Boletín de Matemáticas
Volumen IX, Nos. 4,5,6, págs. 217 - 220

LAS ECUACIONES DE FERMAT Y CATALAN EN $K[t]$ (*)

VICTOR S. ALBIS GONZALEZ

Recientemente N. Greenleaf [1] publicó una demostración algebraica de la imposibilidad de la ecuación de Fermat

$$X^n + Y^n + Z^n = 0 \quad , \quad n \geq 3 \tag{1}$$

en el anillo $\mathbb{C}[t]$; es decir, mostró que (1) no posee soluciones $X,Y,Z \in \mathbb{C}[t]$ si requerimos que X,Y,Z sean polinomios no constantes que satisfagan $(X,Y) = (X,Z) = (Y,Z) = 1$, donde (P,Q) designa al máximo común divisor de dos polinomios $P,Q \in \mathbb{C}[t]$. Más tarde, M. B. Nathanson [3] mostró que el resultado de Greenleaf conservaba su validez si en vez de $\mathbb{C}$ tomábamos un cuerpo arbitrario K cuya característica no dividiera al exponente n que figura en la ecuación (1). Este resultado es el óptimo, como lo muestran las soluciones $X(t) = t + 1$, $Y(t) = t - 1$ y $Z(t) = t$ de la ecuación $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$ en $K[t]$, donde K es un cuerpo arbitrario de característica 3.

Sin embargo, hace casi un siglo, Korkine [2] dió una demostración que, manteniéndose algebraica, es mucho más elemental y elegante en característica 0 que la de Greenleaf, pudiéndose incluir fácilmente en un primer curso de álgebra abstracta. Por otra parte, en [3] , Nathanson da además una demostración de que la ecuación de Catalan

$$X^n - Y^s = 1 \tag{2}$$

(*) Este trabajo fue expuesto en el "Seminario de Temas Diversos" del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia, segundo semestre de 1975.

no tiene soluciones no constantes en $K[t]$ si $n, s > 1$ y la característica de K no divide estos exponentes. El objetivo de este trabajo es demostrar estos hechos usando las ideas de Korkine, al parecer hasta hoy olvidadas.

Supongamos, pues, que (1) admite las soluciones $X(t), Y(t), Z(t) \in K[t]$ y que éstas satisfacen las condiciones requeridas. Sin pérdida sustancial de la generalidad, podemos asumir que

$$m = grado\ Z(t) \geq grado\ X(t),\ grado\ Y(t)\ ;$$

pero entonces es necesario tener, por ejemplo, que $m = grado\ Z(t) = grado\ Y(t)$ y, por consiguiente, que $grado\ X(t) = m - r$, con $r \geq 0$. Si escribimos

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^n + \left(\frac{Z}{X}\right)^n + 1 = 0\ ,$$

y tomamos derivadas con respecto a t, obtenemos

$$0 = n\left(\frac{Y}{X}\right)^{n-1} \frac{(XY' - YX')}{X^2} + n\left(\frac{Z}{X}\right)^{n-1} \frac{(XZ' - ZX')}{X^2}\ ;$$

como la característica de K, por hipótesis, no divide a n, podemos escribir

$$(3) \qquad Y^{n-1}(XY' - YX') = Z^{n-1}(ZX' - XZ').$$

Sostenemos ahora que $XY' - YX' \neq 0$, pues de lo contrario tendríamos $ZX' - XZ' = 0$, y, por ende,

$$(4) \qquad X \mid X',\ Y \mid Y',\ Z \mid Z',$$

puesto que $(X,Y) = (X,Z) = 1$. A partir de este momento, es conveniente empezar a distinguir cuándo el cuerpo K tiene característica cero o característica $p > 0$, donde p es un número primo.

Caso I. *K tiene característica 0.* En este caso las relaciones (4) dicen que X, Y, Z son polinomios constantes, lo cual es contrario a lo supuesto. Luego $XY' - YX'$ y $ZX' - XZ'$ son polinomios no nulos. Usando que $(Y,Z) = 1$, de (3) resulta que

$$\frac{XY' - YX'}{Z^{n-1}} \quad \text{y} \quad \frac{ZX' - XZ'}{Y^{n-1}}$$

son también polinomios no nulos y que, por consiguiente.

$$grado\ Z^{n-1} = grado\ Y^{n-1} = m(n-1)$$

$$\leq grado\ (XY' - YX')\ ,\ grado\ (ZX' - XZ')\ .$$

Como

$$grado\ (XY' - YX')\ ,\ grado\ (ZX' - XZ') \leq 2m - r - 1\ ,$$

deducimos de estas desigualdades la $2m - r - 1 \geq m(n-1)$, o, equivalentemente, $m(3-n) \geq r + 1 > 0$, la cual a su vez implica que $3 > n$; esto, claramente, es contrario al supuesto inicial $n \geq 3$.

