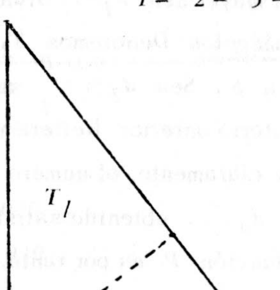
Boletín de Matemáticas
Volumen IX, Nos. 4,5,6, págs. 221-229

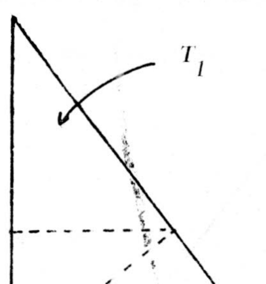
LA FUNCION DE POLYA(*)

LUIS MORENO ARMELLA

Definamos una función $P : [0,1] \to T$, T un triángulo rectángulo,de la siguiente forma : Para cada $t \in [0,1]$ expresamos t es su expansión binaria $t = 0.d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$ donde $d_n(t) = 0,1$. Para cada t, asociamos una sucesión de triángulos $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ de la siguiente forma : Dividimos el triángulo original T en dos triángulos semejantes, dibujando su altura : designamos T_l y T_s el mayor y menor de estos dos triángulos. Ahora nos fijamos en $d_1(t)$. Si $d_1(t) = 0$ entonces elegimos T_s y lo llamamos T_1. Si $d_1(t) = 1$, elegimos T_l y lo llamamos T_1. Si $d_1(t) = 1$, elegimos T_l y lo llamamos T_1. Reiteramos el proceso fijándonos ahora en $d_2(t)$ y T_1 jugando el papel de T y así sucesivamente, obteniéndose una sucesión

$$T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \supseteq \ldots \supseteq T_n \supseteq \ldots$$





(*) Este artículo fue explicado por el autor en el "Seminario de temas diversos" organizado en el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional por Shirley Bromberg deMoreno en 1975.

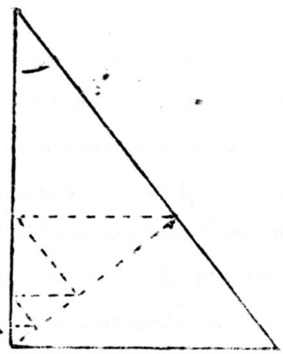
Denotamos $T_n(t)$ el n-ésimo triángulo asignado al número t. Además $diam\,(T_n(t)) \to 0$, por tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n(t) = \{ punto \}$. Este punto es por definición $P(t)$. De esta forma queda definida una función $P : [0,1] \to T$.

Nota : algunos números poseen dos representaciones binarias distintas. Por ejemplo

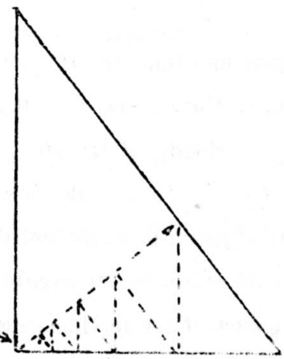
$$\left.\begin{array}{l} t = 0,\ 100\ldots 0\ldots \\ t = 0,0111\ldots 1\ldots \end{array}\right\} \text{ representan ambos el número } \tfrac{1}{2}$$

Usando estas representaciones obtenemos a izquierda y derecha las siguientes sucesiones de triángulos respectivamente.

