Boletín de Matemáticas
Volumen X (1976). págs. 78 - 85

UNA HIPOTESIS EQUIVALENTE AL POSTULADO EUCLIDEO DE LAS PARALELAS (*)

VICTOR ALBIS GONZALEZ Y LUIS MORENO ARMELLA

I

En un desafortunado intento de demostrar la "falsedad" de las fórmulas de la trigonometría plana hiperbólica, Julio Garavito [1916, 360] hace una *afirmación*, de la cual no da demostración, y en la cual apóyase para "demostrar" que ciertos argumentos hechos con "rectas", pueden conducir a conclusiones erróneas cuando se hacen con "rectas" que no son "rectas euclídeas" [Garavito 1916, 355]. Nosotros queremos mostrar aquí que *su afirmación es equivalente al postulado euclídeo de las paralelas,* razón por la cual sus razonamientos, hechos después de la admisión de aquella, sólo son aplicables a rectas euclídeas ; por lo tanto, su argumentación, así tomada, carece de base. Más aún, a pesar de que hace notar de

> . . . una vez por todas, que no pretendemos demostrar el postulado de

(*) Trabajo auspiciado por Colciencias, dentro del marco del Proyecto de Investigaciones Históricas en la Matemática Colombiana.

Euclides [Garavito 1916, 355]

su afirmación le conduce a éste, sin al parecer percatarse de ello. Como su *demostración* de que su afirmación conduce al postulado en cuestión es incorrecta , dado el mal uso que hace de la noción de *reciprocidad uniforme entre dos funciones* [1], nosotros aprovechamos esta ocasión para hacer tres cosas :

1. *Dar un ejemplo más de dos hipótesis que son equivalentes con respecto a un conjunto de axiomas de un sistema hipotético-deductivo.*

2. *Proveer un nuevo ejemplo de una hipótesis, nueva al parecer, equivalente al postulado euclídeo de las paralelas.*

3. *Dar demostraciones correctas de las conclusiones acertadas (aunque inconscientes) de Garavito.*

II

Para tener una cabal idea de lo que propone Garavito, es conveniente resumir aquí su argumentación. En primer lugar, Garavito está admitiendo, explícita o implícitamente, los que hoy llamamos *axiomas de enlace, congruencia y continuidad* que conforman el conjunto de axiomas del desarrollo *sintético* de Euclides-Hilbert [Hilbert 1953, 3 y sigs.] , excluyendo el axioma euclídeo de las paralelas. En segundo lugar, las consideraciones hechas en el numeral 10 de [Garavito 1916] , nos indican que Garavito admite tanto una *medida de segmentos* como *una de ángulos.*

Por estas razones, nos es lícito suponer que las consideraciones de Garavito se efectúan dentro de un sistema hipotético-deductivo como el que se encuentra en [Moise 1963] (enfoque métrico de la geometría), sin el axioma euclídeo de las paralelas. Es interesante observar que en este caso *una recta no se cierra* . Recordemos un poco cómo es un tal sistema : se da un conjunto E, y una familia $\mathfrak{R}$ de subconjuntos de E . Los elementos de E se llaman *puntos*, los de $\mathfrak{R}$, *rectas*. Estos objetos están sujetos a ciertos axiomas, llamados *axiomas de incidencia*. Además, se da una *función distancia* : $d : E \times \mathbb{R}_+$, la cual satisface no sólo los axiomas usuales de una distancia, sino uno adicional, llamado *axioma de* *coordinabilidad : Toda recta posee un sistema de coordenadas (abscisas)* [Moise 1963, 49] · En esta forma, las propiedades de *interestancia de puntos* y *congruencia de segmentos* aparecen como teoremas. Se da, por último, una *medida de ángulos : m* [Moise 1963, 74-77], que nos conduce entonces a la *congruencia de ángulos* y, finalmente, a la de *triángulos*.

Al conjunto de axiomas (de incidencia, de distancia y de medida de ángulos) satisfecho por $[E, \mathcal{R}, d, m]$, lo designaremos con $\mathfrak{M}$ (de *métrico*).

