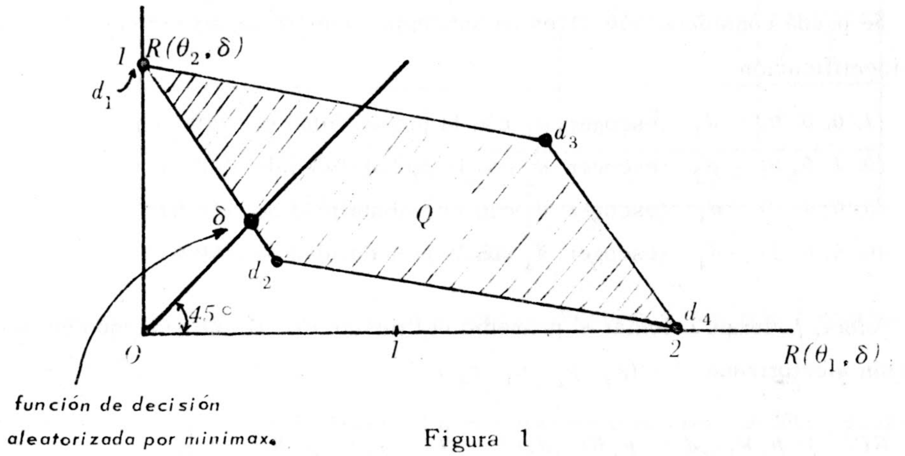

Figura 1

De (17) se observa que el punto δ es *un baricentro* de los puntos d_1, d_2, d_3 y d_4; entonces el conjunto Q es *un paralelogramo* con vértices en d_1, d_2, d_3, d_4 (ver Fig. 1). Aplicando el método Minimax al espacio D^*, *la decisión aleatorizada más favorable* es representada por el punto $(y_1, y_2) \in Q$ tal que

$$\text{máximo}\ \{y_1, y_2\}\quad \text{sea mínimo}$$

En la figura 1 se observa que el vértice d_2 (respetar 100% el resultado del examen) ya no es la decisión aleatorizada más favorable.

En la figura 2 se muestra el caso $b=1/5$, $p=3/4$.

X. **Principio de Bayes**. Supongamos que algunas *informaciones previas* puedan suministrar la posibilidad de predecir el estado académico del estudiante (Por ejemplo, se conoce que el estudiante tiene la capacidad académica promedio 3 sobre 5 por la calificación de otros cursos anteriormente aprobados). Esto es, supongamos que hay una distribución de probabilidades en el espacio de parámetros

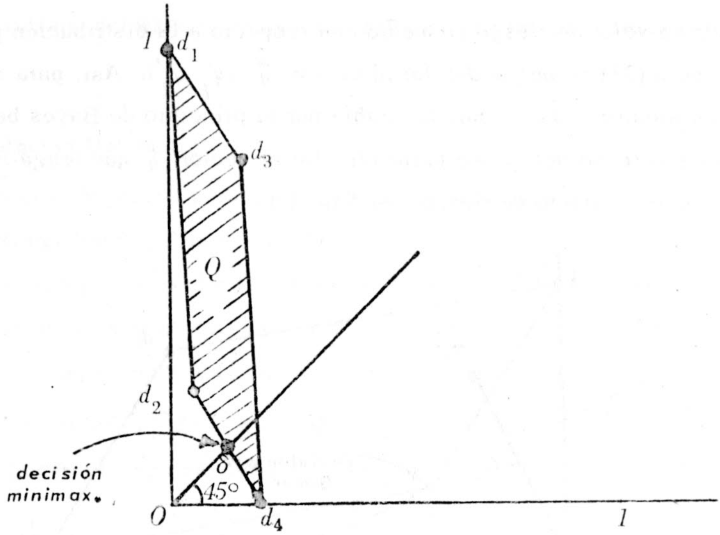

Figura 2

$\Omega = \{\theta_1, \theta_2\}$ (llamada *distribución a priori*). Sean

$$P_r\{\Theta = \theta_1\} = q_1 \quad , \quad P_r\{\Theta = \theta_2\} = q_2 \tag{20}$$

con

$$q_1 + q_2 = 1 \quad , \quad q_1 \geq 0 \; , \quad q_2 \geq 0 \; .$$

Consideramos *el promedio* de la función de riesgo de acuerdo con la distribución (20) :

$$\overline{R}(q, \delta) = q_1 R(\theta_1, \delta) + q_2 R(\theta_2, \delta) \tag{21}$$

El *método de Bayes* consiste en buscar una decisión aleatorizada δ de tal manera que $\overline{R}(q, \delta)$ sea *mínimo*.