$P(t)$

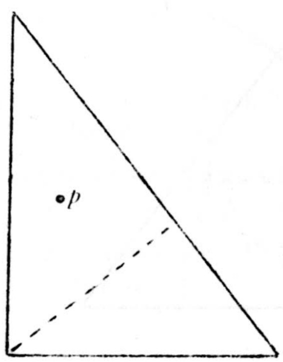


$P(t)$



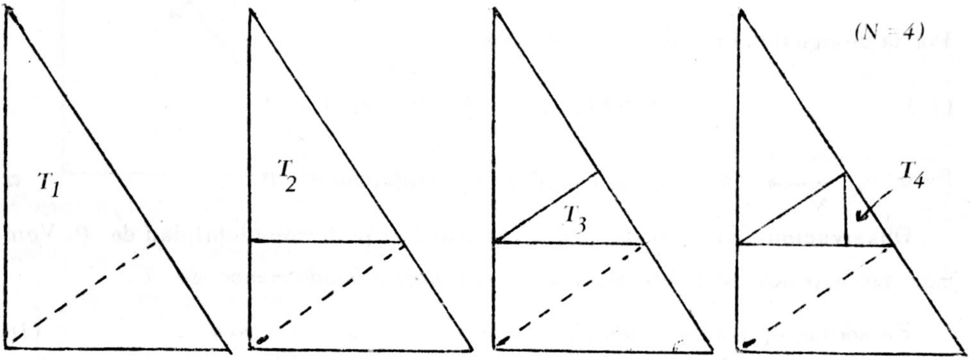
Teorema A. La función $P : [0,1] \to T$ es continua y sobreyectiva.

Prueba (-) Sea $p \in T$. Dividamos T en dos triángulos por el proceso anterior. Denotemos T_1 el triángulo que contiene a p (podría estar sobre la altura). Si T_1 es el menor de estos triángulos sea $d_1 = 0$. Si es el mayor sea $d_1 = 1$ Dividamos T_1 en dos triángulos. Denotemos T_2 el que contiene a p. Sea $d_2 = \left\{\begin{array}{l}0\\1\end{array}\right.$ según el mismo criterio anterior. Reiteramos este proceso y claramente, el número $t = 0,\ d_1\, d_2 \ldots d_n \ldots$ obtenido satisface $P(t) = p$. La función P es por tanto, sobreyectiva.



(=) Veamos ahora que la función P es continua.

Observemos que si t, t' son dos números cuyos primeros N dígitos coinciden entonces los triángulos $T_N(t)$ y $T_N(t')$ que contienen a $P(t)$ y $P(t')$ son el mismo.



Por lo tanto,

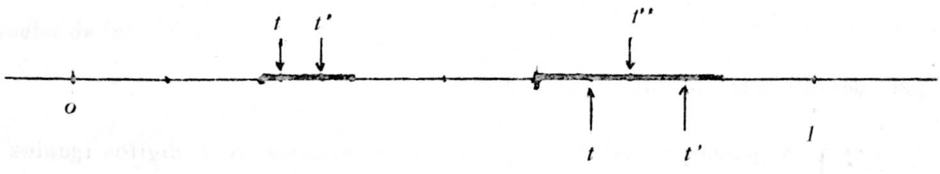
$$(1) \qquad \left| P(t) - P(t') \right| \leq h_N(t)$$

donde $h_N(t)$ denota la hipotenusa de $T_N(t)$.

Supóngase ahora que $|t - t'| < 1/2^N$; entonces pueden suceder :

(1∎) t, t' tienen los primeros N dígitos iguales. En tal caso se cumple

$$\left| P(t) - P(t') \right| \leq h_N(t)$$



$t = 0,010 \ldots$

$t' = 0,010 \ldots$

(2∎) Existe $t'' = \dfrac{entero}{2^N}$ que es un punto de separación entre t y t'

$$t < t'' < t' .$$

Nótese que t'' es un número que tiene dos expansiones binarias : en una, los primeros N dígitos son los mismos de t. En la otra, los primeros N dígitos son los mismos de t'. Por tanto, se sigue que

$$(2) \qquad \left| P(t) - P(t'') \right| \leq h_N(t) \;, \quad \left| P(t') - P(t'') \right| \leq h_N(t')$$

Por la desigualdad triangular, tendremos :

$$(1') \qquad \left| P(t) - P(t') \right| \leq h_N(t) + h_N(t')$$

Pero $h_N \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$, lo cual prueba la continuidad de P. ◻

Observación. Nos proponemos ahora estudiar la diferenciabilidad de P. Veremos que depende, sensiblemente de θ, el *ángulo agudo menor* de T.

En adelante, usaremos las abreviaturas $C = \cos \theta$, $S = \operatorname{sen} \theta$. (3)

Teorema de diferenciabilidad.