Garavito llega entonces a la consideración de la siguiente situación : Sean O un punto de un plano, OP y OQ dos rectas perpendiculares entre sí. Sea M un punto del plano [distinto de O, para evitar trivialidades], y consideremos las perpendiculares MP y MQ, trazadas desde M a OP y OQ, respectivamente. Estas construcciones, como indica justamente Garavito, son independientes del postulado de Euclides (es decir, dependen hasta ahora del conjunto de axiomas $\mathfrak{M}$). Hagamos $OP = x_1$, $OQ = y_1$, $MQ = x$, $MP = y$ [2], y designemos

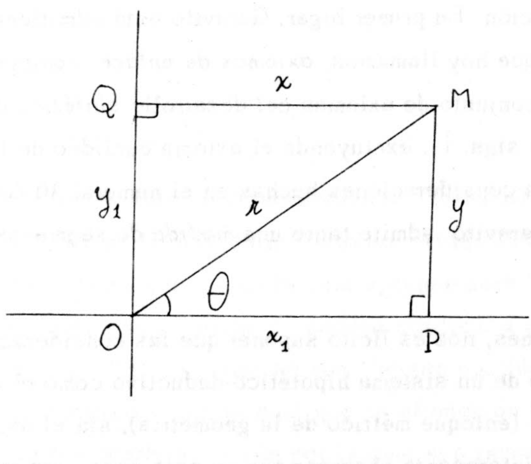

Figura 1

con θ a la medida del ángulo $\sphericalangle MOP$.

Dice entonces Garavito que si $x=x_1$, $y=y_1$, estamos en la hipótesis euclídea ; pero si éste no es el caso, tendremos por lo menos dos sistemas de valores: (x,y) y (x_1,y_1) , para *definir la posición del punto* M. Y añade :

> Estas coordenadas serán funciones de r [$= OM$] y las relaciones
>
> (1) $$x_1/r \;,\; y_1/r \,,\; x/r \,,\; y/r$$
>
> serán solamente funciones de θ. [Garavito 1916, 360]

Esta última afirmación *requiere demostración,* pues no es del todo evidente . Es más, partiendo de ella, Garavito demuestra que $x=x_1$, $y=y_1$ [Garavito 1916 , 361] que, como ya hemos visto, dice es el postulado euclídeo de las paralelas . Pero como para él lo que ha hecho es independiente de tal postulado, *tiene ante sí una demostración de éste,* cosa que no se había propuesto. (¡!)

Lo que ha ocurrido es lo siguiente : la *afirmación* que hace Garavito es equivalente al postulado euclídeo de las paralelas en presencia del conjunto de axiomas $\mathfrak{M}$; esto lo demostraremos en la siguiente sección.

III

Para demostrar que la afirmación de Garavito (denotada con G) es equivalente al postulado euclídeo de las paralelas (denotado con PE) en presencia del conjunto de axiomas $\mathfrak{M}$, necesitaremos algunos preliminares.

Recordemos que un *cuadrilátero de Saccheri* $ABCD$ es tal que : $\measuredangle A = \measuredangle D$ = *un recto,* y $AB = DC$. Saccheri [Bonola 1955, 23-25] demostró que en un cuadrilátero de su nombre también se tiene que $\measuredangle B = \measuredangle C$ pero que no es posible decidir sin más que $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ sean rectos. Sin embargo, sí pudo demostrar que, si, en un cuadrilátero de Saccheri $ABCD$, los ángulos $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ son ambos rectos , entonces lo mismo ocurrirá en cualquier otro cuadrilátero de Saccheri. De aquí resulta que para mostrar que una geometría es la euclídea, basta demostrar que en un cuadrilátero de Saccheri $ABCD$ como el considerado hasta aquí, uno de los ángulos $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ es recto. [Bonola 1955, 25].

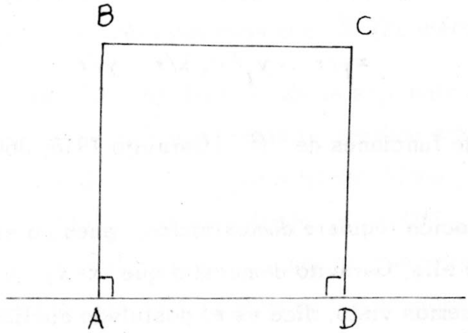

Figura 2

Es claro ahora que si $MP = OQ$, en la construcción de Garavito, el cuadrilátero $OQMP$ es de Saccheri ; y como, por construcción, $\sphericalangle Q = \sphericalangle O = \sphericalangle P$ = *un recto,* resulta que estamos en la geometría de Euclides. En realidad hemos mostrado que, en presencia de los axiomas $\mathfrak{M}$, las igualdades

$$(2) \quad MP = OQ \quad \text{y} \quad OP = QM ,$$

implican el postulado euclídeo y recíprocamente. O también :

$$(3) \quad \mathfrak{M} \cup \{(2)\} => PE \quad \text{y} \quad \mathfrak{M} \cup \{PE\} => (2).$$

O si se quiere, finalmente, que *(2)* y *PE son dos hipótesis equivalentes con respecto al conjunto de axiomas* $\mathfrak{M}$.