En la representación gráfica de D^* la decisión aleatorizada δ es representada por el punto (y_1, y_2) en $\mathbb{R}^2$, luego

$$\overline{R}(q, \delta) = q_1 y_1 + q_2 y_2 \tag{22}$$

De (22) se ve que todos los puntos que están sobre la recta (K constante)

$$q_1 y_1 + q_2 y_2 = K \tag{23}$$

dan *el mismo valor de riesgo promedio* con respecto a la distribución previa (q_1, q_2). La recta (23) es *perpendicular* al vector $\vec{q} = (q_1, q_2)$. Así, para determinar la decisión aleatorizada δ *más favorable* por el principio de Bayes basta buscar *la recta más cercana del origen* perpendicular al vector $\vec{q}$ que tenga *intersección no vacía* con el conjunto de riesgo (ver Fig. 3).

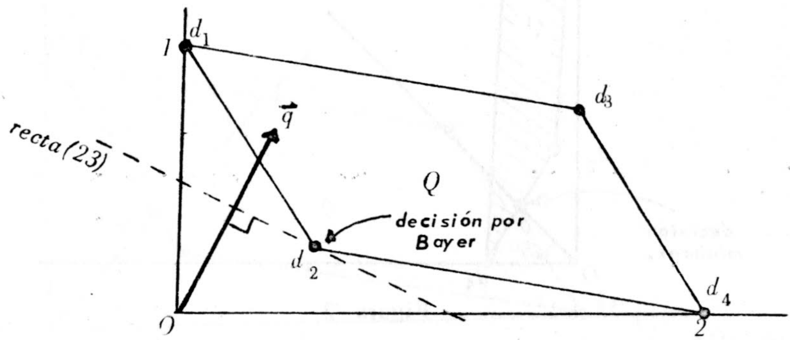

Fig. 3 $b = 2$, $p = 3/4$, $\vec{q} = (1/3 , 2/3)$

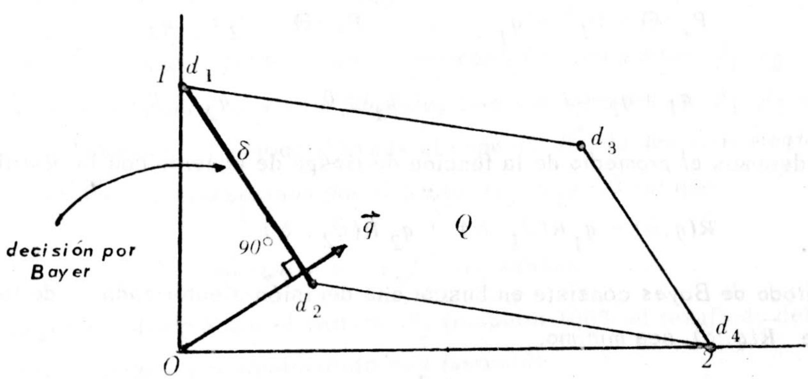

Fig. 4 $b = 2$, $p = 3/4$, $\vec{q} = (2/3 , 1/3)$

En el caso de la figura 4 ($\vec{q} = (2/3, 1/3)$) *toda* decisión aleatorizada δ sobre el segmento d_1 y d_2 sirve como decisión aleatorizada *favorable* de acuerdo con el principio de Bayes. Esto es, si se puede juzgar que *el 66% de los alumnos es malo* por una información previa entonces el profesor *puede* rechazar al alumno sin mirar el resultado del examen, ó puede considerar fielmente el resultado del examen. □

§ 2. Formulación Matemática.