(a) *Si* $30^o < \theta < 45^o \Longrightarrow P$ *es no-diferenciable en todo punto.*

(b) *Si* $15^o < \theta < 30^o \Longrightarrow P$ *es no-diferenciable sobre un conjunto de medida uno, pero tiene derivada* $P' = 0$ *sobre un conjunto no enumerable.*

(c) *Si* $\theta < 15^o$, $P' = 0$ *sobre un conjunto de medida uno.*

Nos proponemos obtener desigualdades que nos permitan estimar el cociente

$$\frac{\left| P(t) - P(t') \right|}{\left| t - t' \right|}$$

para decidir sobre la diferenciabilidad de P.

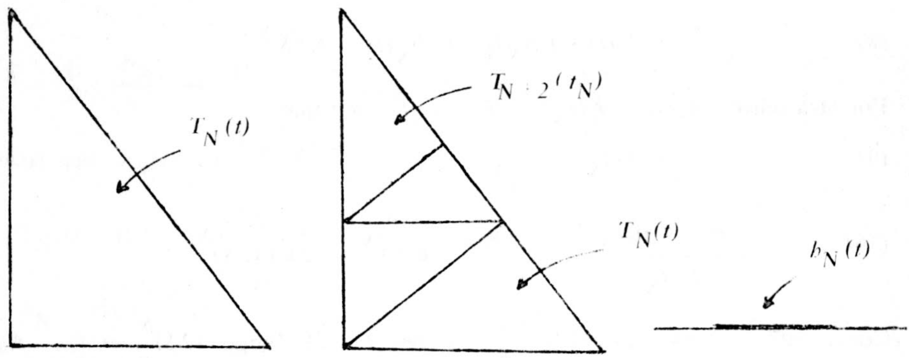
Lema. Supongamos que t y t_N tienen los primeros $N-1$ dígitos iguales pero el N-ésimo dígito $d_N(t) \neq d_N(t_N)$. Supongamos además

$$d_N(t_N) = d_{N+1}(t_N) = d_{N+2}(t_N) \,.$$

Entonces

$$(4) \qquad \left| P(t) - P(t_N) \right| > (constante) \;\; h_N(t) \,.$$

$T_{N-1}(t) = T_{N-1}(t_N)$ ya que $d_1(t) = d_1(t_N), \ldots, d_{N-1}(t) = d_{N-1}(t_N)$.



Como $d_N(t_N) = d_{N+1}(t_N) = d_{N+2}(t_N) \neq d_N(t)$ entonces $P(t_N)$ está en un triángulo $T_{N+2}(t_N)$ disyunto de $T_N(t)$. La mínima distancia entre $T_N(t)$ y $T_{N+2}(t_N)$ es mayor que una constante (k) por $h_N(t)$. Entonces

$$\left| P(t) - P(t_N) \right| \geq k \cdot h_N(t)$$ ■

Denotemos $Z_N(t)$ el número de ceros entre los primeros N dígitos de t y por $V_N(t)$ el número de unos. Nótese que $Z_N(t) + V_N(t) = N$.

Cálculo de la hipotenusa $h_N(t)$ de $T_N(t)$.

Puede demostrarse que la longitud de $h_N(t)$ es

(6) $$h_N(t) = S^{Z_N(t)} \cdot C^{V_N(t)}$$

A partir de (6) y (5) tendremos :

Prueba de (a). Como θ es el menor de los ángulos agudos $\Longrightarrow S < C$ por tanto,

(7) $$h_N(t) = S^{Z_N(t)} C^{V_N(t)} \geq S^{Z_N + V_N} = S^N .$$

Sea $t \in [0,1]$ arbitrario. Sea N un entero y t_N un número tal que

$$d_i(t) = d_i(t_N) \qquad 1 \leq i \leq N-1$$

$$d_N(t) \neq d_N(t_N) = d_{N+1}(t_N) = d_{N+2}(t_N)$$

Por lo tanto, (según(4)) $\left| P(t) - P(t_N) \right| \geq k \cdot h_N(t)$. Como $\theta \leq 45^o$ entonces $S \leq C$ y tenemos $h_N(t) \geq S^N$. Luego