Nuestro propósito es mostrar aquí que tenemos

$$(4) \quad \mathfrak{M} \cup \{G\} \Rightarrow PE \text{ y } \mathfrak{M} \cup \{PE\} \Rightarrow G .$$

Ahora bien, sabemos ya que $\mathfrak{M} \cup \{PE\} \Rightarrow (2)$; pero entonces es bien conocido que

$$\cos \theta = x/r = x_1/r \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \theta = y/r = y_1/r \ ;$$

es decir, los cocientes *(1)* son independientes de r, lo cual bien muestra que: $\mathfrak{M} \cup \{PE\} \Rightarrow G$.

Supongamos ahora que tenemos $\mathfrak{M} \cup \{G\}$. En la figura 3, tomemos M_1 tal que $OM_1 = M_1M$ (lo cual es posible a partir de $\mathfrak{M}$) y desde M_1 tracemos M_1P_1 perpendicular a OP. En la prolongación

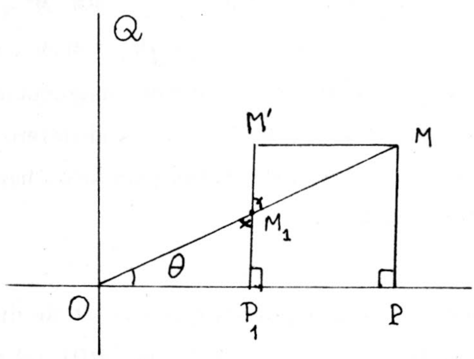

Figura 3

de M_1P_1 construyamos $M_1M' = M_1P_1$; ahora bien, G implica que para todo punto M_1 de OM, se tenga

$$OP_1 = OM_1 \cdot \gamma(\theta) \ , \quad M_1P_1 = OM_1 \cdot \sigma(\theta) \ ,$$

en donde $\gamma(\theta)$ y $\sigma(\theta)$ son funciones que dependen exclusivamente de θ ; es claro entonces que estos valores $\gamma(\theta)$ y $\sigma(\theta)$ permanecen constantes en todo punto de OM .

Por lo tanto,

$$MP = OM \, . \, \sigma(\theta) = (OM_1 + M_1 M) \, . \, \sigma(\theta) = 2 . \, OM_1 \, . \, \sigma(\theta) = 2 . M_1 P_1 \; ;$$

por consiguiente,

$$MP = M' P_1 \, ,$$

con lo cual $P_1 MM' P$ es un cuadrilátero de Saccheri, puesto que $\sphericalangle P_1 = \sphericalangle P =$ *un recto.*

Consideremos ahora los triángulos $\triangle OM_1 P_1$ y $\triangle MM_1 M'$. En ellos $\sphericalangle OM_1 P_1 = \sphericalangle MM_1 M'$ (opuestos por el vértice), $P_1 M_1 = M_1 M'$, $OM_1 = M_1 M$; luego $\sphericalangle M_1 M' M = \sphericalangle OP_1 M_1 =$ *un recto.* (Este caso de congruencia de triángulos depende sólo de $\mathfrak{M}$). Por lo tanto, $P_1 MM' P$ es un cuadrilátero de Saccheri con tres ángulos rectos ; este hecho,como ya lo hemos indicado , implica PE. Es decir, $\mathfrak{M} \cup \{ G \} \Rightarrow PE$, tal como queríamos.

Notas. 1. Dos funciones f y g de dominio común D se dicen *recíprocamente uniformes* si existe una biyección φ de $F(D)$ en $g(D)$ tal que $\varphi(f(z)) = g(z)$, para todo $z \in D$. El error de Garavito consiste en suponer que cada vez que dos funciones f y g son recíprocamente uniformes, subsiste entre ellas una relación algebraica del tipo : $Afg + Bf + Cg + D = 0$, en donde A, B, C, D son constantes.

2. Por abuso de notación, usaremos el mismo símbolo para designar con él un segmento y su medida.

Bibliografía

Bonola, R. 1955, *Non-euclidean geometry,* New York (Dover).

Garavito, J. 1916, "Nota sobre la fórmula fundamental de la trigonometría plana no euclídea en la geometría hiperbólica", Anales de Ingeniería, 24, 222-234 ; 353-362 ; 465-469.

Hilbert, D. 1953, *Fundamentos de la geometría,* Madrid (Instituto Jorge Juan).

Moise, E. 1963, *Elementary geometry, from an advanced standpoint,* Reading (Addison-Wesley).

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E., Colombia