En la teoría de juegos para dos personas se trata de juegos en los cuales participan dos jugadores, quienes intentan simultáneamente *maximizar sus ganancias* (o minimizar sus pérdidas). La teoría de decisión puede ser considerada como un caso particular de la teoría de juegos en donde uno de los dos jugadores es la *naturaleza*, y el contrincante es el *estadístico*, con las siguientes reglas :

I. Hay varios estados θ de la naturaleza; el conjunto de todos los estados que la naturaleza puede escoger se llama *Espacio de Parámetros*, y se denota por :

$$\Omega \qquad \text{(ver [I] , § 1)} .$$

II. El estadístico escoge *una acción* a , el conjunto de todas las acciones que el estadístico pueda escoger se llama *"Espacio de Acciones"* , y se nota por $\mathcal{A}$ (ver [II] § 1) .

III. En el juego, el estadístico tendrá una *ganancia* o *pérdida*, dependiendo de su acción escogida $a \in \mathcal{A}$ contra el estado de la naturaleza $\theta \in \Omega$. La pérdida $L(\theta, a)$ del estadístico se denomina *"Función de Pérdida"*, que es una función de valor real definida en $\Omega \times \mathcal{A}$.(El valor de la función $L(\theta, a)$ puede ser *negativo* ya que dicho valor negativo puede ser interpretado como ganancia del estadístico.)

Un juego con *espacio de parámetros* Ω,*conjunto de acciones* $\mathcal{A}$ y *función de pérdida* L , se puede representar por una terna $(\Omega, \mathcal{A}, L)$, (ver [III] , § 1).

IV. El estadístico puede espiar para obtener algunas informaciones de la naturaleza acerca de su verdadero estado θ a través de varios experimentos, observando una variable aleatoria X (o una muestra aleatoria) cuya distribución f_X depende del verdadero estado de la naturaleza. El *espacio muestral* de la variable aleatoria X se denota por $\mathfrak{X}$, (ver [IV] , § 1) .

V. El estadístico escoge una acción $a \in \mathcal{A}$ de acuerdo con la observación del valor x de la variable aleatoria X ; así la acción a que toma el estadístico es una *función* de x (ver (5) , § 1), y se denota

$$a = d(x) \,. \tag{5'}$$

donde

$$\begin{aligned} d : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathfrak{A} \\ x &\longmapsto a = d(x) \,. \end{aligned}$$

La función d se llama *Función de Decisión,* y el conjunto de todas las funciones de decisión se denota por D .

VI. En $L(\theta, a)$, reemplazando a por $d(x)$, se tiene :

$$L(\theta \,,\, d(x) \,, \tag{7}$$

donde $L(\theta, d(X))$ es una *variable aleatoria* que depende del parámetro θ; *la esperanza* de $L(\theta\,, d(X)\,)$ se llama *Función de Riesgo* y se nota :

$$R(\theta, d) = E\,[\,L(\theta, d(X))\,] \,. \tag{8}$$

VII. **Principio Minimax** . Para cada función de decisión d , el máximo riesgo que pueda presentarse es

$$\sup_{\theta \in \Omega} R(\theta\,, d) \,. \tag{13'}$$

Según el principio *minimax,* se considera que una decisión d es *más favorable* si el riesgo máximo (13') es *mínimo,* y su valor mínimo es :

$$\inf_{d \in D} \{ \sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, d) \} \,. \tag{14'}$$

VIII. **Aleatorización de decisión.** Se introduce una distribución de probabilidad δ sobre D :

$$\begin{aligned} \delta : D &\longrightarrow I\!R^{+} \\ d &\longmapsto \delta(d) \end{aligned}$$

con

$$\delta(d) \geq 0 \; , \quad \sum_{d \in D} \delta(d) = 1 \; .$$

La función δ se llama *Decisión Aleatorizada* ; el conjunto de todas las decisiones *aleatorizadas* se denota por D^* .