(8) $$|P(t) - P(t_N)| \geq k \cdot b_N(t) \geq k \cdot S^N$$

Por otra parte, $d_i(t) = d_i(t_N)$ $i \leq N-1$, así que

(9) $$|t - t_N| < \frac{1}{2^{N-1}}$$

(10) $$\frac{|P(t) - P(t_N)|}{|t - t_N|} \geq 2^{N-1} \cdot k \cdot S^N = (2k)(2S)^N$$

Como $30^o < \theta \Rightarrow sen(30^o) = \frac{1}{2} < S \Rightarrow 1 < 2S$ luego $(2S)^N \underset{(N \to \infty)}{\longrightarrow} \infty$. Así que

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ (t_N \to t)}} \frac{|P(t) - P(t_N)|}{|t - t_N|} = \infty$$

P no es derivable en $t \in [0,1]$. ■

(b) Veamos que si $15^o < \theta < 30^o$, P es no-diferenciable sobre un conjunto de medida uno, pero *tiene derivada* $P' = 0$ *sobre un conjunto no enumerable,* (esta afirmación última no la demostraremos).

Prueba. Dado $t \in [0,1]$ diremos que t es un número *normal* si

$$\lim_{N \to \infty} \frac{Z_N(t)}{N} = \lim_{N \to \infty} \frac{V_N(t)}{N} = \frac{1}{2}$$

donde $Z_N(t)$ y $V_N(t)$ denotan el número de ceros y unos respectivamente que hay en los primeros N dígitos de (la) expansión binaria de t. (una expansión binaria).

Teorema de Borel. Casi todo $t \in [0,1]$ es un número normal. ■

Demostraremos que en este caso (b), P' no existe sobre el conjunto de los números normales de $[0,1]$. Como

$V_N + Z_N = N$, $2D_N = Z_N - V_N$ (notación que define D_N) entonces:

$$Z_N = N/2 + D_N$$
$$V_N = N/2 - D_N .$$

$$\frac{Z_N}{N} = \frac{1}{2} + \frac{D_N}{N} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad \text{luego} \qquad \lim_{N \to \infty} \frac{Z_N}{N} \neq 0 \, .$$

Sabemos que $b_N(t) = C^{V_N} \cdot S^{Z_N}$. Entonces

$$b_N(t) = C^{N/2} \cdot C^{-D_N} \cdot S^{N/2} \cdot S^{D_N} = (SC)^{N/2} \cdot (S/C)^{D_N}$$

$$b_N = (SC)^{N/2} \, (S/C)^{D_N} \, .$$

Para $t_N \in [0,1]$ que cumple :

$$d_i(t) = d_i(t_N) \qquad i \leq N-1$$

$$d_N(t) \neq d_N(t_N)$$

$$d_N(t_N) = d_{N+1}(t_N) = d_{N+2}(t_N)$$

se tiene :

$$|P(t) - P(t_N)| \geq k \cdot b_N(t) \, .$$

En el presente caso

$$|P(t) - P(t_N)| \geq k \cdot (SC)^{N/2} (S/C)^{D_N} \, .$$

Como

$$|t - t_N| < \frac{1}{2^{N-1}} \Longrightarrow \frac{|P(t) - P(t_N)|}{|t - t_N|} \geq k \cdot 2^{N-1} (SC)^{N/2} (S/C)^{D_N}$$

$$= (2k)\,(4SC)^{N/2} (S/C)^{D_N} \, .$$

$15^o < \theta \Longrightarrow 30^o < 2\theta \Longrightarrow \frac{1}{2} < sen\,(2\theta) \Longrightarrow 1 < 2\ sen(2\theta)$, pero $sen(2\theta) = 2SC \Longrightarrow 1 < 4\,SC$ por lo tanto $(4SC)^{N/2} \underset{(N \to \infty)}{\longrightarrow} \infty$. Como $\frac{D_N}{N} \to 0$ entonces,

$$\frac{|P(t) - P(t_N)|}{|t - t_N|} \geq (2k)\,(4SC)^{N/2} \, (S/C)^{D_N} \underset{(N \to \infty)}{\longrightarrow} \infty$$

o sea $\displaystyle \lim_{\substack{N \to \infty \\ (t_N \to t)}} \frac{|P(t)) - P(t_N)|}{|t - t_N|}$ no existe. ∎

Así que P no es derivable sobre los números normales.