Caso II. *K tiene característica* $p > 0$. Aquí, si $XY' - YX' \neq 0$, continuamos como en el caso I. Pero si $XY' - YX' = 0$, las relaciones (4) indican que $X, Y, Z \in K[t^p]$; haciendo $T_1 = t^p$, consideremos los polinomios en cuestión como elementos de $K[T_1]$, y repitamos los argumentos anteriores, tomando ahora las derivadas con respecto a T_1. Si $XY' - YX' \neq 0$, continuamos como en el Caso I, para mostrar que (1) no tiene soluciones en $K[T_1]$; pero es claro que entonces X, Y, Z no pueden ser soluciones en $K[t]$. Si ocurre que $XY' - YX' = 0$ en $K[T_1]$, entonces, como antes, $X, Y, Z \in K[T_2]$, donde $T_2 = T_1^p$, y repetimos la argumentación anterior tomando esta vez las derivadas con respecto a T_2. Por recurrencia, debemos llegar a la siguiente situación :

$$\begin{cases} X, Y, Z \in K[T_k]\ ; \\ m - r = p^k u \leq m\ ,\quad p \nmid u\ , \end{cases}$$

y es claro que entonces $dX/dT_k = X' \neq 0$. Pero en estas circunstancias, $XY' - YX' \neq 0$, pues de lo contrario, $X \mid X'$ (por las relaciones (4)) y, por consiguiente, $X' = 0$, ya que X no es constante. Podemos pues concluir, como en el Caso I, que X, Y, Z no son soluciones de (1) en $K[T_k]$, y finalmente que tampoco lo son en $K[t]$.

Veamos, para terminar, que la ecuación de Catalan (2) no tiene soluciones no constantes en $K[t]$ si $n, s > 1$ y la característica de K no divide a estos exponentes. En efecto, derivando (2) con respecto a t, obtenemos $nX^{n-1}X' =$

$= sY^{s-1}Y'$; como *a fortiori* $(X,Y) = 1$, deducimos que $X \mid Y'$ y $Y \mid X'$; si estamos en característica cero, estas relaciones entrañan las siguientes desigualdades

$$\begin{cases} \text{grado } X(t) \leq (\text{grado } Y(t)) - 1 \;, \\ \text{grado } Y(t) \leq (\text{grado } X(t)) - 1 \;, \end{cases}$$

las cuales no subsisten simultáneamente para números enteros. En característica $p>0$, cuando $Y' \neq 0$, entonces también $X' \neq 0$, y el argumento anterior sobre los grados es aún válido. Si $Y' = X' = 0$, $X, Y \in K[T_1]$, y recurrentemente debemos llegar, como en el caso de la ecuación de Fermat, a la siguiente situación :

$$\begin{cases} X\,,\, Y \in K[T_k] \\ m = \text{grado } Y(t) = p^k u \leq \text{grado } X(t),\; p \nmid u \,. \end{cases}$$

Como antes, $dY/dT_k \neq 0$, pudiéndose concluir igualmente que X e Y no son soluciones de (2) en $K[T_k]$ y *a fortiori* en $K[t]$.

Vale la pena mencionar que (2) tiene soluciones no constantes en $\mathbb{C}(t)$ si $m = s = 2$, verbigracia,

$$\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{-1}\,t}{t^2 + 1}\right)^2 = 1$$

pero no si $m, s > 2$ [3]. Nathanson pregunta entonces si existen soluciones de la ecuación de Catalan en $K(t)$ si $n = 2$ y $s > 2$.

Referencias

1. Newcomb Greenleaf. On Fermat's equation in $\mathbb{C}(t)$. Amer. Math. Monthly, 76 (1969), 808-809.
2. A. Korkine. Sur l'impossibilité de la relation algébrique $X^n + Y^n + Z^n = 0$. C. R. Acad. Sci. Paris, 90(1880), 303-304.
3. Melvyn B. Nathanson. Catalan's equation in $K(t)$. Amer. Math. Monthly, 81 (1974), 371-373.