Se puede considerar que D es un subconjunto de D^* , identificando $d_o \in D$ con $\delta_o \in D^*$ dada por

$$\begin{aligned} &\delta_o(d_o) = 1 \\ &\delta_o(d_o) = 0 \quad \text{para todo } \; d \neq d_o) \quad , \quad d \in D \; . \end{aligned} \tag{16'}$$

La esperanza del riesgo $R(\theta, d)$ con la distribución de la probabilidad δ se nota :

$$R(\theta, \delta) = \sum_{d \in D} \delta(d) \; R(\theta, d) \; . \tag{17'}$$

Aquí $R(\theta, \delta)$ es una función de valor real definida en $\Omega \times D^*$.

IX. **Representación gráfica del riesgo** $R(\theta, \delta)$. Si el espacio de parámetros Ω es *finito :*

$$\Omega = \{ \theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_n \} ,$$

una decisión aleatorizada δ determina n-tuplas :

$$(R(\theta_1, \delta) \; , \; R(\theta_2, \delta) \; , \ldots , \; R(\theta_n, \delta) \,) \quad . \tag{18'}$$

Interpretando (18') como un *punto* $(y_1 , y_2 , \ldots , y_n)$ del espacio $\mathbb{R}^n$:

$$y_i = R(\theta_i , \delta) \qquad\qquad (i = 1, 2, 3, \ldots , n) \; ,$$

la decisión aleatorizada δ es *representada* por el punto $(y_1, \ldots , y_n) \in \mathbb{R}^n$. El conjunto Q de todos los puntos (18') en $\mathbb{R}^n$ se llama *Conjunto de Riesgo :*

$$Q = \{ \, (y_1, y_2, \ldots , y_n) / y_i = R(\theta_i , \delta) , \;\; (i = 1, 2, \ldots , n) \; , \;\; \delta \in D^* \} \tag{19'}$$

El conjunto Q es la *representación gráfica* del espacio D^*.

En la representación gráfica se observa por (17') que el punto correspondiente a δ es un *baricentro* de los puntos de D ; más aún, el conjunto Q es la *envolvente convexa* del conjunto Q_o donde Q_o es la gráfica de D :

$$Q_o = \{ (y_1, \ldots, y_n) / y_i = R(\theta_i, d) \ , \ (i = 1, 2, \ldots, n) \ , \ d \in D \} \ .$$

Por el principio de minimax, la decisión aleatorizada más favorable es representada por el punto $\delta = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Q$ tal que

$$\textit{máximo} \ \{ y_1, y_2, \ldots, y_n \} \quad \text{es } \textit{mínimo} \ ,$$

el cual *no siempre* pertenece a Q_o) .

X. **Principio de Bayes.** Supongamos que se puede introducir una distribución de probabilidad q en el espacio de parámetros Ω (*"a priori"*) :

$$\begin{aligned} q : \Omega &\longrightarrow I\!R^+ \\ \theta &\longmapsto q(\theta) \geq 0 \ , \qquad \sum_{\theta \in \Omega} q(\theta) = 1 \ . \end{aligned}$$

Tomando la esperanza del riesgo $R(\theta, \delta)$ de acuerdo con la distribución q :

$$\bar{R}(q, \delta) = \sum_{\theta \in \Omega} q(\theta) \, R(\theta, \delta) \ , \qquad (21')$$

la decisión aleatorizada más favorable según el principio de Bayes es la δ que *minimiza* el riesgo promedio dado en (21'). Si $\Omega = \{ \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \}$, la ecuación

$$\sum_{k=1}^{n} q_k y_k = K \ \text{(constante) con } q_k = q(\theta_k) \qquad (23')$$

determina un *hiperplano* en el espacio $I\!R^n$, este hiperplano es *perpendicular* al vector

$$\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \text{con} \qquad q_k = q(\theta_k) \ .$$

Sobre el hiperplano (23') cualquier decisión aleatorizada δ da el *mismo valor* del riesgo promedio (el valor K) con respecto a la *distribución a priori* $\vec{q}$. Así para determinar la decisión aleatorizada más favorable por el principio de Bayes basta buscar el hiperplano más cercano al origen, perpendicular al vector dado $\vec{q}$ y que intersecta con el conjunto del riesgo.