(6) Veamos finalmente que $P'=0$ sobre los números normales cuando $\theta < 15^o$. Hagamos las siguientes observaciones :

(i) Si $t \neq t'$, $d_i(t) = d_i(t')$ $i < N-1$ y $d_N(t) \neq d_N(t')$. Sea $M = M(N)$ el menor entero mayor que N tal que $d_N(t) = d_M(t)$. Entonces $|t - t'| > \frac{1}{2^M}$

(ii) Si t es normal, $\lim_{N \to \infty} \frac{M(N)}{N} = 1$. En efecto: Supóngase $d_N(t) = 1$. Entonces $d_n(t) = 0$ para n, $N < n < M$. Así que

$$Z(M) = Z(N) + M - N \text{ . Entonces,}$$

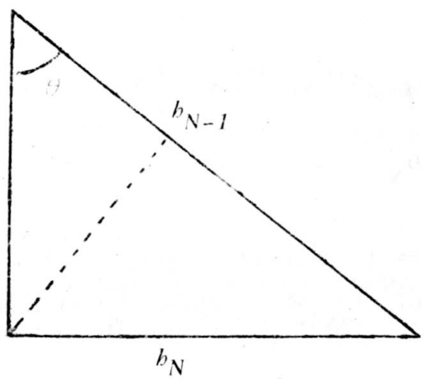
$$\frac{Z(M)}{N} = \frac{Z(N)}{N} + \frac{M}{N} - 1$$

$$\frac{Z(M)}{M}\frac{M}{N} = \frac{Z(N)}{N} - 1 + \frac{M}{N} \Longrightarrow \left(\frac{Z(M)}{M} - 1\right)\frac{M}{N} = \frac{Z(N)}{N} - 1$$

Pero $\frac{Z(M)}{M} \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1}{2}$, $\frac{Z(N)}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1}{2}$ luego

$$\lim \frac{M(N)}{N} = 1 \quad .$$ ∎

Como $P(t), P(t') \in T_{N-1}(t)$ entonces $|P(t) - P(t')| \leq b_{N-1}$. Como $\theta < 15^o \Longrightarrow S = sen\theta < 1$. Pero $b_N = b_{N-1}.S$, $\frac{1}{2} \geq 1$, luego $b_{N-1} \leq \frac{b_N}{S}$.



Así que

$$|P(t) - P(t')| \leq \frac{b_N}{S}$$

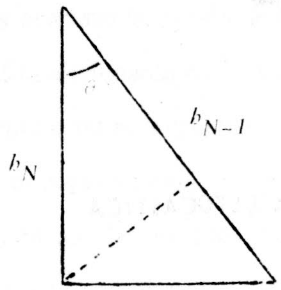
$$= \frac{1}{S}\left(k\cdot(SC)^{N/2}(S/C)^{D_N}\right)$$

$$\frac{|P(t) - P(t')|}{|t-t'|} \leq (2^M/S)\cdot(k\cdot(SC)^{N/2}\cdot(S/C)^{D_N}) = \left(\frac{k.2^{M-N}}{S}\right)(4SC)^{N/2}\cdot(S/C)^{D_N} \, .$$

Pero $4SC < 1 \Rightarrow (4SC)^{N/2} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$. En total, como $\frac{D_N}{N} \to 0$ tendremos:

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ (t_N \to t)}} \frac{|P(t) - P(t_N)|}{|t - t_N|} = 0$$

así que P es derivable sobre los números normales ∎



$$h_N = h_{N-1} \cdot C \qquad h_{N-1} \cdot S$$

$$\Rightarrow \quad h_{N-1} \qquad \frac{h_N}{S}$$

(Esta relación se usó arriba)

Bibliografía

Lax, Peter D., "The Differentiability of Pólya's Function", Advances in Mathematics, 10 ; 1973.